Superfícies de Curvatura Gaussiana Constante no Espaço Euclidiano R^3.

Alejandra Muñoz González
Orientador: Levi Rosa Adriano

Agosto 2023

1 Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas classes de superfícies com curvatura Gaussiana ou média constante no espaço Euclidiano R^3. Na primeira parte, vamos estudar as superfícies que são obtidas como a soma de duas curvas ou que são o gráficos do produto de duas funções. Vamos considerar o problema de encontrar todas as superfícies destes tipos com curvatura Gaussiana constante (CGC).Na segunda parte,consideramos superfícies com curvatura Gaussiana (K) constante que são dadas por uma equação implícita do tipo $f(x)+g(y)+h(z)=0$, onde f , g e h são funções reais de uma variável. Se $K=0$, mostramos que a superfície é de revolução, ou uma superfície cilindrica ou uma superfície cônica. Se $K\neq 0$, a superfície é de revolução.

2 Introdução

Neste dissertação estudamos algumas classes de superfícies no espaço Euclidiano R^3. Na primeira parte, vamos estudar as superfícies que são obtidas como a soma de duas curvas ou que são gráficos do produto de duas funções. Vamos considerar o problema de encontrar todas as superfícies destes tipos com curvatura Gaussiana constante (CGC).
Uma superfície $S\subset R^3$ é chamada de superfície de translação se esta pode ser escrita localmente como a soma $\Psi(s,t)=\alpha(s)+\beta(t)$ de duas curvas
$\alpha : I\subset R\to R^3$ e $\beta : J\subset R\to R^3$. Se α e β estão contidas em planos ortogonais, as únicas superfícies CGC de translação têm $K=0$ e são superfícies cilíndricas [3].

No trabalho de López e Moruz em [1], em que a primera parte da disertação é baseada, os autores mostram, sem qualquer hipótese sobre as curvas α e β, que as únicas superfícies com curvatura Gaussina nula ($K=0$) de translação são as superfícies cilíndricas, ou seja, superfícies regradas cuja diretriz está contida num plano e as geratrizes são paralelas a uma direção fixada em R^3. No caso em que $K\neq 0$, eles mostram que não existem superfícies de translação com curvatura

Gaussiana constante, se uma das curvas geratrizes for plana (ver,[1,Th.1.1]).

O segundo tipo de superfícies do nosso estudo são as superfícies homotéticas. Uma superfície $S \subset R^3$ é chamada homotética se esta é o gráfico de uma função $z = f(x)g(y)$, onde $f : I \subset R \to R$ e $g : J \subset R \to R$ são funções diferenciáveis. A primeira abordagem para este tipo de superfície aparece em [4], estudando o problema de encontrar superfícies homotéticas mínimas no espaço de Lorentz-Minkowski L^3. Nesta direção, Van de Woestyne provou em [5] que as únicas superfícies homotéticas mínimas em L^3 são os planos e os helicoides. Em [1], os autores mostram a versão deste resultado para o espaço Euclidiano, ou seja, os planos e os helicoides são as únicas superfícies homotéticas mínimas em R^3. Ainda neste trabalho, eles fornecem uma classificação completa para superfícies CGC em R^3 (ver,[1,Th.1.3]).

A segunda parte desta disertação é baseada no trabalho de Hasanis e López em [2], onde os autores classificam todas as superfícies de curvatura Gaussiana constante em R^3 que podem ser expressas por uma equação implícita do tipo

$$f(x) + g(y) + h(z) = 0, \tag{1}$$

onde f, g e h são funções reais de uma variável. Uma motivação para este estudo vem da teoria clássica das superfícies mínimas. Por exemplo, historicamente as primeiras duas superfícies mínimas são separáveis, o catenóide $(\cosh z)^2 = x^2 + y^2$ obtido por Euler em 1744, e o helicóide $\tan(z) = yx$ obtido por Meusnier em 1776.

Localmente, qualquer superfície de R^3 é o conjunto de nível $F(x, y, z) = 0$ de uma função F definida num aberto $O \subset R^3$. O interesse deste trabalho são todas as superfícies onde a função F é uma função de variáveis separáveis. Existem três exemplos particulares de superfícies separáveis que merecem destaque porque são obtidas por simples escolhas das funções f, g e h na equação (1).

1. Cilindros retos: Um cilindro reto é formado por todas as retas ortogonais a uma dada curva plana C. Se C está contida em um plano coordenado, então a superfície é separável onde uma das funções f, g ou h é constante.

2. Superfícies de translação: Uma superfície de translação, depois de uma apropriada mudança de coordenadas, pode ser expressa por $z = \phi(x) + \psi(y)$, onde ϕ e ψ são funções diferenciáveis.

3. Superfícies de rotação: Uma superfície de revolução cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados é uma superfície separável. Renomeando os eixos, se necessário, uma superfície de rotação em torno do eixo z pode ser escrita como $h(z) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, com $a, b, c \in R$.

O trabalho de López e Hasanis em [2] fornece uma classificação completa de todas as superfícies separáveis de curvatura Gaussiana constante.

Teorema 1. A menos de um movimento rígido, as únicas superfícies separáveis de curvatura Gaussiana nula são:

1. Um cilindro reto sobre uma curva plana contida num dos planos coordenados.
2. Uma superfície de translação $z = ax + g(y)$, onde $a \neq 0$ e g é qualquer função diferenciável.
3. Uma superfície de rotação com curvatura Gaussiana nula.
4. Uma superfície cilíndrica ou uma superfície cônica.

No caso em que K é uma constante não nula, a classificação é a seguinte.

Teorema 2. As únicas superfícies separáveis com curvatura Gaussiana constante não nula são as superfícies de rotação de curvatura constante cujo eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados.

3 Referências

[1] R. López, M. Moruz. *Translation and homothetical surfaces in Euclidean Space with constant Gaussian curvature*,J. Korean Math. Soc. 52 (2015), 523–535.
[2] T. Hasanis, R. López *Classification of separable surfaces with constant Gaussian curvature*, manuscripta math. 166 (2021), no.3-4, 403–417.
[3] H. Liu. *Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces*, J. Geom. 64 (1999), 141–149.
[4] I. Van de Woestyne. *A new characterization of the helicoids,* Geometry and topology of submanifolds, V (Leuven/Brussels, 1992), 267–273, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
[5] I. Van de Woestyne. *Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-Euclidean space,* Results Math. 27 (1995), 333–342.