UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Exame de Qualificação de Análise

Questão 1. Dada a função $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$ e $f(0,0)=0$,
a) decida se f é ou não contínua em R^2, justificando sua resposta.
b) Mostre que

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)).$$

Questão 2. Se $f : R^n \longrightarrow R$ é uma função tal que,

a) $|f(x)| \leq |x|^2$, b) $|f(x)| \leq |x|$,

decida em cada caso se f é ou não diferenciável na origem, justificando sua resposta.

Questão 3. Seja $f : A \subset R^n \to R^n$, A aberto, uma função $1-1$ e continuamente diferenciável, tal que $det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.
a) Mostre que $f(A)$ é um conjunto aberto e que para qualquer conjunto aberto $B \subset A$, $f(B)$ é aberto.

b) Mostre que $f^{-1} : f(A) \to A$ é diferenciável.

Questão 4. Considere a região $A \subset R^3$ obtida a partir da interseção do primeiro octante com o conjunto definido pelas seguintes condições:

$$0 \leq z \leq 4 - 2\,(x^2+y^2), \text{ se } 0 \leq x^2+y^2 \leq 1,$$
$$0 \leq z \leq 3 - (x^2+y^2), \text{ se } 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\,.$$

a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

b) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$.

Questão 5. Relembrando que um subconjunto $C \subset R^n$ tem conteúdo nulo se para cada $\epsilon > 0$ existe um recobrimento finito $\{U_1, \ldots U_n\}$ de C, por retângulos (em R^n) fechados (podem ser abertos), tal que $\sum_{i=1}^n v(U_i) < \epsilon$, onde $v(U_i)$ é o volume de U_i, prove os seguintes ítens: se o conjunto $C \subset R^n$ tem conteúdo nulo, então:
a) $C \subset A$ para algum retângulo fechado $A \subset R^n$.
b) C é mensurável segundo Jordan e $\int_A \chi_C = 0$, onde χ_C é a função característica de C.

Goiânia, 10 de dezembro de 2014.