UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Goiânia, 07 de março de 2016.

Exame de Qualificação de Análise - Mestrado

Questão 1. Responda falso ou verdadeiro justificando sua resposta

a. O conjunto $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \text{ tal que } y \leq x^2\}$ é convexo.

b. Se a função $f : U \subset R^m \to V \subset R^n$, U e V abertos, é um difeomorfismo então $m = n$.

c. A função $g : [0,\, 2\pi] \to S^1 = \{x \in R^2 \text{ tal que } |x| = 1\}$ definida por $g(t) = (cos\, t,\, sen\, t)$ é contínua e possui inversa contínua.

d. Se $X \subset R^n$ é J$-$mensurável e o interior de X é vazio, então vol.$X = 0$.

e. $f : U \subset R^m \to R^m$, U aberto, é um difeomorfismo local, se e somente se, $f'(x) : R^m \to R^m$ é um isomorfismo.

Questão 2. Uma função $f : R^n \to R$ é homogênea de grau m se $f(tx) = t^m f(x)$, para todo $x \in R^n$. Se f além de homogênea é diferenciável, mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{df}{dx_i}(x) = mf(x)$$

.

Questão 3. a) Dada a função $f : [0,\, 1] \times [0,\, 1] \to R$ definida por $f(x,\, y) = 0$ se $x \neq 1/2$, $f(1/2,\, y) = 0$ se y é racional e $f(1/2,\, y) = 1$ se y é irracional. Mostre que f é integrável.
b) Mostre que

$$\int_0^x \Big\{ \int_0^t F(y)\, dy \Big\} dt = \int_0^x (x - y) F(y)\, dy,$$

onde $F : R \to R$ é uma função integrável.

Questão 4. a) Enuncie o Teorema de Mudança de Variável em integrais múltiplas.
b) Calcule $\int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy$, onde D é o domínio $x^2 + y^2 \leq a^2$, $\; a > 0$.

Questão 5. a) Enuncie o Teorema da Função Implícita.
b) Sejam x, y, z dados em coordenadas esféricas,
$x(\rho,\, \phi,\, \theta) = \rho\, sen\, \phi\, cos\, \theta$, $y(\rho,\, \phi,\, \theta) = \rho\, sen\, \phi\, sen\, \theta$, $z(\rho,\, \phi,\, \theta) = \rho\, cos\, \phi$,
perto de quais pontos podemos resolver este sistema para ρ, ϕ, θ em função de x, y, z?