UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Goiânia, 14 de dezembro de 2015.

Exame de Qualificação de Análise - Mestrado

Resolva as questões de 1 a 4, e uma entre as questões 5, 6 e 7.

Questão 1. a) Mostre que a função diferenciável $z : R^2 \to R$, definida pela equação $F(x - az, y - bz) = 0$, onde F é uma função diferenciável arbitrária de duas variáveis, a e b constantes, satisfaz

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1\,.$$

b) Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} & \text{se } \; y > 0, \;\; x \in R \\ 0 & \text{se } \; y = 0, \;\; x \in R, \end{cases}$$

verifique que

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x,y)dy\,.$$

c) Quais hipóteses são necessárias sobre uma função f para se ter uma igualdade no lugar da desigualdade do item b).

Questão 2. Denina a função $f : R \to R$ por

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + x^2 sen\frac{1}{x} & \text{se } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \; x = 0, \end{cases}$$

onde a é uma constante, $0 < a < 1$. Mostre que f restrita a qualquer vizinhança da origem não possui inversa. Neste caso, onde falha a aplicação do Teorema da Função Inversa?

Questão 3. Considere a aplicação diferenciável $f : B \subset R^3 \to R^2$, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B$, onde B é a bola aberta unitária centrada na origem.
a) Defina $h : B \to R$ por $h(x) = \frac{1}{|f(x)|}$. Calcule $h'(x) \cdot v, \quad x \in B$ e $v \in R^3$.
b) Se $g : B \to R^2$ é uma aplicação diferenciável, defina $\varphi : B \to R^2$ por $\varphi(x) = \frac{g(x)}{|f(x)|}$. Calucle $\phi'(x) \cdot v, \quad x \in B$ e $v \in R^3$.

Questão 4. Mostre que se $f : A \to R$ é uma função integrável, onde A é um bloco (retângulo) em R^n, então, $Gr(f)$, o gráfico de f, tem medida nula em R^{n+1}.

Questão 5. a) Enuncie o Teorema de Poincaré-Bendixon e dê exemplo.
b) A afirmação "Todo campo vetorial é topologicamente equivalente à sua parte linear", é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.
c) Esboce o retrato de fase de um campo no plano com exatamente uma órbita periódica e três pontos singulares hiperbólicos, e determine o ω-limite e o α-limite de cada ponto no plano.

Questão 6. Seja $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ uma solução da equação

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0,$$

onde $\Omega \subset R^n$ é um domínio limitado, a_i e c são funções contínuas em Ω com $c(x) < 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.
a) Mostre que $u = 0$ em $\partial\Omega$ implica $u = 0$ em Ω.
b) Verifique que a conclusão do item a) pode falhar se $c > 0$. (Aqui, use $\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2}$ em R).

Questão 7. Enuncie e demonstre as Condições Necessárias e Suficientes de Otimalidade de primeira e segunda ordens para o problema irrestrito

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in R^n, \end{array}$$

em que $f : R^n \to R$ é duas vezes continuamente diferenciável.