Segunda Prova de Análise Funcional - Doutorado 2016

Professor Marcos Leandro

19 de Julho de 2016

Escolha cinco questões onde, duas são sem restrição, uma entre as questões 4 e 5 e duas estre as questões 7, 8 e 9.

1. Seja H um espaço de Hilbert separável. Mostre que todo conjunto ortonormal em H é contável.

2. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Theta := \{e_j\}_{j\in I}$ um conjunto ortonormal de H, não necessariamente enumerável. Prove que:

   (i) Dado $x \in H$ o conjunto $S_x := \{e_j \in \Theta | (x, e_j) \neq 0\}$ é contável;

   (ii) $\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$, para cada $x \in H$ (Desigualdade de Bessel);

   (iii) $\left(x - \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i\right) \perp e_j,\ \forall e_j \in S_x$.

3. Sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é um subconjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert H e $x \in H$. Se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são escalares mostre que $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ atinge seu mínimo valor se, e somente se, $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$.

4. Sejam H um espaço de Hilbert, $G \subset H$ um subespaço, F um espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(G, F)$. Prove que existe $T \in \mathcal{L}(H, F)$ que estende S e $\|T\| = \|S\|$.

5. Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por

   $$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, ...),$$

   onde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Prove que T é compacto, auto adjunto e que $\sigma(T) = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$.

6. Sejam H um espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Prove que $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ e é compacto.

7. Enuncie e demonstre o Teorema da Projeção para espaços de Hilbert.

8. Seja $T : (C[a, b], \|.\|_\infty) \to (C[a, b], \|.\|_\infty)$ um operador definido por

   $$T(u)(t) = \int_a^b K(t, s)u(s)ds,$$

   onde $K \in ([a, b]^2, \mathbb{R})$. Prove que:
   (i) T é compacto;
   (ii) Calcule o espectro de T quando $a = 0$, $b = 2\pi$ e $K(s, t) = \cos(s - t)$.

9. Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{K}(H)$ e $S \in \mathcal{L}(H)$ bijetora. Prove que a equação

   $$Su - Tu = f \tag{1}$$

   (i) possui uma única solução ou
   (ii) para $f \equiv 0$ possui n soluções linearmente independentes. Neste caso, (1) possui solução se, e somente se, $f \in N(I - T^*)^{\perp}$.

Boa Prova!