Primeira Prova de Análise Funcional - Doutorado 2016

Professor Marcos Leandro

6 de Junho de 2016

1. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} < 1$ mostre que a equação integral
$$u(x) = \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \Omega$$
tem uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

2. Sejam E espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset E$ convexos disjuntos. Suponha que A tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in E^*, f \not\equiv 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa A e B. (Sugestão: Use que se A é um conjunto convexo, então $\mathrm{int}(A)$ também o é).

3. Seja E um espaço normado e $(x_n) \subseteq E$. Mostre que:

   (i) se $x_n \overset{E}{\to} x$ então $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$,

   (ii) se $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ então (x_n) é limitada e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$,

   (iii) se $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ e $f_n \overset{E^*}{\to} f$ então $f_n(x_n) \to f(x)$.

4. Calcule o operador adjunto do operador $S_e \in \mathcal{L}(\ell^1)$ definido por $S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (\xi_2, \xi_3, ...)$.

5. Sejam E um espaço vetorial normado, $F \subset E$ um subespaço e $T \in \mathcal{L}(F, \ell^\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ tal que $\widetilde{T}$ é uma extensão de T a E e $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

6. Sejam E um espaço reflexivo $(x_n) \subseteq E$ uma sequencia limitada. Prove que (x_n) possui subsequencia convergindo na topologia $\sigma(E, E^*)$.

7. Seja E um espaço de Banach. Prove que E é um espaço reflexivo se, e somente se, E^* é reflexivo.

8. Seja E um espaço de Banach reflexivo. Prove que para cada $f \in E^*$ existe $x_f \in E$ tal que $\|x_f\| = 1$ e $\|f\| = f(x_f)$.

9. Sejam E, F subespaços de um espaço de um espaço normado W tais que $E \cap F \neq \{0\}$. Prove que $(E \cap F)^* = E^* + F^*$.

10. Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$. Suponha que A seja compacto na topologia $\sigma(E, E^*)$. Prove que A é limitado.