`Análise Funcional`

`Prof. Marcos Leandro, 2018-1 - Prova 2`

As questões que têm (*) são obrigatórias, escolha duas entre as demais questões.

1. Prove que ℓ^∞ não é separável.

2. **(*)** Seja H um espaço de Hilbert, e A um operador compacto, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Enuncie a *Alternativa de Fredholm* e mostre que:

   (a) As equações

   $$\begin{array}{ll} (1) & u - \lambda A u = w \\ (2) & v - \lambda A^* v = z \end{array}$$

   têm únicas soluções $u, v \in H$ para cada $w, z \in H$ ou ambas as equações

   $$\begin{array}{ll} (3) & \phi - \lambda A \phi = 0 \\ (4) & \psi - \lambda A^* \psi = 0 \end{array}$$

   possuem soluções não nulas, onde o número de soluções linearmente independestes é finito e mesmo para ambas as equações.

   (b) a equação (1) tem pelo menos uma solução se, e somente se, w é ortogonal a todas as soluções de (4).

   (c) a equação (2) tem pelo menos uma solução se, e somente se, z é ortogonal a todas as soluções de (3).

3. **(*)** Sejam $K \in C([0,1] \times [0,1])$ e $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definida por

   $$T(\varphi)(t) := \int_0^1 K(s,t)\varphi(s)ds.$$

   (a) Prove que T é um operador compacto;

   (b) Se $K(s,t) := s(1+t)$, encontre o conjunto $EV(T)$;

4. Seja $S_e : \ell^2 \to \ell^2$ definido por

   $$S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := (\xi_2, \xi_3, ...).$$

   Calcule $\sigma(S_e)$.

5. Sejam H um espaço de Hilbert e $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^1. Seja $K \subset H$ convexo e seja $u \in H$. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes

   (a) $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in K$,

   (b) $(F'(u), v - u) \geq 0\ \forall v \in K$.

6. Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{K}(E,F)$ tal que $Im(T)$ é fechado.

   (a) Use o Teorema da Aplicação aberta para mostrar que T é um operador que possui posto finito;

   (b) Se $\dim Ker(T) < \infty$ então $\dim E < \infty$.

7. Enuncie e demonstre o *Teorema da representação de Riesz*. Dê um exemplo para justificar que a hipótese do espaço ser completo não pode ser retirada.

8. **(*)** Enuncie e domonstre o *Teorema da Projeção sobre cojuntos convexos.*

9. Prove que todo espaço normado que possua *Base de Shauder* é separável.

10. Sejam E, F espaços de Banach. Prove que $\mathcal{K}(E,F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E,F)$.