Análise Funcional

Prof. Marcos Leandro

Primeiro semestre de 2018 - Prova 1

1. Seja $E$ um espaço de Banach. Responda Verdadeiro ou Falso e justifique ou dê um contra exemplo:
   (a) ( ) $\overline{B_1(0)}$ é compacta;
   (b) ( ) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, então o conjunto $C_B((a,b)) := \{u \in C(a,b) \mid u \text{ é limitada}\}$ munido da norma $\|u\| := \sup\limits_{a<t<b} |u(t)|$ é um espaço de Banach;
   (c) ( ) Se $\dim E < \infty$ e $f$ é um funcional linear, então f é contínuo;
   (d) ( ) Toda Base de Hamel de $E$ não é enumerável;
   (e) ( ) A aplicação canônica $J : E \to E^{**}$ é uma isometria.
2. Sejam $E$ espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset E$ convexos disjuntos. Suponha que $A$ tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa $A$ e $B$.
3. Seja $E$ um espaço de Banach tal que $\dim E = \infty$. Prove que a topologia $\sigma(E, E^*)$ não é metrizável.
4. Seja $E$ um espaço de Banach reflexivo e $M \subset E$ um subespaço fechado, então $M$ é reflexivo.
5. Enuncie e demonstre o Teorema da Limitação uniforme e dê uma aplicação.
6. Sejam $E$ um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, \ell^1)$ tal que T é sobrejetiva. Prove que existe $S \in \mathcal{L}(\ell^1, E)$ tal que $T \circ S = I_{\ell^1}$.
7. Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão finita. Prove que a topologia $\sigma(E, E^*)$ coincide com a topologia da norma.
8. Sejam $E := (C[0,1], \|.\|_\infty)$ e $f, f_n \in E^*$ definidas por

   $$f(\psi) = \psi(0),\ \ f_n(\psi) = n \int_0^{1/n} \psi(t)dt,\ \ \psi \in E.$$

   Prove que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e que $f_n \not\rightharpoonup f$.
9. * Sejam $E$ um espaço vetorial de dimensão infnita e $\emptyset \neq C \subset E$ aberto, convexo e limitado. Prove que:
   (a) $\overline{\partial C}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{C}^{\|\cdot\|}$;
   (b) $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \|x\|$ não é contínua na topologia $\sigma(E, E^*)$;
   (c) $\varphi$ definida no item $(b)$ é semicontínua inferiormente com relação a topologia $\sigma(E, E^*)$;
10. * Enuncie e demonstre o Teorema de Kakutani.