Análise no R^n - Lidiane S M Lima

Exercícios - Topologia no Espaço Euclidiano

1. Prove que se $|u+v| = |u| + |v|$, com $u \neq 0$, então existe uma constante $\alpha \geq 0$ tal que $v = \alpha \cdot u$.

2. Sejam $x = (x_1, ...x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Prove a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**

$$|\Sigma_{i=1}^n x_i y_i| \leq |x||y|.$$

3. Prove que duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

4. Sejam $x \neq y$ em $\mathbb{R}^n$ tais que $|x| = |y| = r$. Prove que $|(1-t)x + ty| < r$ para $0 < t < 1$. Conclua que a esfera $S(0; r)$ não contém segmentos de reta.

5. Defina conjunto convexo. Mostre que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y\}$ é convexo.

6. Prove que toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não nula é uma aplicação não limitada.

7. Faça o que se pede:

(a) Defina valor de aderência de uma sequência em $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência de (x_k) se e somente se toda bola de centro em a contém infinitos termos de (x_k).

(c) Mostre que uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se e somente se possui um único valor de aderência.

8. Mostre que uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é convergente se e somente se é de Cauchy.

9. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a \in \mathbb{R}^n$. Prove que se $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ então existe um número natural k_0 tal que se $k > k_0$ então $x_k \in A$.

10. Mostre que o interior de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

11. Responda as seguintes questões. Justifique:

(a) Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então a fronteira de X tem interior vazio?

(b) A interseção arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto?

(c) A reunião arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado?

12. Mostre que o fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.

13. Prove que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é fechado.

14. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos limitados disjuntos e não vazios. Se $d(A, B) = 0$ então $fr.A \cap fr.B$ é não vazio.

15. Defina aplicação uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}^m$ é compacto então toda aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua é uniformemente contínua.

Referências

[1] LIMA, E. L., Curso de Análise Vol II, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[2] LIMA, E. L., Análise real Vol II, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.