Análise no R^n - Lidiane S M Lima

Exercícios - Diferenciabilidade de uma Aplicação

1. Prove que se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in U$ então é contínua a.

2. Estude a diferenciabilidade das funções:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Estude a diferenciabilidade da função $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ em $(0,0)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. f é diferenciável na origem? E se $|f(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, podemos concluir que f é diferenciável na origem?

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x^2, y^2, (x+y)^2))$. Mostre que a derivada de f tem posto 2 se e somente se $(x,y) \neq (0,0)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, zy)$. Mostre que a derivada de f é uma transformação linear injetiva, salvo quando $x = y = 0$. Determine a imagem de $f^{'}(0,0,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

7. Faça os seguintes exercícios do capítulo 3 da referência [1]:
1.2, 1.3, 1.5, **2.1**, 2.4 3.1, **3.3**, 3.4, 3.10, **3.12**, 3.13, 4.1, 4.7, 4.9, **4.11**, 5.1, 7.1, 7.2, **7.5** e 7.6

8. Faça os seguintes exercícios do capítulo 5 da referência [1]:
1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.11, 3.5, **3.9**, 3.10, 3.11, 3.14, 3.16, 5.2, **5.4**, 5.5, **5.8**, 5.9

Observação: Os exercícios em negrito devem ser entregues até o dia da primeira avaliação.

Referências

[1] LIMA, E. L., Curso de Análise Vol II, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.