Lista 9 de Análise Funcional - Professor Marcos Leandro

8 de Junho de 2018

1. Prove que o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right) \tag{1}$$

é um operador compacto.

2. Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{K}(E, F)$ um operador de posto finito. Prove que T é compacto.

3. Sejam H um espaço de Hilbert separável, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal e $P_N : H \to H$ definido por

$$P_N(u) := \sum_{n=1}^{N} (u, e_n)e_n.$$

Calcule $\lim\limits_{N\to\infty} P_N(u)$ e prove que o operador obtido por este limite não é compacto. Isso contradiz o fato de $\mathcal{K}(H)$ ser um subespaço fechado de $\mathcal{L}(H)$?

4. Prove que os seguintes operadores são compactos:

   (i) $T : (C([a, b]), \|.\|_\infty) \to (C([a, b]), \|.\|_\infty)$ e $K : C([a, b]^2) \to \mathbb{R}$;
   (ii) $T : (L^2([a, b]), \|.\|_2) \to (L^2([a, b]), \|.\|_2)$ e $K : C([a, b]^2) \to \mathbb{R}$;
   (ii) $T : (L^2([a, b]), \|.\|_2) \to (L^2([a, b]), \|.\|_2)$ e $K : L^2([a, b]^2) \to \mathbb{R}$.

   Onde

$$(Tu)(t) := \int_a^b K(t, s)u(s)ds.$$

5. Sejam E e F espaços normados. Prove que $T \in \mathcal{K}(E, F)$ se, e somente se, $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

6. Sejam E e F espaços normados, $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $x_n \rightharpoonup x$ em E. Prove que $Tx_n \to Tx$ em F.

7. Seja T o operador definido em (1) com $p = 2$. Dados $\eta \in \ell^2$ e $n \in \mathbb{N}$, use a alternativa de Fredholm para discutir sobre a solução do problema

$$\left(\frac{1}{n}I - T\right)\xi = \eta.$$

8. **(*)** Seja H um espaço de Hilbert, e T um operador compacto, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Mostre que:

   1. As equações

$$\begin{aligned} &(1) \quad u - \lambda A u = w \\ &(2) \quad v - \lambda A^* v = z \end{aligned}$$

   têm únicas soluções $u, v \in H$ para cada $w, z \in H$ ou ambas as equações

$$\begin{aligned} &(3) \quad \phi - \lambda A \phi = 0 \\ &(4) \quad \psi - \lambda A^* \psi = 0 \end{aligned}$$

   possuem soluções não nulas, onde o número de soluções linearmente independestes é finito e mesmo para ambas as equações.

2. a equação (1) tem pelo menos uma solução se, e somente se, w é ortogonal a todas as soluções de (4).
3. a equação (2) tem pelo menos uma solução se, e somente se, z é ortogonal a todas as soluções de (3).