Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Pós-Graduação

Exame de Qualificação de Mestrado - Análise

Goiânia, 21 de dezembro de 2010.

Nome ....

Questão 1. Considere a função $\varphi : U \longrightarrow R$, $U = R^2 \backslash (0,0)$, definida por

$$\varphi(x,y) = \frac{x\, sen\, y^2}{x^2 + y^4}.$$

a) Mostre que limite de $\varphi(x,y)$, quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$, relativo a cada semireta com origem no ponto $(0,0)$ existe e é o mesmo para todas essas semiretas.
b) Calcule o limite de $\varphi(x,y)$, quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$, relativo ao conjunto $B = \big\{(x,y) \ : \ x = y^2\big\}$. O que se pode concluir sobre a existência de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)$?

Questão 2. Dada a função $f : U \subset R^m \longrightarrow R^n$, U aberto, escreva a definição de diferenciabilidade de f no ponto $x \in U$. Mostre que se f é diferenciável em x, então f é contínua em x.

Questão 3. a) Se $\gamma : [0,1] \longrightarrow R^3$ é uma curva de classe C^2, mostre que

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \int_0^1 (1-t)\gamma''(t)\, dt.$$

b) Se $f : U \subset R^2 \longrightarrow R^3$ é de classe C^2 no aberto U, e se o segmento $[x, x+h]$ está contido em U, mostre que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \int_0^1 (1-t) f''(x+th) \cdot (h,h)\, dt.$$

Questão 4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} sen\,(x+y+z) = z^4 \\ x - y + z = sen\,(x^4 + y^4 + z^4). \end{cases}$$

a) Prove que existem funções reais e diferenciáveis $f(z)$ e $g(z)$, definidas para $|z|$ suficientemente pequeno, tais que $f(0) = g(0) = 0$ e $(x,y,z) = \big(f(z), g(z), z\big)$ é solução do sistema.
b) Calcule $(f'(0))$ e $(g'(0))$.
c) Desenvolva f em série de Taylor até a segunda ordem.

Questão 5. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x^2+y^2 = z; \ \ 1 < z < 4\}$ e o campo vetorial $F(x,y,z) = (xz^2,\, yz^2,\, z^3)$. Calcule o fluxo do rotacional do campo F através de S, no sentido da normal exterior a S, usando o Teorema de Stokes. Escreva porque este problema satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes.