Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Pós-Graduação em Matemática
Data: 14/12/2011.
Nota:

Exame de qualificação de Ánalise Real III.

Questão 1. (2,0) Discuta a diferenciabilidade das seguintes funções :
a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2}$$

Questão 2. (2,0) Enuncie os teoremas da função implícita e da função inversa. Estes teoremas são equivalentes? Por quê? Dê aplicações praticas para o Teorema da função inversa e do teorema da função implicíta.

Questão 3. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de Classe C^1 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja $\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, \xi(x)) = c, x \in I, c \in \mathbb{R}.$$

Prove que ξ é de classe C^1. Qual é a derivada de ξ? Generalize para funções de classe $C^k, k \geq 2$.

Questão 4. (1,0) Enuncie os teoremas locais de submersão e imersão . Dê exemplos de aplicações C^∞ que sejam submersões. Dê exemplos de aplicações C^∞ que sejam imersões.

Questão 5. (1,5) Enuncie o Teorema de Fubini para funções continuas $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to R, U$ aberto. Seja $A = (0,1) \times (0,1).A_0 = A - \{(0,0)\}$. Defina $f : A_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}, (x,y) \in A_0.$$

Prove que

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \frac{1}{2} = -\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy.$$

Isto contradiz o Teorema de Fubini?

Questao 6. (2,0) Para toda matriz $X \in R^{m^2}$ defina

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Prove que a aplicação $X \to e^X$ é classe C^∞. Mostre que a primeira derivada desta função em $X = 0$ é a aplicação linear identidade. Conclua que a aplicação $X \to e^X$ é invertível em uma vizinhaça da origem.