UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UFG

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE FUNCIONAL
DOUTORADO 2016[1]

Exercício 1. *Sejam E um espaço vetorial normado, $f : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear não identicamente nula e*

$$H := \{v \in E : f(v) = \alpha\}.$$

Mostre que H é fechado se e somente se f é continua.

Exercício 2. *Enuncie e demonstre o Teorema de Hahn-Banach.*

Exercício 3. *Enuncie o Teorema da Aplicação Aberta e de exemplos mostrando que, em geral, as hipóteses não podem ser enfraquecidas.*

Exercício 4. *Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$ um subconjunto compacto na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$. Prove que A é limitado.*

Exercício 5. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$, o espaço X pode ser coberto por uma união finita de bolas de raio ε. Tenha como verdadeiro o fato de que X é compacto se, e somente se, X é totalmente limitado.*

Seja

$$c_0 = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} y_n = 0\},$$

munido com a norma $\|y\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$, onde $y = (y_n)$. Note que c_0 é um espaço de Banach. Tome $x = (x_n) \in c_0$ e considere o conjunto

$$S_x = \{(y_n) \in c_0 : \ |y_n| \leq |x_n|, \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que S_x é totalmente limitado e consequentemente compacto, com respeito a topologia forte.

Exercício 6. *Dê um exemplo de um espaço vetorial normado de dimensão infinita com uma base de Hamel enumerável.*

[1]UFG, Universidade Federal de Goiás, GO-BR.
Cada questão vale 2,0