UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Goiânia, 10 de dezembro de 2012.

Exame de Qualificação de Análise - Doutorado

Notação:
$C[a,\ b]$ - espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$, norma do sup;
$L_2(a,\ b)$ - espaço vetorial das funções $f : (a,\ b) \to \mathbb{C}$ de quadrado integrável;
$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ - espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{C}$; $\mathbb{S}$ - subespaço; $\|\cdot\|$ - norma;
$L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ - espaço vetorial normado das transformações lineares limitadas de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$; $\mathbb{X}/\mathbb{S}$ - espaço quociente de $\mathbb{X}$ relativo ao subespaço $\mathbb{S}$, com a norma usual do quociente, $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x + \mathbb{S}\| = \inf_{v\in\mathbb{S}} \|x + v\|$;
$\mathbb{H}$ - espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$; $< .\,,\, . >$ - produto interno; A^* - adjunto de A.

Questão 1. Sejam f e f_y, $y \in C[a,\ b]$ fixo, funcionais lineares definidos em $C[a,\ b]$ por

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt \quad \text{e} \quad f_y(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt\,.$$

a) Calcule $\|f\|$.
b) Mostre que f_y é limitado e calcule $\|f_y\|$.

Questão 2. Considere f um funcional linear em $\mathbb{X}$ e $\mathbf{N}$ o espaço nulo de f.
a) Se f não é nulo, mostre que existe um vetor $y \in \mathbb{X}$, tal que todo $x \in \mathbb{X}$ pode ser escrito de modo único na forma $x = \lambda y + w$, onde $w \in \mathbf{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.
b) Mostre que se g e outro funcional linear em $\mathbb{X}$ com o mesmo espaço nulo $\mathbf{N}$, então f e g devem ser múltiplos um do outro.

Questão 3. Seja A um operador linear limitado em $\mathbb{H}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
a) A é autoadjunto.
b) A forma bilinear φ em $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ definida por $\varphi(f, g) = < Af,\ g >$ é simétrica.
c) A forma quadrática $\tilde{\varphi}$ em $\mathbb{H}$ definida por $\tilde{\varphi}(f) = < Af,\ f >$ é real.

Questão 4. a) Enuncie o Princípio da Limitação Uniforme de Banach-Steinhaus.
b) Considere $\{T_n\}$ uma sequência em $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, tal que $\{T_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Y}$, para todo $x \in \mathbb{X}$. (Neste caso diz-se que $\{T_n\}$ é uma sequência de Cauchy forte). Mostre que se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são espaços de Banach, então $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ é completo no sentido forte.

Questão 5. Considere o operador (multiplicação) autoadjunto $Mf = xf$, $f \in \mathbb{H} = L_2(-1, 1)$
a) Mostre que o espectro de M é o intervalo fechado $[-1,\ 1]$.
b) Defina a projeção $P(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por:
i) $P(\lambda) = 0$ se $\lambda \leq -1$; $P(\lambda) = I$ se $\lambda \geq 1$;
ii) $P(\lambda)f(\xi) = f(\xi)$ se $-1 < \xi < \lambda$, e $P(\lambda)f(\xi) = 0$ se $\lambda \leq \xi < 1$.
Mostre que $\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ é uma família espectral de M.