Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística - IME

EXAME DE QUALIFICAÇÃO AO DOUTORADO

ANÁLISE - DEZ 15 2011

Aluno/Matr.:________________________________

1. Dados um espaço normado real E com dual $E^{'}$, mostre que:

   (i) se $x_0 \in E$ então existe $f_0 \in E^{'}$ tal que

$$\textbf{(a)} \quad \|f_0\| = \|x_0\|, \qquad \textbf{(b)} \quad \langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2,$$

   (ii) o funcional f_0 não é único em geral,

   (iii) f_0 é único nos casos:

$$\textbf{(a)} \quad E \text{ é Hilbert}, \qquad \textbf{(b)} \quad E = L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty,\ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ dominio limitado.}$$

2. Seja E um espaço normado e $x \in E$. Mostre que

$$\|x\| = \sup_{f \in E',\ \|f\| \leqslant 1} |f(x)| = \max_{f \in E',\ \|f\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

3. Dado um funcional linear continuo $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ mostre que existe um único $y = (y_1, y_2, \cdots) \in \ell_2$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell_2$$

4. Seja H um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset H$ um conjunto tal que

$$\sup_{\alpha \in A} |\langle y, x_\alpha \rangle| < \infty \quad \text{para cada} \quad y \in H.$$

   Use o Princípio da Limitação Uniforme para provar que $\{x_\alpha\}$ contem uma sequência fracamente convergente em H.

5. Dados um espaço de Banach real E e uma sequência de operadores de posto finito $(T_n) \subseteq B(E)$ tal que $T_n \to T$, mostre que $T \in K(E)$. Mostre também que o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $T(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_j, \cdots) = (\xi_1, \xi_2/2, \cdots \xi_j/j \cdots)$ é compacto.

6. Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subseteq H$ uma sequência tal que

$$x_n \overset{H}{\rightharpoonup} x, \qquad \|x_n\| \to \|x\|.$$

   Mostre que $x_n \to x$.