Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemtica e Estatística - IME
Pos-Graduação em Matemática
Aluno:
Nota:

Exame de Qualificação em Análise Funcional

Questão 1 Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} < 1$ mostre que a equação integral

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \Omega$$

tem uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

Questão 2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$K \in L^2(\Omega \times \Omega),\quad K(x,y) = K(y,x),\ x, y \in \Omega,$$

mostre que para cada $u \in L^2(\Omega)$ a expressão

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy,\quad x \in \Omega,$$

define um operador linear limitado, auto-adjunto $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

Qual a expressão do adjunto?

Questão 3 Seja E um espaço normado, $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$. Mostre que:

(i) $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle,\ f \in E'$,

(ii) se $x_n \overset{E}{\to} x$ então $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$,

(iii) se $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ então (x_n) é limitada e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

Questão 4 Prove que l^p não é um espaco de Hilbert para cada $p \neq 2$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, um conjunto aberto. Mostre que $L^p(\Omega)$ não é um espaço de Hilbert para cada $p \neq 2$.

Questão 5 Enuncie os principais teoremas discutidos no curso de Análise Funcional. Dê êxemplos onde tais resultados se aplicam.

Questão 6 Dados números $p, q > 1$ satisfazendo $1/p + 1/q = 1$ mostre que existe uma isometria linear de ℓ_q sobre ℓ_p^*. Neste caso escreve-se $\ell^q = \ell_p^*$. O que pode ser feito para o caso onde $p = 1$?