Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Pós-Graduação em Matemática e Estatística
Prof. Dr.: Edcarlos Domingos da Silva
Aluno:
Nota:

## Exame de Qualificação em Analise funcional, Fevereiro de 2018

Questao 01 (2,0). Prove que o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right) \tag{0.1}$$

é um operador compacto. Mais geralmente, defina o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, ...) \tag{0.2}$$

onde $(\lambda_j)$ é uma sequencia não-negativa satisfazendo $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$. Prove que $T$ é um operador compacto.

Questao 02 (2,0). Considere o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right). \tag{0.3}$$

Calcule o espectro de $T$. Mais geralmente, defina o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, ...) \tag{0.4}$$

onde $(\lambda_j)$ é uma sequencia nã-negativa satisfazendo $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$. Calcule o espectro de $T$.

Questao 03 (2,0) Sejam $S_e, S_d : \ell^2 \to \ell^2$ operadores definidos por

$$S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (\xi_2, \xi_3, ...) \text{ e } S_d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ...).$$

Determine o espectro de $S_e$ e $S_d$. Quais são os espectros de $S_e \circ S_e$ e $S_d \circ S_d$(composta de operadores).

Questao 04 (2,0) Seja H um espaço de Hilbert com produtor interno e norma denotados por $\langle , \rangle$ e $\| \|$, respectivamente. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear e continua. Suponha que

$$B(u, u) \geq c\|u\|^2, u \in H$$

onde $c > 0$. Defina $\|u\|_B = \sqrt{B(u, u)}, u \in H$. Prove que $\| \|$ e $\| \|_B$ são equivalentes. Adicionalmente, prove que a equação

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in H \tag{0.5}$$

admite uma única solução $u \in H$.

Questao 05 (2,0) Seja $H$ um espaço de Hilbert com produto interno e norma denotados por $\langle , \rangle$ e $\|\|$, respectivamente. Prove que para cada funcional linear e continuo $f : H \to \mathbb{R}$ existe $a \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \text{ para todo } x \in H.$$

Adicionalmente prove que $\|f\| = \|a\|$. O elemento $a \in H$ dado acima é unico? Porquê?

Questao 06 (2,0) Enuncie os Teorema da Aplicação Aberta, Teorema Grafico Fechado e o Teorema da Limitação uniforme. Enuncie e prove um exercício envolvendo o Teorema do Gráfico fechado.