UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Goiânia, 14 de dezembro de 2015.

Exame de Qualificação de Análise - Doutorado

Notação:
$C[a,\ b]$ - espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,\ b] \to \mathbb{C}$, norma do sup.
ℓ_2 - espaço vetorial das sequências complexas de quadrado (módulo) somável.
$L(X, Y)$ - espaço vetorial normado das transformações lineares limitadas de X em Y.

Questão 1. a) Verifique se as seguintes aplicações são ou não funcionais lineares:

i) $T_1 : C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$; ii) $T_2 : C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$;

iii) $T_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$; iv) $T_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto x_1$.

b) Mostre que todo funcional linear não nulo é sobrejetivo.

Questão 2. Defina o conjunto U de sequências de números complexos por,

$$U = \Big\{a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \ \ : \ \ a_k \in \mathbb{C},\ \ |a_k| \leq \frac{1}{k} \ \text{ para } \ 1 \leq k \leq \infty\Big\}.$$

Mostre que:
a) $U \subset \ell_2$.
b) Toda sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ $(a_n \in U)$, contém uma subsequência que converge em ℓ_2.
c) Se $e_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $1 \leq n < \infty$, $(\delta_{n,k} = 0$ se $n \neq k$, $\delta_{n,k} = 1$ se $n = k)$, então toda subsequência da sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Questão 3. Considere $K \in C(I \times I)$, $f \in C(I)$, $I = [0, 1]$. Defina

$$A(f(x)) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy,$$

e mostre que:
a) $A(f) \in C(I)$.
b) $A \in L\big(C(I), C(I)\big)$.
c) O operador A é compacto.

Questão 4. Dado o operador linear $A : \ell_2 \to \ell_2$, definido por

$$Ae_k = \frac{1}{k}e_k,\ \ k \geq 1,$$

onde $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ é a base canônica de ℓ_2, mostre que:
a) A é limitado e autoadjunto.
b) O *espectro discreto* de A coincide com a sequência $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.
c) O *espectro contínuo* de A consiste somente do número 0.

Questão 5. Sejam $Y = C[0,1]$ e X o subespaço de funçoes $f \in C[0,1]$ que são continuamente deriváveis em $[0,1]$ ($f'(0)$ e $f'(1)$ são derivadas laterais). Se $T : X \to Y$ é definido por $Tf = f'$, mostre que:
a) T é um operador linear descontínuo.
b) O gráfico de T é fechado em $X \times Y$.
c) Explique porque as conclusões dos ítens a) e b) não contradizem o Teorema de Gráfico Fechado.