UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Exame de Qualificação de Análise Funcional

Questão 1. Escreva as definições de espaço de Banach e de espaço de Hilbert. Dê exemplos, com justificativas, de um espaço vetorial normado que não é de Banach e de um espaço de Banach que não é de Hilbert.

Questão 2. Considere o seguinte subespaço de ℓ^1:

$$B = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1 \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} k\,|x_k| < \infty \right\}$$

a) Mostre que B é um subespaço vetorial próprio denso de ℓ^1.
b) Verifique que a aplicação linear $T : B \to \ell^1$ definida por $T(\{x_k\}_{k=1}^{\infty}) = \{k\,x_k\}_{k=1}^{\infty}$, é fechada mas não é limitada. Porque o resultado deste ítem não contraria o Teorema do Gráfico Fechado?

Questão 3. Seja H um espaço de Hilbert e $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal em H. Mostre que a sequência $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge fracamente para a sequência 0, mas não converge fortemente.

Questão 4. a) Escreva a definição de espaço vetorial reflexivo. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo.
b) Sejam E e F espaços de Banach, com E reflexivo. Mostre que se existe um operador linear limitado $T : E \to F$ tal que $T(E) = F$, então F é também reflexivo.

Questão 5. Seja $F : Q \to R$ uma função contínua definida no quadrado $Q = \{(x, y) \in R^2 \ : \ a \le x \le b, \ \ a \le y \le b\}$. Defina o operador $T : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ por

$$T(f)(t) = \int_a^b F(s, t) f(s) ds.$$

a) Mostre que T é um operador compacto.
b) Se $F(s, t) = ts(1 - ts)$, calcule o espectro de T.

OBS: Todos os espaços vetoriais referidos nesta prova são sobre o corpo dos reais (ou complexos).

Goiânia, 12 de dezembro de 2014.