1. Sejam E um espaço vetorial normado, $F \subset E$ um subespaço e $T \in \mathcal{L}(F, \ell^\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ tal que $\widetilde{T}$ é uma extensão de T a E e $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

2. Sejam E um espaço vetorial e G um subespaço fechado de E. Prove que:
   (a) Se $\dim G < \infty$, então G possui complemento topológico;
   (b) Se $\operatorname{codim} G < \infty$, então G possui complemento topológico.

3. Sejam E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subseteq E$ tal que existe $x \in E$ satisfazendo a seguinte condição:
$$f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in E^*.$$
   Prove que $(\|x_n\|)$ é limitada e que
$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

4. **(*)** Seja $1 \leq p < \infty$, e seja $(\eta_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de números reais tal que a série $\sum_{i=1}^\infty \xi_i \eta_i$ converge para cada $(\xi_j)_{j=1}^\infty \in \ell^p$. Prove que $(\eta_j)_{j=1}^\infty \in \ell^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. **(*)** Sejam X, Y espaços de Banach e $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para cada $x \in X$ a sequência $(T_n(x))$ é de Cauchy em Y . Mostre que $(\|T_n\|)$ é limitada.

6. **(*)** Considere $P(\mathbb{R}) := \left\{ p : p(x) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i x^i, \ a_i \in \mathbb{R} \right\}$ munido da norma $\|p\| = \max_i |a_i|$. Considere a sequencia $T_n : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada n, $T_n(p) = a_1 + ... + a_{n-1}$. Mostre que
   (a) Para cada n, T_n é um funcional linear contínuo;
   (b) Para cada $p \in P(\mathbb{R})$, $(\|T_n(p)\|)$ é limitada;
   (c) $\sup_n \|T_n\| = \infty$ e conclua que $P(\mathbb{R})$ não pode ser um espaço de Banach.

7. Sejam $S_e : \ell^2 \to \ell^2$ definido por
$$S_e(\xi_1, \xi_2, ...) = (\xi_2, \xi_3, ...)$$
   e $T_n = S_e^n := S_e \circ S_e^{n-1}$. Encontre $\|T_n \xi\|$ e o operador de Banach-Steinhaus. Conclua que T_n não converge para T em $\mathcal{L}(\ell^2)$.

8. Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in E$ tal que $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$ (x_0 é dito ponto de ressonâcia).

9. **(*)** Sejam E, F espaços de Banach e $T, T_1, T_2, ... \in \mathcal{L}(E, F)$. Se $T_n(x) \to T(x)$ para cada $x \in E$, então para qualquer compacto $K \subset E$ tem-se que
$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| = 0,$$
   ou seja, $T_n(x) \to T(x)$ uniformemente em K. **Dica:** Argumente por contradição.

10. Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijetor, mostre que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que
$$C_1 \|\xi\| \leq \|T\xi\| \leq C_2 \|\xi\|, \ \forall \xi \in E.$$

11. **(*)** Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear contínuo e sobrejetivo.
    (a) Dada uma sequencia (y_n) limitada em F, prove que existe uma sequência limitada (x_n) em E tal que $Tx_n = y_n$, para cada n.
    (b) Dada uma sequência (y_n) em F que converge para 0, prove que existe uma sequência (x_n) em E que converge para 0 e tal que $Tx_n = y_n$, para cada n.

12. Sejam E, F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injetivo. Mostre que $T^{-1} : Im(T) \to E$ é limitado se, e somente se, $Im(T)$ é fechado em F.

13. Mostre que o operador identidade $I_d : (C[0,1], \|.\|_1) \to (C[0,1], \|.\|_\infty)$, definido por $I_d(\varphi) = \varphi$ é fechado, contudo não é limitado.

14. **(*)(Qualificação 2015)** Sejam $Y = C[0,1]$ e X o subespaço de funções $f \in C[0,1]$ que são continuamente deriváveis em $[0,1]$ ($f'(0)$ e $f'(1)$ são derivadas laterais). Se $T : X \to Y$ é definido por $Tf = f'$, mostre que:

    (a) T é um operador linear descontínuo;

    (b) O gráfico de T é fechado em $X \times Y$;

    (c) Explique porque as conclusões dos ítens a) e b) não contradizem o Teorema de Gráfico Fechado.

15. **(*)(Qualificação 2016)** Enuncie o Teorema da Aplicação Aberta e dê exemplos mostrando que, em geral, as hipóteses não podem ser enfraquecidas.

16. Calcule os operadores adjuntos dos seguintes operadores:
    (a) $S_d \in \mathcal{L}(\ell^1)$ definido por $S_d(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$;
    (b) $T \in \mathcal{L}(\ell^1, c_0)$ (prove isto) definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, ...) = \left(\sum_{j\geq 1}^{\infty} \xi_j, \sum_{j\geq 2}^{\infty} \xi_j, \sum_{j\geq 3}^{\infty} \xi_j, ... \right).$$

17. Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ um aberto limitado. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$ satisfazendo:

$$K \in L^2(\Omega \times \Omega), \quad K(x,y) = K(y,x), \; x, y \in \Omega,$$

    mostre que para cada $u \in L^2(\Omega)$ a expressão

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \quad x \in \Omega,$$

    define um operador linear limitado, auto-adjunto $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Qual a expressão do adjunto?

18. Sejam E, F espaços de Banach e $A : D(A) \subseteq E \to F$ um operrador linear não limitado, densamente definido. Mostre que:

    (i) $A^* : D(A^*) \subseteq F^* \to E^*$ é fechado,

    (ii) se $D(A) = E$ então $A^* : F^* \to E^*$ é contínuo.