AF - Lista 04

Professor Marcos Leandro
Turma de Doutorado 2018

17 de Junho de 2018

1. Sejam E um espaço vetorial normado, $F \subset E$ um subespaço e $T \in \mathcal{L}(F, \ell^\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ tal que $\widetilde{T}$ é uma extensão de T a E e $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Solution: Seja $T \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$. Então T é linear,

$$\|Tx\|_\infty \leq |c|\|x\|_F, \forall x \in F, c \in \mathbb{K},$$

onde $\mathbb{K}$ é o corpo dos números reais ou complexos, e $T = (T_1, T_2, \cdots)$.
Note que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $T_i \in \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$, pois:

- T_i é linear
  Como T é linear, para todo $x, y \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

  $$T(x+\alpha y) = Tx + \alpha Ty \Rightarrow (T_1(x+\alpha y), T_2(x+\alpha y), \cdots) = (T_1x, T_2x, \cdots) + \alpha(T_1y, T_2y, \cdots)$$

  $$\Rightarrow (T_1(x+\alpha y), T_2(x+\alpha y) = (T_1x+\alpha T_1y, T_2x+\alpha T_2y, \cdots) \Rightarrow T_i(x+\alpha y) = T_ix+\alpha T_iy, \forall i \in \mathbb{N}$$

- T_i é limitada
  Como T é limitada, para cada $i \in \mathbb{N}$ e $x \in F$,

  $$|T_ix| \leq \sup_i |T_ix| = \|Tx\|_\infty \leq |c|\|x\|_F,$$

  onde $c \in \mathbb{K}$ é uma constante que depende de x.

Desta forma, pelo Teorema de Hahn-Banach (Corolário **1.2**, veja Brezis), existem extensões $\tilde{T}_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de T_i, para todo $i \in \mathbb{N}$, com $\|\tilde{T}_i\|_\infty = \|T_i\|_\infty$. Considere $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \cdots) : E \to \ell^\infty$.

Afirmação 1: $\tilde{T}$ está bem definida.
De fato, como $\tilde{T}_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, para cada $x \in E$,

$$\|\tilde{T}x\|_\infty = \sup_i |\tilde{T}_ix| \leq \sup_i |c|\|x\|_E = \sup_i |c|\|x\|_E < \infty.$$

Assim, mostramos que $\tilde{T}x \in \ell^\infty$.

Afirmação 2: $\tilde{T}$ é linear. Para todo $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\tilde{T}(x+\alpha y) = (\tilde{T}_1(x+\alpha y), \tilde{T}_2(x+\alpha y), \cdots) = (\tilde{T}_1x + \alpha\tilde{T}_1y, \tilde{T}_2x + \alpha\tilde{T}_2y, \cdots)$$

$$= (\tilde{T}_1x, \tilde{T}_2x, \cdots) + \alpha(\tilde{T}_1y, \tilde{T}_2y, \cdots) = \tilde{T}x + \alpha\tilde{T}y.$$

Afirmação 3: $\tilde{T}$ é limitada.
Pois, pelo que mostramos na afirmação 1, $\|\tilde{T}x\| \leq |c|\|x\|_F$.

Afirmação 4: $\tilde{T}$ é extensão de T.
Para todo $x \in F$,

$$\tilde{T}x = (\tilde{T}_1 x, \tilde{T}_2 x, \cdots) = (T_1 x, T_2 x, \cdots) = Tx.$$

Afirmação 5: $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
É claro que $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$, pois $T = \tilde{T}\mid_F$. Por outro lado,

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|\tilde{T}x\|_\infty = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \sup_i |\tilde{T}_i x| \leq \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \sup_i \|\tilde{T}_i\| \|x\|_E$$

$$= \sup_i \|\tilde{T}_i\| = \sup_i \|T_i\| = \sup_i \sup_{x \in F, \|x\|_F \leq 1} |T_i x|.$$

Mas,

$$\|T\| = \sup_{x \in F, \|x\|_F \leq 1} \|Tx\|_\infty = \sup_{x \in F, \|x\|_F \leq 1} \sup_i |T_i x|,$$

e então obtemos que $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

2. Sejam E um espaço vetorial e G um subespaço fechado de E. Prove que:
   (a) Se $\dim G < \infty$, então G possui complemento topológico;
   (b) Se $\operatorname{codim} G < \infty$, então G possui complemento topológico.

Solution: (a) Seja $e_1, \cdots, e_n$ uma base de G. Então todo $x \in G$, pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ x_i \in \mathbb{K}.$$

Defina,

$$\begin{aligned} \varphi_i : G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Note que φ_i é contínua. Usando o Teorema de Hahn-Banach (Corolário **1.2**, veja Brezis), obtém-se uma extensão $\tilde{\varphi}_i$ definida em E e que extende φ_i.

Afirmação: $L = \bigcap_{i=1}^{n} (\tilde{\varphi}_i)^{-1}(0)$ é complemento topológico de G.

• L é fechado
Tome (x_n) em L tal que $x_n \to x$. Daí,

$$\varphi_i(x) = \lim \varphi_i(x_n) = \lim 0 = 0, \ \forall i.$$

Portanto, $x \in L$ e com isso L é fechado.

• $G \cap L = \{0\}$
Tome $x \in G \cap L$. Daí,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow x = \tilde{\varphi}_1(x) e_1 + \cdots + \tilde{\varphi}_n(x) e_n \Rightarrow x = 0e_1 + \cdots + 0e_n = 0$$

Portanto, $G \cap L = \{0\}$.

• $G + L = E$
Que $G + L \subset E$ é claro. Provemos que $E \subset G + L$.
Note que todo espaço vetorial possui uma base de Hamel (Exercício 1, lista 3). Considere $\mathcal{B}$ uma base de hamel de E que contenha $e_1, \cdots, e_n$, isso é possível pois basta completarmos esta com elementos de G. Denotemos $\mathcal{B}$ por $[e_i]_{i \in I}$, onde I é um conjunto de índices que contém $1, \cdots, n$.
Daí, $z \in E \Rightarrow \exists_m \ (x_i)_{i=1}^{n+p}$ e $\{e_i\}_{i=1}^{n+p} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$z = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) + x_{n+1} e_{n+1} + \cdots + x_{n+p} e_{n+p} =$$
$$x + (0e_1 + \cdots + 0e_n + x_{n+1} e_{n+1} + \cdots + x_{n+p} e_{n+p}) = x + y$$

Usando a definição de $\tilde{\varphi}$ e a forma de y, temos que $\tilde{\varphi}_i(y) = 0$ para $i = 1, \cdots, n \Rightarrow y = \bigcap_{i=1}^{n} (\tilde{\varphi}_i)^{-1}(0) = L$. Como $x \in G$, temos que $z \in G + L$.
Portanto L é complemento topológico.

(b) Suponha que $\dim \frac{E}{G} = n$ e $[e_1], \cdots, [e_n]$ uma base para $\frac{E}{G}$, onde $[e_i] = e_i + G$, para $i = 1, \cdots, n$. Note que,

$$E = span\{[e_1], \cdots, [e_n]\} = span\{e_1, \cdots, e_n\} + G \tag{1}$$

Defina L por $span\{e_1, \cdots, e_n\}$.
Afirmação: L é o complemento topológico de G.
Pelo item (a) temos que L possui um complemento topológico. L é fechado, pois $\dim L = n$. Segue de 1, das propriedades de espaço quociente, que $E = G + L$ e $G \cap L = \{0\}$. Portanto, (b) está verificada.

3. Sejam E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subseteq E$ tal que existe $x \in E$ satisfazendo a seguinte condição:
$$f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in E^*.$$
Prove que $(\|x_n\|)$ é limitada e que
$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

Solution: Como $f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in E^*$ segue que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Logo $\sup_n |f(x_n)| < \infty$. Defina $J_{x_n} : E^* \to \mathbb{R}$, por $J_{x_n}(f) = f(x_n)$. Temos $\|J_{x_n}\| = \|x_n\|$ (Corolário **1.4**, veja Brezis). Como $\sup_n |J_{x_n}(f)| = \sup_n |f(x_n)| < \infty$ e E^* é um espaço de Banach, segue do princípio da limitação uniforme que $\sup_n \|J_{x_n}\| = \sup_n \|x_n\| < \infty$, ou seja, (x_n) é limitada. Além disso,
$$|f(x_n)| \leq \|f\|.\|x_n\|,$$
para cada $f \in E^*$. Tomando o limite inferior, de ambos os lados, temos,
$$|f(x)| \leq \|f\|. \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \tag{2}$$
Novamente, pelo Corolário **1.4**, $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$, daí, tomando o sup de ambos os lados em 2, obtemos.
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

4. Seja $1 \leq p < \infty$, e seja $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ converge para cada $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^p$. Prove que $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Solution: Isto é equivalente a provar que o funcional $\phi : l^p \to \mathbb{R}$, definido por $\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$, é linear e continua e assim $\phi \in (l^p)^* = l^q$, com o que $(\eta_i) \in l^q$.

(a) Primeiro vamos ver que ϕ é linear: $\phi(\xi_1 + \lambda \xi_2) = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_1 + \lambda \xi_2)\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_1 \eta_i + \lambda \xi_2 \eta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_1 \eta_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \xi_2 \eta_i = \phi(\xi_1) + \lambda \phi(\xi_2)$. Para ver que ϕ é continuo vamos provar dois afirmações e conseguiremos que *phi* é fechada:

(b) Seja $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ uma sequencia tal que $\xi^n \to \xi$ em l^p quando $n \to \infty$, então existe uma subsequencia (ξ^{n_j}) de $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\forall n_j \in \mathbb{N}$ e $\forall i \geq 1$ $|\xi_i^{n_j}| \leq |\sigma_i|$ para algum $\sigma \in l^p$.

Para provar isso, como $\xi^n \to \xi$ em l^p temos $||\xi^n - \xi||_p \to 0$ e vai existir uma subsequencia (ξ^{n_j}) tal que $\sum_{j=1}^{\infty} ||\xi^{n_{j+1}} - \xi^{n_j}||_p = c < \infty$. Seja $\xi^{n_0} = 0$ e

$$\sigma_i = \sum_{j=0}^{\infty} |\xi_i^{n_{j+1}} - \xi_i^{n_j}|,$$

se consideramos a suma parcial $\sigma_i^N = \sum_{j=0}^{N} |\xi_i^{n_{j+1}} - \xi_i^{n_j}|$ e aplicamos a desigualdade de Minkowski teremos:

$$||\sigma^N||_p = \left\| \sum_{j=0}^{N} |\xi^{n_{j+1}} - \xi^{n_j}| \right\|_p \stackrel{Min}{\leq} \sum_{j=0}^{N} ||\xi^{n_{j+1}} - \xi^{n_j}||_p \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||\xi^{n_{j+1}} - \xi^{n_j}||_p \leq c + ||\xi^{n_1}||_p < \infty.$$

Então σ_i^N esta limitada uniformemente e pelo teorema da convergência dominada de series obtemos $||\sigma||_p = ||\lim_{N\to\infty} \sigma^N||_p \stackrel{CM}{=} \lim_{N\to\infty} ||\sigma^N||_p \leq c + ||\xi^{n_1}||_p$, logo $\sigma \in l^p$. Vemos que $\xi_i^{n_{N+1}}$ pode-se escrever como uma suma telescópica e:

$$|\xi_i^{n_{N+1}}| = \left| \sum_{j=0}^{N} \xi_i^{n_{j+1}} - \xi_i^{n_j} \right| \leq \sum_{j=0}^{N} |\xi_i^{n_{j+1}} - \xi_i^{n_j}| = \sigma_i^N \leq \sigma_i.$$

(c) Vamos ver agora que ϕ é um funcional fechado. Temos que se existe $(\xi^n) \subset l^p$ tal que $\xi^n \to \xi$, $\phi(\xi^n) \to \alpha$ implica $\xi \in Dom(\phi)$ e $\phi(\xi) = \alpha$ ($(\xi, \alpha) \in Graf(\phi)$), então $Graf(\phi)$ é fechado e ϕ vai ser fechada.

Seja $\xi^n \to \xi$ em l^p e $\phi(\xi^n) \to \alpha \in \mathbb{R}$. Pela parte (b) teremos que existe uma subsequencia (ξ^{n_j}) tal que $|\xi_i^{n_j}| \leq \sigma_i$ e também que a subsequencia converge pontualmente $\xi_i^{n_j} \to \xi_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo $\xi_i^{n_j}\eta_i \to \xi_i\eta_i$ e $|\xi_i^{n_j}\eta_i| \leq \sigma_i|\eta_i|$ $\forall i \in \mathbb{N}$, então podemos aplicar o teorema de convergência dominada pra series assim:

$$\alpha = \lim_{n_j\to\infty} \phi(\xi^{n_j}) = \lim_{n_j\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^{n_j}\eta_i \stackrel{CD}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n_j\to\infty} \xi_i^{n_j}\eta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\eta_i = \phi(\xi).$$

Logo $Graf(\phi)$ é fechado.

Por tanto, como l^p, $\mathbb{R}$ são espaços de Banach e ϕ é linear e fechada, pelo teorema do gráfico fechado temos que ϕ é continua e $\phi \in (l^p)^* = l^q$, com o que $\eta \in l^q$.

5. Sejam X, Y espaços de Banach e $(T_n) \subset \pounds(X, Y)$ tal que, para cada $x \in X$ a sequência $(T_n(x))$ é de Cauchy em Y. Mostre que $(\|T_n\|)$ é limitada.

Solution: Temos por hipótese que X, Y espaços de Banach, $(T_n) \subset \pounds(X, Y)$ e para cada $x \in X$ a sequência $(T_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em Y, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x) \in Y,$$

portanto

$$sup\|T_n(x)\| < \infty, \ para \ cada \ x \in X.$$

satisfazendo assim as hipóteses do principio da limitaçõ uniforme (PLU). Logo, pelo PLU temos que

$$\sup_n \|T_n\| < \infty$$

e segue que,

$$\|T_n\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

Portanto, $(\|T_n\|)$ é limitada.

6. Considere $P(\mathbb{R}) := \left\{p : p(x) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R}\right\}$ munido da norma $\|p\| = \max_i |a_i|$. Considere a sequencia $T_n : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada n, $T_n(p) = a_1 + ... + a_{n-1}$. Mostre que

   1. Para cada n, T_n é um funcional linear contínuo;
   2. Para cada $p \in P(\mathbb{R})$, $(\|T_n(p)\|)$ é limitada;
   3. $\sup_n \|T_n\| = \infty$ e conclua que $P(\mathbb{R})$ não pode ser um espaço de Banach.

Solution:

Teorema 1 *Seja T_n um funcional linear no espaço normado. T_n é continuo se e somente se T_n é limitado.*

Teorema 2 *Seja T_n uma sequencia de operadores lineares limitados $T_n : X \to Y$ de um espaço de Banach X num espaço normado Y tal que $(\| T_x \|)$ é limitado para cada $x \in X$, é dizer*

$$\| T_n x \| \leq c_x, \quad n = 1, 2, ... \tag{3}$$

onde c_x é um numero real. Então a sequencia das normas $\| T_n \|$ é limitada, isto é, existe um $c > 0$ tal que

$$\| T_n \| \leq c, \quad n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Observação 1 *O numero c_x em (6), varia, em geral, com x. O ponto essencial é que o c_x não depende de n*

Para resolver o exercício, vamos usar os teoremas anteriores, a idéia baseia-se na construção de uma sequencia de operadores lineares limitados em $P(\mathbb{R})$ que satisfaz (6) mas não (7) de modo que $P(\mathbb{R})$ não pode ser completo, isto é $P(\mathbb{R})$ não é Banach. Vamos mostrar que T_n é linear e limitado e pelo Teorema 1 T_n é continuo .

De fato, sejam $p, q \in P(\mathbb{R})$ assim $p = p(x) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i x^i$ e $q = q(x) = \sum_{i=1}^{N_q} b_i x^i$ com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Mas podemos escrever p e q da seguinte forma

$$p = p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \quad \text{com} \quad a_i = 0 \quad \text{se} \quad i > N_p$$

$$q = q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i \quad \text{com} \quad b_i = 0 \quad \text{se} \quad i > N_q$$

Então

$$p + q = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \quad \text{com} \quad a_i = 0 \quad \text{se} \quad i > N_p \quad \text{e} \quad b_i = 0 \quad \text{se} \quad i > N_q$$

- $T_n(p+q) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1}) = (a_1+\cdots+a_{n-1})+(b_1+\cdots+b_{n-1}) = T_n(p)+T_n(q)$
- $\alpha T_n(p) = \alpha(a_1 + \cdots + a_{n-1}) = \alpha a_1 + \cdots + \alpha a_{n-1} = T_n(\alpha p)$

Portanto T_n é linear. T_n é limitado. De fato, temos que $\mid a_i \mid \leq \max_i |a_i|$ então $\|a_1+\cdots+a_{n-1}\| \leq (n-1)\max_i |a_i|$ então $|T_n(p)| \leq (n-1) \parallel p \parallel$. Pelo teorema 1 temos que T_n é continua. Assim fica demostrada a) e b)

Além disso, para cada $p \in P(\mathbb{R})$ fixo, a sequencia $(|T_n(p)|)$ satisfaz (6), porque qualquer polinomio de grau N_p vai ter N_p coeficientes, então pela definição de T_n temos que

$$|T_n(p)| \leq N_p \max_i |a_i| = c_p$$

Mostremos que (T_n) não satisfaz (7), isto é, não existe c de modo que $\|T_n\| \leq c$ para todo n. Vamos escolher um polinomio em particular dado por

$$p = p(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$$

Então,$\|p\| = 1$ e

$$T_n(p) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n - 1 = (n-1)\|p\|$$

Portanto $\|T_n\| \geq \frac{|T_n(p)|}{\|p\|} = n - 1$, já que $\sup_n \|T_n\| \ = \infty$ porque é para todo n.Portanto $(\|T_n\|)$ não é limitada e assim $P(\mathbb{R})$ não é Banach.

7. Sejam $S_e : \ell^2 \Rightarrow \ell^2$ definido por

$$S_e(\xi_1, \xi_2, ...) = (\xi_2, \xi_3, ...)$$

e $T_n := S_e^n$. Encontre $\|T_n\xi\|$ e o operador de Banach-Steinhaus. Conclua que T_n não converge para T em $\mathcal{L}(\ell^2)$.

Solution: Primeiro note que

$$\begin{aligned}
T_1\xi &= (S_e)^1(\xi) = (\xi_2, \xi_3, \cdots), \\
T_2\xi &= (S_e)^2(\xi) = (\xi_3, \xi_4, \cdots), \\
&\vdots \\
T_n\xi &= (S_e)^n(\xi) = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).
\end{aligned}$$

Assim, para cada $\xi \in \ell^2$, temos que

$$\|T_n\xi\|_2 = \|(S_e)^n(\xi)\|_2 = \|(\xi_{n+j})_{j=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_{n+j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, temos que, para cada $\xi \in \ell^2$,

$$\|T_n\xi - 0\|_2 = \|(\xi_{n+j})_{j=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_{n+j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Portanto,

$$T_n\xi \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall \xi \in \ell^2,$$

pontualmente, T_n converge para o operador nulo.
Por outro lado, observe que

$$\|T_n\xi\|_2 = \|(\xi_{n+j})_{j=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_{n+j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2 \ \Rightarrow \ \|T_n\|_\infty \leq 1. \quad (5)$$

Agora, considere $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$ dado por

$$\xi_j = \begin{cases} 0 & , j < n \\ \frac{1}{2^{\frac{j-n}{2}}} & , j \geq n \end{cases} .$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n \xi\|_2 = \|(\xi_{n+j})_{j=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{n+j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right)^{\frac{1}{2}} = 1^2 = 1.$$

Assim, concluímos de (5) que $\|T_n\|_{\infty} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso nos mostra que a norma do operador de Banach-Steinhaus (limite da sequência (T_n)) deve ser igual a 1, já que as normas dos T_n são constantes iguais a 1, e a norma é um funcional contínuo. Desta forma, a sequência (T_n) não converge em $\mathcal{L}(\ell^2)$ (o operador de Banach-Steinhaus não existe), pois ela converge pontualmente para o operador nulo que tem norma zero (na norma de $\mathcal{L}(\ell^2)$).

8. Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in E$ tal que $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$ (x_0 é dito ponto de ressonâcia).

Solution: Teorema de Banach-Steinhaus: *Sejam E e F espaços de Banach e $(T_i)_{i \in I}$ uma família(não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F. Se, $\sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \forall\ x \in E$, então $\sup\limits_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$.*

Temos que $\sup\limits_{n} \|T_n\| = +\infty$, logo $\exists\ x_0 \in E$ tal que $\sup\limits_{n} \|T_n x_0\| = +\infty$, pois se não existisse teríamos que $\sup\limits_{n} \|T_n x\| < \infty, \forall\ x \in E$, mas pelo Teorema de Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n} \|T_n\| < \infty$. Contradição já que $\sup\limits_{n} \|T_n\| = +\infty$.

9. Sejam E, F espaços de Banach e $T, T_1, T_2, ... \in \mathcal{L}(E, F)$. Se $T_n(x) \to T(x)$ para cada $x \in E$, então para qualquer compacto $K \subset E$ tem-se que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| = 0,$$

ou seja, $T_n(x) \to T(x)$ uniformemente em K. **Dica:** Argumente por contradição.

Solution: Suponha por contradição que existe um compacto $K_0 \subset E$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K_0} ||T_n(x) - T(x)|| \neq 0$$

isto é $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{x \in K_0} ||T_n(x) - T(x)|| \geq \varepsilon$$

da mesma maneira pela definição de valor supremo $\exists x_0 \in K_0$ tal que

$$||T_n(x_0) - T(x_0)|| \geq \varepsilon.$$

Por outro lado temos que por hipótese temos $T_n(x) \to T(x)\ \ \forall x \in E$ o que é

$$||T_n(x) - T(x)|| < \varepsilon \quad \forall x \in E$$

e como $K_0 \subset E$ particularmente temos que

$$||T_n(x_0) - T(x_0)|| < \varepsilon \quad x_0 \in K_0$$

mas isto contradiz nossa suposição. Assim então, se demostra a proposição.

obs: Como $T(x) = lim_{n\to\infty} T_n(x)$, o Teorema de Banach-Steinhaus garanta a continuidade do operador, e conclui a demonstração

10. Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijetor, mostre que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1\|\xi\| \leq \|T\xi\| \leq C_2\|\xi\|, \ \forall \xi \in E.$$

Solution: Considere o seguinte corolário do Teorema da Aplicação Aberta:
Corolário: Sejam E, F Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijetivo. Então T^{-1} é contínua.
Vamos agora a resolução do exercício. Como T é contínua, existe $C_2 > 0$;

$$\| T\xi \| \leq C_2 \| \xi \|, \qquad \forall \xi \in E$$

Além disso, temos que T^{-1} é contínua pelo corolário. Logo

$$\| T^{-1}(\eta) \| \leq C_3 \| \eta \| \qquad \forall \eta \in F$$

Como T é bijetiva, temos que $\eta = T(\xi)$ para um único ξ em E. Assim,

$$\| T^{-1}(T\xi) \| \leq C_3 \| T\xi \|$$

ou seja,

$$\| \xi \| \leq C_3 \| T\xi \| \quad \forall \xi \in E (\text{pois T é bijetiva})$$

Em suma, temos que

$$\frac{1}{C_3} \| \xi \| \leq \| T\xi \| \leq C_2 \| \xi \| \qquad \forall \xi \in E$$

como queríamos.

11. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo e sobrejetivo.
    (a) Dada uma sequência (y_n) limitada em F, prove que existe uma sequência limitada (x_n) em E tal que $Tx_n = y_n$, para cada n.
    (b) Dada uma sequência (y_n) em F que converge para 0, prove que existe uma sequência (x_n) em E que converge para 0 e tal que $Tx_n = y_n$ para cada n.

Solution:

(a) Como (y_n) é limitada então existe $k > 0$ tal que $\|y_n\| \leq k$ para cada n, ou seja, $y_n \in B_k^F(0)$ para cada n.

Como $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é sobrejiva, pelo Teorema da Aplicação Aberta,

$$\exists c > 0; T(B_1^E(0)) \supset B_c^F(0)$$

Assim, $y_n \in B_k^F(0) \subset T(B_{\frac{k}{c}}^E(0)$ para cada n. Isto implica que

$$\exists x_n \in B_{\frac{k}{c}}^E(0);\ T(x_n) = y_n\ \forall n.$$

E mais, $\|x_n\| \leq \frac{k}{c}$ para cada n. Portanto, $(x_n) \subset E$ é limitada.

(b) $(y_n) \subset F$ e $y_n \longrightarrow 0$.

Note que $k_n := \|y_n\| \longrightarrow 0$. Como $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é sobrejetivo, pelo Teorema da Aplicação Aberta,

$$\exists c > 0;\ B_c^F(0) \subseteq T(B_1^E(0).$$

Mas $y_n \in B_{2k_n}^F(0) \subseteq T(B_{\frac{2k_n}{c}}^E(0))$ para cada n.

$\exists x_n \in B_{\frac{2k_n}{c}}^E(0)$ tal que $Tx_n = y_n$ para cada n e $\|x_n\| \leq \frac{2k_n}{c} \longrightarrow 0$.

Portanto, $x_n \longrightarrow 0$.

12. Sejam E, F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ injetivo. Mostre que $T^{-1} : Im(T) \Rightarrow E$ limitado se, e somente se, $Im(T)$ é fechado em F.

Solution: Mostremos inicialmente a implicação direta, isto é, $Im(T)$ é fechado em F, assumindo que $T^{-1} : Im(T) \to E$ é limitado. Tome uma sequência $(y_n) \subset Im(T)$, com $y_n \longrightarrow y$. Dessa forma existe uma sequência $(x_n) \subset E$ tal que:

$$T(x_n) = y_n. \tag{6}$$

O operador $T^{-1} : Im(T) \to E$ existe, pois $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e é injetivo. T^{-1}é limitado, isto é

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Agora observe que, para todo $\varepsilon > 0, \exists N$ tal que para $N < n, m$, tem-se:

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq M\|y_n - y_m\| < M\varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de cauchy em $E \Rightarrow \exists x \in E \quad \text{tal que} \quad x_n \longrightarrow x$, pois E é Banach. Tomando o limite em (6) com $n \to \infty$, obtemos: $T(x) = y \Rightarrow y \in Im(T)$. Assim $Im(T)$ é fechado. Agora para recíproca, utilizaremos o Teorema do Gráfico Fechado, observe que $Im(T)$ sendo um subespaço fechado de F, $Im(T)$ é Banach. $T : E \to F$ é linear contínuo. Se mostrarmos que o conjunto

$$\text{Graf}\left(T^{-1}\right) = \left\{(y,x); T^{-1}(y) = x\right\} \quad \text{é fechado,}$$

T^{-1} será contínuo, consequentemente limitado. Para tanto, tomemos uma sequência $(y_n, x_n) \in$ Graf(T^{-1}) com $(y_n, x_n) \longrightarrow (y, x)$. Dessa forma,

$$x_n = T^{-1}(y_n). \tag{7}$$

Aplicando T na igualdade em (7), e tomando o limite com $n \to \infty$ obtemos:

$$T(x_n) = y_n \Rightarrow T(x) = y \Rightarrow x = T^{-1}(y) \Rightarrow (y,x) \in \text{Graf}(T^{-1}).$$

O que mostra o resultado.

13. Mostre que o operador identidade $I_d : (C[0,1], \|.\|_1) \Rightarrow (C[0,1], \|.\|_\infty)$, definido por $I_d(\varphi) = \varphi$ é fechado, contudo não é limitado.

Solution: Ponha $E_1 := (C[0,1], \|.\|_1)$ e $E_2 := (C[0,1], \|.\|_\infty)$. Assim, desejamos estudar $Id : E_1 \to E_2$. Lembremos que $\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(t)|dt$ e que $\|\varphi\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |\varphi(t)|$, para cada $\varphi \in C[0,1]$.
Mostrar que $Id : E_1 \to E_2$ é fechado, significa mostrar que o seu gráfico, $Gr(Id)$, é fechado em $(E_1 \times E_2, \|.\|)$, onde $\|(\varphi, \psi)\| = \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_\infty$. Como em $E_1 \times E_2$ estamos considerando a topologia gerada pela norma $\|.\|$, temos que uma maneira equivalente de verificarmos que $Gr(Id)$ é fechado em $E_1 \times E_2$ é mostrarmos que o limite de toda sequência em $Gr(Id)$ convergente pertence a $Gr(Id)$. Seja pois

$$(\varphi_k, Id(\varphi_k)) \xrightarrow{k\to\infty} (\varphi, \psi) \ \in \ E_1 \times E_2, \tag{8}$$

onde $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C[0,1]$. Da definição de E_1, temos que $\varphi \in C[0,1] = Dom(Id)$. Resta então verificarmos que $\psi = Id(\varphi) = \varphi$. Ora, de (8) e da definição da norma em $E_1 \times E_2$, decorre que

$$\|\varphi_k - \varphi\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad e \quad \|Id(\varphi_k) - \psi\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\psi - \varphi\|_1 &= \int_0^1 |\psi(t) - \varphi(t)|dt \\
&\le \int_0^1 |\varphi_k(t) - \psi(t)|dt + \int_0^1 |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \\
&\le \|\varphi_k - \psi\|_\infty + \|\varphi_k - \varphi\|_1 \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\psi - \varphi\|_1 = 0$, e como $\|.\|_1$ é norma em $C[0,1]$, segue que $\psi = \varphi = Id(\varphi)$. Com isso, mostramos que o gráfico de $Id : E_1 \to E_2$ é fechado. Mostraremos agora que essa aplicação não é limitada (isso ocorre porque E_1 não é um espaço de Banach - vide Teorema da Aplicação aberta e exercício 9 da Lista 1).

Mostraremos que $Id : E_1 \to E_2$ não é limitada, exibindo uma sequência de elementos $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty \subset E_1$, todos com norma menor que ou igual a 1, mas que $\{\varphi_n = Id(\varphi_n)\} \subset E_2$ é ilimitado. Ponha então $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n, & se \ \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{3n}{2} - n^2 t, & se \ \ \dfrac{1}{2n} \le t \le \dfrac{3}{2n} \\ 0, & se \ \ \dfrac{3}{2n} \le t \le 1 \end{cases}$$

Neste ponto é instrutivo observar o gráfico de cada φ_n. Note que φ_n é bem definida e que é contínua em $[0,1]$. Temos portanto $\{\varphi_n\} \subset E_1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_1 &= \int_0^{1/2n} ndt + \int_{1/2n}^{3/2n} (\frac{3n}{2} - n^2 t)dt \\
&= n\left(\frac{1}{2n} - 0\right) + \frac{3n}{2}\left(\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{n^2}{2}\left(\left(\frac{3}{2n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2n}\right)^2\right) \\
&= 1/2 + 9/4 - 3/4 - 9/8 + 1/8 \\
&= 1
\end{aligned}$$

No entanto, vê-se facilmente que $\|\varphi_n\|_\infty = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, mostrando que $Id(\varphi_n)$ é ilimitada. Portanto, Id é não limitado.

14. Sejam $Y = C[0,1]$ e X o subespaço de funções $f \in C[0,1]$ que são continuamente deriváveis em $C[0,1]$ ($f'(0)$ e $f'(1)$ são derivadas laterais). Se $T : X \longleftrightarrow Y$ é definido por $Tf = f'$, mostre que:
   (a) T é um operador linear descontínuo;
   (b) o gráfico de T é fechado em $X \times Y$;
   (c) explique porque as conclusões dos itens (a) e (b) não contradizem o Teorema do gráfico fechado.

Solution:

(a) Para mostrar que T é descontinuo basta mostrar que não é limitado, isto é, que existe $f \in X$ tal que para toda constante $c < 0$ cumpre-se que $|T(f)| > c||f||$. Seja $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$, assim $||f_n||_\infty = 1$, mas $||T(f_n(x))||_\infty = ||f'_n(x)||_\infty = ||nx^{n-1}||_\infty = n$, portanto encontramos um elemento de $C^1[0,1]$ tal que para toda constante $c \leq 0$ cumpre-se $||T(f_n)|| = n > c * 1 = c||f_n||$ para todo $n \geq 1$.

(b) Vamos tomar uma sequência convergente no gráfico de T e ver que converge para um elemento no gráfico de T. Seja $(f_n, T(f_n)) \in Graf(T)$, tal que $(f_n) \subset C^1([0,1])$ com $f_n \to f$ e $T(f_n) = f'_n \to g$ na norma $|| \cdot ||_\infty$, isto é, $\sup_n |f_n - f| \longrightarrow 0$ e $\sup_n |f'_n - g| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, isto quer dizer que $f_n \to f$ e $T(f_n) = f'_n \to g$ na convergência uniforme, logo $g = f'$. O teorema fundamental do cálculo nos disse que

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f'_n(s)ds;$$

passando o limite quando n vai para o infinito temos

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds;$$

que novamente pelo teorema fundamental do cálculo implica que $f \in C^1([0,1])$.

(c) As conclusões dos itens anteriores não contradizem o teorema do gráfico fechado, pois o espaço $(C^1([0,1]), || \cdot ||_\infty)$ não é Banach, de fato não é completo

Lema 1 *O espaço das funções continuamente deriváveis em* $[0,1]$ *munido da norma do infinito,* $(C^1([0,1]), || \cdot ||_\infty)$*, não é Banach.*

Demonstração 1 *Sabemos que* $C^1([0,1]$ *é subespaço de* $C([0,1])$*, que é Banach munido da norma* $|| \cdot ||_\infty$*, então só resta mostrar que* $C^1([0,1])$ *não é fechado, mas o teorema de Stone-Weierstrass garanta que quaisquer subálgebra (neste caso* $C^1([0,1])$*) de um espaço compacto de Hausdorff (neste caso* $C([0,1])$*) que contenha a função constante* 1 *e que separe pontos é densa neste caso em* $C([0,1])$*, portanto* $C^1([0,1])$ *não é fechado e assim não é Banach.*

15. Enuncie o Teorema da Aplicação aberta e dê exemplos mostrando que, em geral as hipóteses não podem ser enfraquecidas.

Solution: TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA(T.A.A): Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear contínuo de E em F ($T \in \mathcal{L}(E,F)$) que é sobrejetivo. Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Obs: Em outras palavras o Teorema diz que a imagem pela T de um conjunto aberto em E é um conjunto aberto em F (justificando o nome do Teorema).

As Hipóteses do Teorema da Aplicação aberta são:

i) T é Sobrejetivo;

ii) E é Banach;

iii) F é Banach;

iv) T linear;

Contra-exemplos:

i) Se retirarmos a hipótese de T ser sobrejetiva no T.A.A. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & T(x_1, x_2) = (x_1, 0) \end{array}$$

Temos que $\mathbb{R}^2$ é Banach, T é linear e T é contínua. Além disso T não é sobrejetiva pois suas imagens não são todo $\mathbb{R}^2$.

Tome a bola aberta $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. $T(B(0,1)) = (-1,1)$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$. Logo T não é aberto.

ii) Se retirarmos a hipótese de E ser Banach no T.A.A.

Sejam $P[0,1]$ o conjunto dos polinômios e considere o espaço normado $E = (P[0,1], ||\cdot||_\infty)$. E não é completo pois, basta tomar a sequência em E $P_n = (x^2 + \frac{3}{n})$ que é de Cauchy, pois,

$$||P_n - P_m|| = ||x^2 + \frac{3}{n} - x^2 - \frac{3}{m}|| = ||\frac{3}{n} - \frac{3}{m}|| \to 0.$$

e a sequência P_n converge para $||x||$, que não pertence E. Assim, E não é Banach.

Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} Id : (P[0,1]||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (C[0,1], ||\cdot||_\infty) \\ p & \longmapsto & Id(p) = p \end{array}$$

Temos que $(C[0,1], ||\cdot||_\infty)$ é Banach $(Ex10; lista1)$. Id linear, sobrejetiva e contínua.

Tome a bola aberta $B(0,1) \subset E$, assim $x \in B(0,1)$ implica que $\{x = x(t) \in P[0,1]| \, ||f(t) - 0||_\infty < 1\}$. Além disso, $||x(t)||_\infty = sup_{t\in[0,1]}|x(t)| = 1$. E por fim $T(B(0,1)) = 1$ que não é aberto.

iii) Se retirarmos a hipótese de F é Banach no T.A.A;

Sejam $E = (l_1 = \{x = (x_1, x_2, \ldots)| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}, ||\cdot||_1)$ e $F = (Im(l_1) \subset l_1, ||\cdot||_1)$, onde $||x||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. E é um espaços de Banach $(Ex.11, Lista1)$. Defina a aplicação,

$$\begin{array}{rcl} T : l_1 & \longrightarrow & Im(l_1) \\ (x_1, x_2, \ldots & \longmapsto & (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots) \end{array}$$

T é sobrejetiva pois pois o contradominio é a própria imagem. T é linear pois, sejam $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ em E e $\alpha \in \mathbb{F}$, temos

$$\begin{array}{rcl} T(x + \alpha y) = T(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \ldots) & = & (x_1 + \alpha y_1, \frac{x_2 + \alpha y_2}{2}, \ldots) \\ & = & (x_1 + \alpha y_1, \frac{x_2}{2} + \alpha \frac{y_2}{2}, \ldots) \\ & = & (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots) + (\alpha y_1, \alpha \frac{y_2}{2}, \ldots) \\ & = & T(x) + \alpha T(y). \end{array}$$

Vamos agora mostrar que $F, ||\cdot||_1$ não é Banach. Para isso considere as sequências em F

$$S_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$S_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$$

$$S_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0 \ldots)$$
$$S_4 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0 \ldots)$$
$$\vdots$$

(S_n) é uma sequencia de Cauchy pois, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq n_0$, temos

$$||S_m - S_n||_1 \leq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

No entanto, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente. Suponha por absurdo que fosse convergente, então teria que convergir para $S = (a_1, a_2, \ldots)$, onde necessariamente $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pois, Para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ temos que $||a_n - \frac{1}{n}|| \leq ||s - s_n||$ e $\lim_{m\in\mathbb{N}} ||s - s_n|| = 0$. Mas $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \notin l_1$ pois, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente. Assim F não é completo.

Agora tome uma bola aberta em l_1, ou seja, $\{x \in l_1 | \; ||x - 0||_1 < 1\}$, assim temos,

$$T(B(0,1)) = T(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|) = \sum_{i=1}^{\infty} T(|x_i o|) = \sum_{i=1}^{\infty} |\frac{x_i}{i}| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i},$$

em que a ultima série diverge. Portanto a imagem da bola aberta, não pertence a F.

iv) Se retirarmos a hipótese de T ser linear no T.A.A.

Sejam E e F Espaços de Banach com a norma usual e $x_0 \in F$. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T : (E, || \cdot ||) & \longrightarrow & (x_0, || \cdot ||) \\ x & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

Temos que E é Banach, x_0 é Banach. T é contínua, pois para todo $x \in E$ vai existir um $C > 0$ tal que $||x_0|| \leq C||x||$. Temos também que T não linear, Pois $T(x) + T(y) = x_0 + x_0$ e $T(x + y) = x_0$.

Tome a bola aberta $B(0,1) \subset E$. $T(B(0,1)) = x_0$ que não é aberto.

16. Calcule os operadores adjuntos dos seguintes operadores:
   (a) $S_d \in \mathcal{L}(\ell^1)$ definido por $S_d(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$;
   (b) $T \in \mathcal{L}(\ell^1, c_0)$ (prove isto) definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, ...) = \left(\sum_{j\geq 1}^{\infty} \xi_j, \sum_{j\geq 2}^{\infty} \xi_j, \sum_{j\geq 3}^{\infty} \xi_j, ... \right).$$

Solution: (a)Primeiramente, temos a seguinte "igualdade": $l_1^* = l_\infty$.
O operador adjunto de S_d é dado por $S_d^* : l_1^* = l_\infty \longrightarrow l_1^* = l_\infty$, tal que

$$\langle S_d(f), (\xi_i)_i \rangle = \langle f, S_d((\xi_i)_i) \rangle \;\; \forall f \in l_1^* \;\; e \;\; (\xi_i)_i \in l_1$$

pela correspondência entre $l_1^* = l_\infty$, temos que para cada $(a_i)_i \in l_\infty$ existe um único funcional $f \in l_1^*$ dado por $f(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$.
Assim, temos que,

$$\langle S_d^*(f),(\xi_i)_i\rangle = \langle f, S_d((\xi_i)_i)\rangle = f(0,\xi_1,\xi_2,\dots) = a_1 0 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + \dots = Tf((\xi)_i)$$

onde

$$\begin{aligned} T \ :\ & l_1^* \longrightarrow l_1^* \\ & f \longmapsto T(f) : l_1 \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

de modo que $T(f)((\xi)_i) = a_1 0 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + \dots$. Onde cada funcional f é dado na forma $f(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\xi_i$, com $(a_i)_i \in l_\infty$.
Como $\langle S_d^*(f),(\xi_i)_i\rangle = Tf((\xi)_i)\ \forall(\xi_i)_i \in l_1\ \ e\ \ \forall f \in l_1^*$, temos que $S_d^* \equiv T$. É possível utilizar a correspondência $l_1^* = l_\infty$ para obtermos uma aplicação $S_d^* : l_\infty = l_1^* \longrightarrow l_\infty = l_1^*$ definida em l_∞. Para ver isso, observe que a aplicação que da a correspondência de l_1^* sobre l_∞ é dado por $f \longmapsto (f(e_i))_{i=1}^{\infty}$, onde e_i é a base "canônica"de l_1. Assim,

$$S_d^*(a_1,a_2,a_3,\dots) = (a_2,a_3,a_4,\dots)$$

(b)Primeiramente, temos a seguinte "igualdade": $c_0^* = l_1$ e $l_1^* = l_\infty$.
Mostraremos primeiro que, $T \in \mathcal{L}(l_1,c_0)$. Para isso, observe que para qualquer $(\xi_i)_i \in l_1$, temos

$$\frac{\| T((\xi_i)_i) \|}{\| (\xi_i)_i \|} = \frac{\| (\sum_{i\geq 1}^{\infty}\xi_i, \sum_{i\geq 2}^{\infty}\xi_i,\dots) \|}{\| (\xi_i)_i \|} = \frac{\sup_{j\in\mathbb{N}} \| \sum_{i\geq j}^{\infty}\xi_i \|}{\| (\xi_i)_i \|} = \frac{\| \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i \|}{\| (\xi_i)_i \|} \leq 1 \tag{9}$$

Logo, temos que $T \in \mathcal{L}(l_1,c_0)$
O operador adjunto de T é dado por $T^* : c_0^* = l_1 \longrightarrow l_1^* = l_\infty$, tal que

$$\langle T^*(u),(\xi_i)_i\rangle = \langle u, T((\xi_i)_i)\rangle\ \ \forall u \in c_0^*\ \ e\ \ (\xi_i)_i \in l_1$$

pela correspondência entre $c_0^* = l_1$, temos que para cada $(a_i)_i \in l_1$ existe um único funcional $u \in c_0^*$ dado por $u(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\xi_i$.
Assim, temos que,

$$\begin{aligned} \langle T^*(u),(\xi_i)_i\rangle = \langle u, T((\xi_i)_i)\rangle = u(\sum_{i\geq 1}^{\infty}\xi_i, \sum_{i\geq 2}^{\infty}\xi_i,\dots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j\geq i}^{\infty}\xi_i = a_1(\xi_1+\xi_2+\dots) + \\ +a_2(\xi_2+\xi_3+\dots) + a_3(\xi_3+\xi_4+\dots) + a_4(\xi_4+\xi_5+\dots) + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

Reorganizando o final da equação (10), temos que

$$\langle T^*(u),(\xi_i)_i\rangle = \langle u, T((\xi_i)_i)\rangle = a_1\xi_1 + (a_1+a_2)\xi_2 + (a_1+a_2+a_3)\xi_3 + \dots = A(u)((\xi_i)_i)$$

onde

$$\begin{aligned} A \ :\ & c_0^* \longrightarrow l_1^* \\ & u \longmapsto A(u) : l_1 \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

de modo que $A(u)((\xi)_i) = a_1\xi_1 + (a_1+a_2)\xi_2 + (a_1+a_2+a_3)\xi_3 + \dots$. Onde cada funcional u é dado na forma $u(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\xi_i$, com $(a_i)_i \in l_1$. Como $\langle T^*(u),(\xi_i)_i\rangle = A(u)((\xi)_i)\ \forall(\xi)_i \in l_1\ \ e\ \ \forall u \in c_0^*$. Temos que, $A \equiv T^*$. É possível utilizar a correspondência $c_0^* = l_1$ para obtermos uma aplicação de l_1 sobre l_∞. Para ver isso, observe que a aplicação que faz a correspondência de c_0^* sobre l_1 é dado por $u \mapsto (u(e_i))_{i=1}^{\infty}$. Logo, obtemos a aplicação de c_0^* sobre l_∞, dado por.

$$A(a_1,a_2,a_3,\dots) = (a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3,\dots)$$

17. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$K \in L^2(\Omega \times \Omega), \quad K(x,y) = K(y,x), \ x, y \in \Omega,$$

mostre que para cada $u \in L^2(\Omega)$ a expressão

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \quad x \in \Omega,$$

define um operador linear limitado, auto-adjunto $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Qual a expressão do adjunto?

Solution: Tome $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in L^2(\Omega)$. Para $x \in \Omega$, vale

$$A(\alpha u)(x) = \int_\Omega K(x,y)(\alpha u)(y)dy = \alpha \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = \alpha A(u(x))$$

e

$$A(v+u)(x) = \int_\Omega K(x,y)(v+u)(y)dy = \int_\Omega K(x,y)v(y)dy + \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = A(v)(x) + A(u)(x).$$

Daí, podemos afirmar que A é linear. Agora, usando a desigualdade de Holder, temos

$$|Au(x)|^2 \leq \left(\int_\Omega |K(x,y)| \, |u(y)| \, dy \right)^2 \leq \int_\Omega |K(x,y)|^2 \, dy \int_\Omega |u(y)|^2 \, dy = \int_\Omega |K(x,y)|^2 \, dy \, \|u\|_2^2 \, .$$

Integrando os dois membros com respeito a x segue que

$$\int_\Omega |Au(x)|^2 \, dx \leq \|u\|_2^2 \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2 \, dydx = \|u\|_2^2 \, \|K(x,y)\|_{2\times 2}^2 < \infty.$$

Isto implica que A está bem definida, ou seja, $A(u(x)) \in L^2(\Omega)$. Além disso, A é contínua pois

$$\frac{\|Au(x)\|_2^2}{\|u\|_2^2} \leq \|K(x,y)\|_{2\times 2}^2 \Longrightarrow \|A\|_2 \leq \|K(x,y)\|_{2\times 2} \, .$$

Como A é linear e L^2 é reflexivo vale, respectivamente, as igualdades $D(A) = L^2 = (L^2)^*$. Daí, tem-se que A é densamente definida e, portanto, podemos introduzir o operador auto-adjunto $A^* : D(A^*) \subset L^2 \longrightarrow L^2$. Note que, a partir da linearidade do operador A temos $D(A^*) = L^2$. De fato, pois para todo $v \in L^2$ vale

$$|v(A(u))| \leq \|v\|_2 \, \|A(u)\|_2 \leq \|v\|_2 \, \|A\| \, \|u\|_2 = C \, \|u\| \, ,$$

onde $C = \|v\|_2 \, \|A\|$ é uma constante. Defina A^* da seguinte maneira

$$A^*v(x) = \int_\Omega K(x,y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Note que L^2 é um espaço de Hilbert e portanto cada funcional $v \in L^2$ age em L^2 por meio do seguinte produto interno

$$\langle v, u \rangle = \int_\Omega v(x)u(x)dx, \qquad \forall u \in L^2,$$

ou seja, $v(u(x)) = \langle v, u \rangle$. Partindo disso, da definição dada em (11), do fato $K(x,y) = K(y,x)$ para todo $x, y \in \Omega$ e do teorema de Fubini, temos

$$(A^*v)(u) = \langle A^*v, u \rangle = \int_\Omega \int_\Omega K(x,y)v(y)dy \; u(x)dx = \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(y)u(x)dydx =$$

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(y,x)v(y)u(x)dydx = \int_{\Omega\times\Omega} K(y,x)v(y)u(x)dxdy =$$

$$\int_\Omega v(y) \int_\Omega K(y,x)u(x)dxdy = \langle v, Au \rangle = (v)(A(u)).$$

Assim, podemos afirmar que o operador A^* definido em (11) é o adjunto de A.

18. Sejam E, F espaços de Banach e $A : D(A) \subseteq E \Rightarrow F$ um operrador linear não limitado, densamente definido. Mostre que:
   (a) $A^* : D(A^*) \subseteq F^* \Rightarrow E^*$ é fechado,
   (b) se $D(A) = E$ então $A^* : F^* \Rightarrow E^*$ é contínuo.

Solution:

(a) Devemos mostrar que o gráfico de A^* dado por

$$Gr(A^*) = \{(v, A^*v) : v \in D(A^*)\} \subset F^* \times E^*$$

é fechado em $F^* \times E^*$. Como este é um espaço métrico, isso é equivalente a mostrarmos que $Gr(A^*)$ é sequencialmente fechado, ou seja, que toda sequência em $Gr(A^*)$ que converge tem seu limite ainda em $Gr(A^*)$. Considere então

$$Gr(A^*) \ni (v_n, A^*v_n) \xrightarrow{n\to\infty} (v, f) \in F^* \times E^*.$$

Assim,

$$\|v_n - v\|_{F^*} + \|A^*v_n - f\|_{E^*} = \|(v_n, A^*v_n) - (v, f)\|_{\{F^* \times E^*\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{12}$$

Daí, temos que $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$ em F^*, o que nos dá

$$\langle v_n, Au\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A). \tag{13}$$

De (12) temos também que $A^*v_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ em E^*, o que por sua vez nos dá

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, u\rangle, \quad \forall u \in D(A) \tag{14}$$

De (13) e (14), juntamente com a unicidade do limite (em espaço métrico), segue que

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle, \quad \forall u \in D(A).$$

Isso mostra que

$$|\langle v, Au\rangle| = |\langle f, u\rangle| \leq \|f\|\|u\| \quad \forall u \in D(A),$$

o que implica v pertencer ao domínio de A^*, e mostra também que $f = A^*v$, uma vez que $\overline{D(A)} = E$.

(b) Como F^* e E^* são espaços de Banach e, pelo item (a), $A^* : D(A^*) \subset F^* \to E^*$ é fechado, se mostrarmos que $D(A^*) = F^*$, temos como consequência do Teorema do Gráfico Fechado que $A^* : F^* \to E^*$ é contínuo. Ora,

$$f \in F^* \Rightarrow |\langle f, Au\rangle| \leq \|f\|\|Au\| \leq \|f\|\|A\|\|u\|, \quad \forall u \in D(A) = E.$$

Como $\|f\|, \|A\|$ são finitos, segue que $f \in D(A^*)$. Logo, $F^* \subset D(A^*) \subset F^*$, e portanto, $D(A^*) = F^*$, como queríamos.

19. Sejam E um espaço de Banach e $\varphi : E \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ convexa e simcontínua inferiormente. Seja $x_0 \in IntD(\varphi)$. Prove que:

(a) Existem M e R tal que

$$\varphi(x) \leq M \qquad \forall x \in E \textit{ tal que } \|x - x_0\| \leq R.$$

(b) Para todo $r \leq R, \exists L \geq 0$ tal que

$$| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) | \leq L \mid x_1 - x_2 \mid \qquad \forall x_1, x_2 \in E; \|x_i - x_0\| \leq r, i = \{1, 2\},$$

mais precisamente $L = \frac{2[M - \varphi(x_0)]}{R - r}$

Solution: Sem perca de generalidade faça $x_0 = 0$. Defina $F_n = \{x \in E : \|x\| \leq \rho \ \ e \ \varphi(x) \leq n\}$. Desta forma temos que

$$\cup_n^\infty F_n = D(\varphi).$$

Logo pelo teorema de Baire $\exists n_0$ tal que $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Tome $x_1 \in E$ e $R > 0$ tal que $B(x_1, R) \subset F_{n_0}$. Assim se $x \in E$ com $\|x\| \leq \frac{R}{2}$, e escreva $x = \frac{1}{2}(x_1 + 2x) + \frac{1}{2}(-x_1)$. Sendo φ convexa concluimos que $\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2}(x_1 + 2x) + \frac{1}{2}(-x_1) \leq \frac{1}{2}n_0 + \frac{1}{2}\varphi(-x1)$. Faça $M = \frac{1}{2}n_0 + \frac{1}{2}\varphi(-x1)$ e temos o resultado.

(b)

Tome $y \in E$ com $\|y\| = R$ e $x_2 = tx_1 + (1-t)y$, com $t \in (0, 1)$. Assim

$$\varphi(y) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)M,$$

com isto $\varphi(y) - \varphi(x_1) \leq (1-t)[M - \varphi(x_1)]$. Mas $y - x_1 = (1-t)$ e $\|y - x_1\| \geq (1-t)(R-r)$. Daí

$$\varphi(y) - \varphi(x_1) \leq \frac{\|y - x_1\|}{R - r}.[M - \varphi(x_1)], \qquad (I)$$

fazendo $y = x_0 = 0$, obtemos que $t\|x_1\| = (1-t)R$, mas

$$(1-t) = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\| + R} \leq \frac{1}{2},$$

segue-se que $\varphi(0) - \varphi(x_1)\varphi \leq \frac{1}{2} - \varphi(x_1)]$, de modo que $M - \varphi(x_1) \leq 2[M - \varphi(0)] = 2[M - \varphi(x_0)] \Rightarrow \{M - \varphi(x_1) \leq 2[M - \varphi(x_0)]\}(II)$.

De (I) e (II)

$$\mid \varphi(y) - \varphi(x_1) \mid \leq \frac{\|y - x_1\|}{R - r}.2[M - \varphi(x_0)],$$

com $L = \frac{2[M - \varphi(x_0)]}{R - r}$.

20. Sejam E e F dois espaços de Banach e $(T_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$. Assuma que para todo $x \in E$, $T_n x$ converge, quando $n \to \infty$, para o limite denotado por Tx. Mostre que se $x_n \to x$ em E, então $T_n x_n \to Tx$ em F.

Solution: Observe que:

$$\|T_n x_n - Tx\|_F = \|(T_n x_n - T_n x) + (T_n x - Tx)\|_F \leq \|(T_n x_n - T_n x)\|_F + \|(T_n x - Tx)\|_F .$$

Utilizando a linearidade de T_n, segue que:

$$\|T_n x_n - Tx\|_F \leq \|(T_n(x_n - x))\|_F + \|(T_n x - Tx)\|_F .$$

Perceba que como $T_n x$ converge, para cada x, implica que $\sup_n ||T_n x|| < \infty \ \forall x \in E$, logo pelo P.L.U, temos que existe $c > 0$, tal que $||T_n x|| \leq c||x|| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|T_n x_n - Tx\|_F \leq c\,\|x_n - x\|_F + \|(T_n x - Tx)\|_F .$$

Passando o limite, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x_n - Tx\|_F = 0$$

pois hipótese, $x_n \to x$ em E e $T_n x \to Tx$ para cada $x \in E$.

21. Sejam E e F espaços de Banach e $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ formas bilineares satisfazendo:

i) Para cada $x \in E$ fixo, a aplicação

$$\begin{array}{rcl}\psi_1 = a(x, \bullet) : F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \psi_1(y) = a(x,y) \text{ é contínua.}\end{array}$$

ii) Para cada $y \in F$ fixo, a aplicação

$$\begin{array}{rcl}\psi_2 = a(\bullet, y) : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi_1(y) = a(x,y) \text{ é contínua.}\end{array}$$

Prove que existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|.\|y\| \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Solution: Considere $\mathcal{H} = \{a(x,\bullet); x \in E, \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathcal{L}(F;\mathbb{R})$.
Por hipótese $\psi_2 = a(\bullet, y)$ é linear e contínua para cada $y \in F$, portanto, para todo $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ temos,

$$\|\psi_2(x)\| \leq \|\psi_2\|.\|x\| = \|\psi_2\| := C_y$$

Isto é,

$$\|a(x,y)\| \leq \|(a(\bullet, y)\|.\|x\| = \|a(\bullet, y)\| := C_y$$

Assim, a família $\mathcal{H}$ é pontualmente limitada e, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe uma constante C tal que

$$sup_{\|x\| \leq 1} sup_{\|y\| \leq 1} \|a(x,y)\| := C.$$

Segue da bilinearidade de a que $\|a(x,y)\| \leq C\|x\|.\|y\|$.

22. Brezis 2.8 Sejam E um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow E^*$ um operador linear satisfazendo

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in E.$$

Prove que T é limitado.

Solution: Seja $G(T) = \{(x, Tx); x \in E\}$ o gráfico de $T : E \longrightarrow E^*$.
Tome (x_n, Tx_n) uma sequência em $G(T)$ convergindo para um ponto $(x, f) \in E \times E^*$. Por hipótese sabemos que

$$\langle T(x_n - y), x_n - y\rangle \geq 0, \ \forall y \in E$$
$$\Longrightarrow \langle Tx_n - Ty), x_n - y\rangle \geq 0, \ \forall y \in E$$

Aplicando o limite quando $n \longrightarrow 0$, obtemos

$$\langle f - Ty), x - y\rangle \geq 0, \ \forall y \in E$$

Tomando $y = x - tz, \ t \in \mathbb{R}, z \in E$ segue que:

$$\langle f - T(x + tz), x - (x + tz)\rangle \geq 0, \ \forall y \in E$$

$$\Longrightarrow t\langle Tx - f, z\rangle + t^2\langle Tz, z\rangle \geq 0, \ \forall z \in E, \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \langle Tx - f, z\rangle \geq -t\langle Tz, z\rangle, \ \forall z \in E, \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow (Tx - f)(z) \geq -t\langle Tz, z\rangle, \ \forall z \in E, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow (Tx - f)(z) \geq \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall z \in E$$
$$\Longrightarrow (Tx - f)(z) = 0,\ \forall z \in E$$
$$\Longrightarrow (Tx - f) \equiv 0$$
$$\Longrightarrow Tx \equiv f$$

Portando a sequência $(x_n, Tx_n) \in G(T)$ converge para um ponto $(x, f) \in G(T)$. Assim $G(T)$ é fechado pois contem todos os seus pontos de aderência. Segue pelo Teorema do Gráfico Fechado que T é contínua.

23. **Brezis 2.11** Seja E um Espaço de Banach, $F = \ell^1$, e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T \circ S = I_F$, i.e. S possui inversa à direita de T.

Solution: Tome a base canônica de Hamel de $F = \ell^1$ dada por :

$$\beta_{\ell^1} = \{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$$

Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que existe $c > 0$, constante, tal que

$$T(B_E(0,1)) \supseteq B_{\ell^1}(0, c)$$

Agora seja e_n um elemento da bola $B_E(0, 1/c)$ tal que $T(e_n) = f_n$. Tome $y \in Span(f_n)_{n \geq 0}$, note que y pode ser escrita da forma $y = \sum_i y_i f_i$. Defina o operador S no conjunto $Span(f_n)_{n \geq 0}$ da seguinte forma:

$$S(y) = S\left(\sum_i y_i f_i\right) := \sum_i y_i e_i$$

Note que $Span(f_n)_{n \geq 0}$ é denso em ℓ^1. Para mostrar que S estende-se à uma aplicação linear limitada em ℓ^1, é suficiente mostrar que S é uniformemente contínua em $Span(f_n)_{n \geq 0}$. Com efeito,

$$\Big|S(\sum_i y_i fi)\Big| = \Big|\sum_i y_i ei\Big| \leq \sum_i |y_i ei| \leq \frac{1}{c}||y||_1$$

Portanto, $S \in \mathcal{L}(E, F)$. E de fato S é a inversa a direita de T, com efeito, para um arbitrário $y \in \ell^1$,

$$(T \circ S)(y) = T(S(y)) = T\left(\sum_i y_i e_i\right) = \sum_i y_i T(e_i) = \sum_i y_i f_i = y$$

E daí decorre que T admite inversa à direita, como queríamos demonstrar.