AF - Lista 03

Professor Marcos Leandro
Turma de Doutorado 2018

26 de Abril de 2018

1. **(O cubo de Hilbert)** Defina o conjunto U de sequências de números complexos por,

$$U := \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{C}, |a_k| \leq \frac{1}{k}\}.$$

Mostre que:

(a) $U \subset \ell_2$;

(b) Toda sequencia $(\xi_n) \subset U$ possui subsequencia convergente em ℓ_2;

(c) Se $e_n := (\delta_{in})_{i=1}^{\infty},\ n = 1, 2, ...,$ então toda subsequência da sequência $(a_n) \subset (e_n)$ diverge.

Solution:

(a) Seja $(a_k) \in U$ temos que

$$|a_k| \leq \frac{1}{k} \qquad k \in \mathbb{N},$$

como $0 \leq |a_k| \leq \frac{1}{k}$ temos

$$|a_k|^2 \leq \frac{1}{k^2}$$

Agora como $k \in \mathbb{N}$ podemos fazer

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

como a serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma p-serie com $p = 2$ é uma serie convergente assim

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Assim $(a_k) \in l_2$ logo então $U \subset l_2$

(b) Seja (ξ_n) uma sequência de sequências de U, que junto com a propriedade do cubo de Hilbert podemos ver como:

$$\begin{array}{lll} \xi_1 & = (x_1^1, x_2^1, \dots) & |x_n^1| \leq \frac{1}{n} \\ \xi_2 & = (x_1^2, x_2^2, \dots) & |x_n^2| \leq \frac{1}{n} \\ \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots \\ \xi_n & = (x_1^n, x_2^n, \dots) & |x_n^n| \leq \frac{1}{n}, \end{array}$$

assim por cada sequencia nas componentes das sequencias temos a propriedade

$$|x_1^n| \leq 1,\ \ |x_2^n| \leq \frac{1}{2}, \dots, |x_k^n| \leq \frac{1}{k}, \dots$$

logo então cada sequência de números complexos $(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \dots, (x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ definida em cada componente é limitada. Como uma sequência limitada definida nos complexos tem uma subsequência que converge, podemos dizer que para cada (x_k^n) $k = 1, 2, \dots$ existe uma subsequência que converge isto é

$$(x_1^{n_{s_1}}) \subset (x_1^n), \ \ (x_2^{n_{s_2}}) \subset (x_2^n) \ \ \dots \ \ (x_k^{n_{s_k}}) \subset (x_k^n)$$

onde

$$x_1^{n_{s_1}} \to x_1, \ \ x_2^{n_{s_2}} \to x_2 \ \ \dots \ \ x_k^{n_{s_k}} \to x_k$$

com $x_1, x_2 \dots x_k \in \mathbb{C}$ e $|x_k| \leq \frac{1}{k}$

Podemos agora definir a subsequência $(\xi_{n_s}) \subset (\xi_n)$ como

$$(\xi_{n_s}) = (x_1^{n_{s_1}}, x_2^{n_{s_2}}, \dots, x_k^{n_{s_k}})$$

pela construção anterior temos que a subsequência $(\xi_{n_s}) \to (\xi)$ converge, onde o limite vai ser

$$\xi = (x_1, x_2 \dots x_k, \dots)$$

claramente $(\xi) \in U$, já que $|x_k| \leq \frac{1}{k}$. Assim então temos o Item.

(c) Sejam e_m, e_s as sequências como na definição, para $m, s \in \mathbb{N}$, temos então

$$\begin{aligned} ||e_m - e_s|| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \xi_j^s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|1-0|^2 + |0-1|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

isto para quaisquer $m, s \in \mathbb{N}$, logo então (e_n) não é de Cauchy, assim então não existem subsequencias que sejam convergentes.

2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, o espaço X pode ser coberto por uma união finita de bolas de raio ϵ. Tenha como verdadeiro o fato de que X é compacto se, e somente se, X é totalmente limitado. Seja

$$c_0 = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} y_n = 0\},$$

munido com a norma $\|y\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$, onde $y = (y_n)$. Note que c_0 é um espaço de Banach. Tome $x = (x_n) \in c_0$ e considere o conjunto

$$S_x = \{(y_n) \in c_0 : \ |y_n| \leq |x_n|, \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que S_x é totalmente limitado e consequentemente compacto, com respeito a topologia forte.

Solution:

(a) Note que c_0 é um espaço de Banach. Seja uma sequencia de Cauchy em c_0, (y_n) tal que $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \ m, n \geq N$ temos $\|y_n - y_m\| < \epsilon$, i.e:

$$\max_{j \in \mathbb{N}} |y_n^j - y_m^j| < \epsilon, \tag{1}$$

para tudo $j \in \mathbb{N}$. Assim (y_n^j) é uma sequencia de Cauchy em $\mathbb{C}$ a qual converge pois $\mathbb{C}$ é completo. Seja $y_j = \lim y_n^j$ para tudo $j \in \mathbb{N}$ e defina $y = (y_1, y_2, \dots)$ a sequencia daqueles limites. Mostremos que $y \in c_0$ e $y_m \to y$.

Fazendo $n \to \infty$ na equação (1) obtemos

$$\max_{j\in\mathbb{N}}|y - y_m^j| < \epsilon,$$

para tudo $j \in \mathbb{N}$ e $m > N$. Logo $y_m \to y$ e $\lim_{j\to\infty} |y - y_m^j| = 0$, então $y - (y_m^j) \in c_0$. Como $(y_m^j) \in c_0$ e c_0 é um subespaço vetorial de L^∞, temos $y = (y - (y_m^j)) + (y_m^j) \in c_0$, assim $y_m \to y \in c_0$ e c_0 é m espaço de Banach.

(b) Mostre que S_x é totalmente limitado. Seja a distancia em c_0,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \max_{n\in\mathbb{N}}\|y^n - x^n\|,$$

obtendo (c_0, d) como espaço métrico. Dado $x \in c_0$ fixo, sejam $y \in S_x$, $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n| \leq \frac{1}{2^{j_n}} < \frac{\epsilon}{2},$$

usando $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Então para $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$ consideramos a seguente sequencia que sai de ignorar todos os índices $i > n$: $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$. Vemos que $y^* \in S_x$ pois $\lim_{n\to\infty} y^*_n = 0$ ($y^* \in c_0$) e como $|y_i| \leq |x_i|$ $\forall i \in \mathbb{N}$ então $|y^*_i| = |y_i| \leq |x_i|$ para $i = 1, \dots, n$ e $0 \leq |x_i|$ $\forall i \in \mathbb{N}$, logo $y^* \in S_x$. Assim, vamos ter

$$d(y, y^*) = \max_{i>n} |y_i| \leq \frac{1}{2^{j_n}} < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Temos que o conjunto dos y^* definidos acima formam um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$ pois $||y^*|| \leq ||x||$ para tudo y^*. Seja $r = 2||x||$, logo aquele conjunto esta contido num bloco $[-r, r]^n \subset \mathbb{R}^n$ e para $\epsilon/2$ consideremos todas as bolas $B_{\epsilon/2}(y^*_i)$ onde

$$y^*_i \in \left(\frac{\epsilon}{2}\mathbb{Z}\right) \cap [-r, r]^n.$$

Elas irão cobrir o bloco com um numero finito de bolas, o índice $i \in \mathbb{N}$ é menor igual do que $(4r/\epsilon)^n$. Então a união finita das bolas abertas, agora de radio ϵ (para garantir que y esteja contido na bola em virtude da equação (2)), cobre todo S_x:

$$S_x \subseteq \bigcup_i B_\epsilon(y^*_i).$$

Solution: SEGUNDA FORMA

Seja $I = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, observe que $I \subset l^\infty$, sendo assim, podemos considerar a norma induzida de l^∞, ou seja, dado $x \in I$, segue que $||x|| = \sup_i |x_i| = \max_i |x_i|$ pois $x_i \in [-1, 1]$. Defina:

$$\begin{aligned} T : I &\longrightarrow c_0 \\ y &\mapsto T(y) = (y_1x_1, y_2x_2, ...), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in c_0$

Afirmação:
a) T está bem definida;
b) $S_x = T(I)$;
c) F é continua.
Para verificar o item a), observe que :

$$\lim_{j\to\infty} (T(y))_j = \lim_{j\to\infty} (y_jx_j) = 0 \quad \forall y \in I$$

pois $|y_j| \leq 1$ e $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$, pois $(x_j)_j \subset c_0$.
Item b):
Mostraremos que $T(I) \subset S_x$ e $S_x \subset T(I)$.
Seja $a \in S_x \Longrightarrow a = (a_1, a_2, a_3, ...)$, $|a_n| \leq |x_n|$, temos que

$$a = (\frac{a_1}{x_1}x_1, \frac{a_2}{x_2}x_2, \frac{a_3}{x_3}x_3, ...) = T(z),$$

onde

$$z = (\frac{a_1}{x_1}, \frac{a_2}{x_2}, \frac{a_3}{x_3}, ...)$$

$\forall x_n \neq 0$, se $x_n = 0$ para algum n, implica que $a_n = 0$ e definimos $(z_n x_n) = 0$.
Note que $z \in I$ pois $|a_n| \leq |x_n|$. Logo $S_x \subset T(I)$. Agora tome $w \in T(I), \Longrightarrow w = (y_1x_1, y_2x_2, ...)$, onde $y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in I$. Observe que $|y_n x_n| = |y_n||x_n| \leq |x_n|$, pois $|y_n| \leq 1$, sendo asssim, $w \in S_x$. Então $S_x = T(I)$.
Item c)
Seja $y, z \in I$, como definimos anteriormente, $||x - y||_I = \max_j |x_j - y_j|$. Dado $\epsilon > 0$, tome $0 < \delta = \frac{\epsilon}{\max_j |a_j|}$, tal que $||x - y||_I = \max_j |x_j - y_j| < \delta$, então usando a linearidade de T

$$||T(z) - T(y)||_{c_0} = ||T(z - y)||_{C_0} = ||(z_1 - y_1,)x_1, (z_2 - y_2)x_2, (z_3 - y_3)x_3, ...||_{C_0}$$

$$= \max_j |(z_j - y_j)x_j| = \max_j |(z_j - y_j)| \max_j |x_j| < \epsilon.$$

Logo T é continua. Usando o Teorema de *Tychonoff* segue que o conjunto I é compacto, e como T é continua segue que S_x é compacto.

Para mostrar que S_x é totalmente limitado, perceba que mostramos que S_x é compacto, logo dada uma cobertura aberta de S_x podemos subtrair uma cobertura finita, sendo assim, vai existir $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset S_x$ tal que dado $\epsilon > 0$ $S_x = \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(a_i)$.

Observação:
Perceba que usamos a norma induzida do l^∞ para mostrar a continuidade de T, no entanto o mesmo resultado pode ser obtido utilizando a distancia induzida da norma standart de I que seria: dados $y, z \in I$ então $d(y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n} d_i(y_i, z_i)$, onde d_i é a distância no intervalo $[-1, 1]$.

3. Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, onde $1 < p < \infty$. Dado o funcional $f(x, y) = ax + by$, calcule a sua norma. (Sugestão: Use o método dos multiplicadores de Lagrange).

Solution: Considere $f \in (\mathbb{R}^2)^*$, como a dimensão do espaço é finita segue que quaisquer duas normas são equivalentes, assim podemos considerar a seguinte norma:

$$\|f\| = \max_{\|(x,y)\|_p = 1} |ax + by| = \max_{\|(x,y)\|_p = 1} ax + by. \tag{3}$$

Defina agora,

$$\begin{aligned} \varphi \quad & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &= |x|^p + |y|^p . \end{aligned}$$

Tome $x,\ y \neq 0$, logo

$$\nabla f(x, y) = (a, b)$$

$$\nabla \varphi(x, y) = \left(p\,|x|^{p-1}\,\tfrac{x}{|x|}, p\,|y|^{p-1}\,\tfrac{y}{|y|}\right) = \left(p\,|x|^{p-2}\,x, p\,|y|^{p-2}\,y\right). \tag{4}$$

Considere λ o multiplicador de Lagrange, assim

1. $p\,|x|^{p-2}\,x = \lambda a \implies |x|^{p-1} = \frac{|\lambda a|}{p} \implies |x|^p = \left(\frac{|\lambda a|}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$,

2. $p\,|y|^{p-2}\,y = \lambda b \implies |y|^{p-1} = \frac{|\lambda b|}{p} \implies |y|^p = \left(\frac{|\lambda b|}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}$.

Note que estamos considerando $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $|ax + by| = 1$, logo

$$|x|^p + |y|^p = 1 \implies \left(\frac{|\lambda a|}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\frac{|\lambda b|}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = 1 \implies \left|\frac{\lambda}{p}\right|^{\frac{p}{p-1}} \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right) = 1$$

$$\implies \frac{|\lambda|}{p} = \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-p}{p}} \implies |\lambda| = p\left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-p}{p}}.$$

Multiplicando a primeira igualdade de (1) por x e a primeira igualdade de (2) por y e depois somando ambas igualdades, obtemos

$$p\,|x|^{p-2}\,x^2 + p\,|y|^{p-2}\,y^2 = \lambda ax + \lambda by \implies p\,(|x|^p + |y|^p) = \lambda(ax + by).$$

Usando o fato que $\varphi(x, y) = 1$ segue que

$$\lambda(ax + by) = p \implies \lambda = \left(\frac{p}{ax + by}\right) \implies |ax + by| = \frac{p}{|\lambda|}.$$

Daí, temos

$$|ax + by| = \frac{1}{\left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1-p}{p}}} = \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Agora, analisemos f nos pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$, que foram excluídos da análise feita até então. Note que,

$$|f(1, 0)| = |a| \leq \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

e

$$|f(0, 1)| = |b| \leq \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Portanto,

$$\|f\| = \left(|a|^{\frac{p}{p-1}} + |b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

4. Dados números $p, q > 1$ satisfazendo $1/p + 1/q = 1$.
   (a) Mostre que existe uma isometria linear de ℓ_q sobre ℓ_p^*. Neste caso escreve-se $\ell_q = \ell_p^*$.
   (b) Conclua que $\ell_p^{**} = \ell_p$.
   (c) Seja $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((\xi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n/2}}.$$

   Calcule $\|f\|_{\ell^2}$.

Solution:

(a) Para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$ e cada $\eta = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$ arbitrariamente fixados, façamos

$$\phi(\xi) \cdot \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n,$$

ainda que não saibamos, de antemão, estar em posse de uma série convergente. Para cada inteiro $N \geq 1$ é fato que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |\xi_n \eta_n| &\leqslant (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{n=1}^{N} |\eta_n|^q)^{1/q} \quad \textit{(Des. de Holder)} \\
&= (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q)^{1/q} \\
&= \| \xi \|_p \cdot \| \eta \|_q ,
\end{aligned}$$

de onde nos é dado concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |\xi_n \eta_n| \leqslant \| \xi \|_p \cdot \| \eta \|_q < \infty,$$

e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ é, por esta razão, uma série absolutamente convergente, sempre que $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$ e $\eta = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$. Não apresentaremos aqui uma prova de que a correspondência $\phi(\xi) : l_q \ni \eta \longmapsto \phi(\xi) \cdot \eta \in \mathbb{K}$ define, para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$ arbitrariamente fixado, uma aplicação $\mathbb{K}$-linear, a qual possui pelos cálculos já apresentados, norma não excedente àquela de ξ, ou seja,

$$\| \phi(\xi) \| = \sup_{\eta \in l_q \setminus \{0\}} \frac{|\phi(\xi) \cdot \eta|}{\| \eta \|_q} \leqslant \| \xi \|_p .$$

Fica assim definido um operador $\mathbb{K}$-linear

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & l_p & \mapsto & l_q^* \\ & & \xi & \mapsto & \phi(\xi), \end{array}$$

o qual é contínuo e, como logo provaremos, uma isometria linear entre os espaços vetoriais normados $(l_p, \| \cdot \|_p)$ e $(l_q^*, \| \cdot \|_q)$. Dado $\psi \in l_q^*$, um funcional linear contínuo $\psi : l_q \to \mathbb{K}$ qualquer, façamos $\xi = (\psi(e_n))_{n=1}^{\infty}$, onde

$$\begin{array}{rcccl} e_n & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{K} \\ & & m & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se} \quad m = n, \\ 0 & \text{se} \quad m \neq n, \end{array} \right. \end{array}$$

(*observe que* $e_n \in l_q$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora vem a parte intrincada de nossa argumentação. Seja

$$\xi^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^{p-1} \cdot \mathrm{sinal}(\overline{\xi_n}) \cdot e_n$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, onde

$$\mathrm{sinal}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\lambda}{|\lambda|} & \text{se} \quad \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad \lambda = 0, \end{array} \right.$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. A melhor justificativa para esta escolha é a seguinte: $\xi^{(N)}$ é uma combinação $\mathbb{K}$-linear finita de vetores em l_q e por esta razão pertence ele próprio a l_q. Sendo assim, podemos aplicar ψ a $\xi^{(N)}$ para obter

$$\begin{aligned}
|\psi(\xi^{(N)})| &= | \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^{p-1} \cdot \mathrm{sinal}(\overline{\xi_n}) \cdot \psi(e_n)| \\
&= | \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^{p-1} \cdot \mathrm{sinal}(\overline{\xi_n}) \cdot \xi_n)| \\
&= | \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^{p-1} \cdot |\xi_n|| \\
&= \sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p ,
\end{aligned}$$

de onde podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p = |\psi(\xi^{(N)})| \leqslant \| \psi \| \cdot \| \xi^{(N)} \|_q,$$

pela pela continuidade de ψ. Note que

$$\begin{aligned}
\| \xi^{(N)} \|_q &= (\sum_{n=1}^{N} ||\xi_n|^{p-1} \cdot \text{sinal}(\overline{\xi_n})|^q)^{1/q} \\
&= (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&= (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p)^{1/q}, \quad \text{pois} \quad (p-1)q = p,
\end{aligned}$$

e assim, que

$$(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p)^{1/p} = (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p)^{1-1/q} \leqslant \| \psi \|$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos $\xi = (\psi(e_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p$ já que

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p)^{1/p} = \lim_{N\to\infty} (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^p)^{1/p} \leqslant \| \psi \| < \infty.$$

Afirmamos que $\psi = \phi(\xi)$. De fato, dada $\eta = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$, temos que

$$\eta^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \eta_n e_n \in l_q$$

e

$$\| \eta^{(N)} - \eta \|_q = (\sum_{n=N+1}^{\infty} |\eta_n|^q)^{1/q} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e portanto, que

$$\begin{aligned}
\psi(\eta) &= \lim_{N\to\infty} \psi(\sum_{n=1}^{N} \eta_n e_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \eta_n \psi(e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \\
&= \phi(\xi) \cdot \eta.
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\eta = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$ segue que $\psi = \phi(\xi)$. Observe que

$$\| \xi \|_p \leqslant \| \psi \| = \| \phi(\xi) \| \leqslant \| \xi \|_p,$$

nos garante que $\| \phi(\xi) \| = \| \xi \|_p$.

(b) Para todo par de números $1 \leqslant p, q \in \mathbb{R}$ que se relacionem pela equação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

temos

$$(l_p, \|\cdot\|_p) \overset{\phi}{\cong} (l_q^*, \|\cdot\|)$$

onde a isometria linear ϕ foi construída na primeira parte deste exercício. Podemos portanto, realizar as seguintes identificações:

$$\begin{cases} l_p &= l_q^*, \\ \xi &= \phi(\xi), \quad \forall\, \xi \in l_p, \\ \phi &= id_{l_p} : \xi \longmapsto \xi, \quad \forall\, \xi \in l_p, \\ \|\cdot\|_p &= \|\cdot\|_{l_q^*}. \end{cases}$$

Deste modo, é evidente que

$$l_p^{**} = (l_p^*)^* = l_q^* = l_p,$$

onde na segunda igualdade invertemos os papéis desempenhados por p e q na argumentação do item anterior.

(c) Para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ arbitrariamente fixado, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{|\xi_n|}{2^{n/2}} &\leqslant (\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n})^{1/2} \quad \textit{(Des. de Holder)} \\ &\leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n})^{1/2} \\ &= \|\ \xi\ \|_2 \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1) \\ &= \|\ \xi\ \|_2, \end{aligned}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ e portanto, que

$$|f(\xi)| = \lim_{N\to\infty} |\sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n}{2^{n/2}}| \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\frac{\xi_n}{2^{n/2}}| \leqslant \|\ \xi\ \|_2,$$

para todo $\xi = (\xi_n)_{n=1}\infty \in l_2$. Logo,

$$\|\ f\ \|_{l_2^*} = \sup_{\xi \in l_2 \setminus \{0\}} \frac{|f(\xi)|}{\|\ \xi\ \|_2} \leqslant 1.$$

Note entratanto, que

$$\begin{aligned} f((1/2^{\frac{n}{2}})_{n=1}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 1, \end{aligned}$$

de onde podemos perceber que $\|\ f\ \|_{l_2^*} = 1$.

5. Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear e $\dim \mathcal{N}_1 < \infty$. Mostre que T é limitado.

Solution:

Lema 1 *Seja $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um espaço de vetores linearmente independente de um espaço* *normado E. Então existe uma constante $c>0$, que depende do conjunto B, tal que:*

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n\|_E \geq c(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, ..., a_n$.

Prova.:
Lembremos que dado duas normas $||.||_a, ||.||_b$ em $\mathbb{R}^n$ existe uma constante $c > 0$ tal que $||x||_a \leq c||x||_b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como o corpo de escalares que estamos considerando é $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definimos a aplicação:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \in \mathbb{R}$$

É fácil ver que essa aplicação define uma norma em $\mathbb{K}^n$. Sendo assim, vai existir um $c > 0$ que verifica a desigualdade, pois $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_S = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$ (norma da soma). De posse do lema, prosseguimos com a prova do exercício.

Seja $\dim\mathcal{N}_1 = n < \infty$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base de $\mathcal{N}_1$, peguemos $x \in \mathcal{N}_1$, logo $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Como T é linear, segue que:

$$\|Tx\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|Te_i\|_2 \leq \max_j \left\{ \|Te_j\|_2 \right\} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

onde $\|.\|_2$ é a norma em $\mathcal{N}_2$. Como $\max_j \left\{ \|Te_j\|_2 \right\}$ é constante, preceisamos majorar $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Para isto, basta utilizar o Lema 1 e temos que existe uma constante $c > 0$, tal que: $\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) \leq \frac{1}{c} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|_1 = \|x\|_1$ para todo $x \in \mathcal{N}_1$. Então,

$$\|Tx\|_2 \leq A \, \|x\|_1 \,,$$

onde $A = \frac{1}{c} \max_j \left\{ \|Te_j\|_2 \right\}$. Portanto, T é limitado

6. Se todo operador linear $T : N \longrightarrow N$ é limitado. Mostre que $dim \ N < \infty$

Solution: Suponha que exista um espaço normado N de dimensão infinita, tal que todo operador linear $T : N \longrightarrow N$ seja limitado.

Seja $B = \{x_j\}_{j \in J}$ uma base de Hammel para N e $B' \subset B$ uma base enumerável.

Definiremos a aplicação linear $T : N \longrightarrow N$ por:

$$Tx_n = n.x_n \text{ se } x \in B'$$
$$Tx = 0 \text{ se } x \in B \backslash B'$$

T não é limitada, pois $\|Tx_n\|_N = n.\|x_n\|_N \ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo não existe constante $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c \parallel x \parallel \forall x \in N$.

Assim, quando o espaço normado N não é de dimensão finita podemos exibir um operador linear que não é limitado. O que contradiz a hipótese que N tem dimensão infinita.

Observação 1 *Seja $B = \{x_j\}_{j \in J}$ uma base de Hammel para o K-espaço normado N. Dado $x \in N$, existe $I \subset J$ finito e $k_i's \in K$ tais que*

$$x = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_sx_s$$

de forma única.

$T : N \longrightarrow N$ dado por $Tx = \sum_{i \in I} k_i T(x_i)$ é um operador linear.

De fato, sejam $x, y \in N$

$T(x)+T(y) = (k_1x_1+2k_2x_2+\ldots+sk_sx_s)+(r_1x_1+2r_2x_2+\ldots+sr_sx_s) = (k_1+r_1)x_1+2(k_2+r_2)x_2+\ldots+s(k_s+r_s)x_s = T(x+y)$

$T(\alpha x) = (k_1\alpha x_1+2k_2\alpha x_2+\ldots+sk_s\alpha x_s) = \alpha(k_1x_1+2k_2x_2+\ldots+sk_sx_s) = \alpha Tx.$

7. Seja $T : E = \{(\xi_n) \in l^p : \sum_n |n^2\xi_n|^p < \infty\} \to l^p$ onde $1 \leq p < \infty$, definido por $T(\xi) := (n^2\xi_n)$. Prove que T não é um operador limitado.

Solution: Mostrar que T é limitado é o mesmo que mostrar que T é contínua. T ser contínuo é equivalente a mostrar que existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\| T(x) \| \leq C \| x \|$ para todo $x \in E$.

Vamos mostrar que T não é um operador contínuo.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ a base canônica de l^p. Temos que $\| e_n \| = 1$ e que

$$\| Te_n \| = \| n^2 e_n \| = \| n^2 \|$$

Dessa forma não existe um $C \geq 0$ tal que

$$\| Te_n \| \leq C \| e_n \|$$

Portanto, T não é contínuo e assim não é limitado.

8. Mostre que $\ell_1^* = \ell_\infty$.

Solution: Primeiro daremos uma motivação para relacionar os dois espaços.
Tome a base de Schauder (e_k) em ℓ^1, onde $e_k = (\delta_{kj}) = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$. Então todo $x \in \ell^1$ tem uma única representação

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

Assim, para cada $f \in (\ell^1)^*$ temos que

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k,$$

onde $\gamma_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Além disso,

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq ||f||_\infty ||e_k||_1 = ||f||_\infty \Rightarrow \sup_k |\gamma_k| \leq ||f||_\infty.$$

Assim mostramos que $(\gamma_k) \in \ell^\infty$.
Por outro lado, para toda $(\beta_k) \in \ell^\infty$ podemos definir o funcional g por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k,$$

onde $x = (\xi_k) \in \ell^1$. Note que g assim definido é linear e

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \beta_k| \leq \sup_j |\beta_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \sup_j |\beta_j| ||x||_1,$$

o que mostra que $g \in (\ell^1)^*$.
A partir destes argumentos, podemos construir um operador $A : (\ell^1)^* \to \ell^\infty$ por

$$A(f) = (f(e_i))_{i=1}^\infty = (\gamma_i)_{i=1}^\infty.$$

Afirmação: A é um isomorfismo.
De fato, dados $f, g \in (\ell^1)^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- A está bem definido;
  Como vimos no argumento acima, $(\gamma_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$.
- A é linear;
  $A(f+g) = ((f+g)(e_i))_{i=1}^\infty = (f(e_i) + g(e_i))_{i=1}^\infty = (f(e_i))_{i=1}^\infty + (g(e_i))_{i=1}^\infty = A(f) + A(g)$
  e $A(\alpha f) = ((\alpha f)(e_i))_{i=1}^\infty = (\alpha f(e_i))_{i=1}^\infty = \alpha (f(e_i))_{i=1}^\infty = \alpha A(f)$.
- A preserva a norma;
  Temos que
  $||A(f)|| = ||(f(e_i))_{i=1}^\infty||_\infty \leq ||f||_\infty ||e_i||_1 = ||f||_\infty$.
  Por outro lado,
  $|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^\infty \xi_i f(e_i) \right| \leq \sum_{i=1}^\infty |\xi_i||f(e_i)| \leq \sup_i |f(e_i)| \sum_{i=1}^\infty |\xi_i| \leq \sup_i |f(e_i)| ||x||_1$
  $\Rightarrow ||f||_\infty = \sup_{||x||_1 \leq 1} |f(x)| \leq \sup_i |f(e_i)| = ||A(f)||$.
  Portanto $||A(f)|| = ||f||_\infty$.
- A é injetiva;
  De fato,
  $A(f) = A(g) \Leftrightarrow (f(e_i))_{i=1}^\infty = (g(e_i))_{i=1}^\infty \Leftrightarrow f(e_i) = g(e_i), \ \forall i = 1, 2, \ldots$.
  Então dado $x \in \ell^1$,
  $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i \right) = \sum_{i=1}^\infty \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^\infty \xi_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i \right) = g(x)$.
  Portanto $f = g$.
- A é sobrejetiva;
  Como vimos no argumento acima, para cada $(\beta_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$ podemos definir $g \in (\ell^1)^*$ por
  $g(x) = \sum_{i=1}^\infty \xi_i \beta_i$, com $x = (\xi_i)_{i=1}^\infty$.

Portanto, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, a menos da natureza de seus elementos.

9. Mostre que $c_0^* = \ell_1$. Conclua que $c_0^{**} = \ell_\infty$.

Solution: Para mostrar que c_0^* é isométrico a ℓ_1, devemos exibir uma aplicação linear

$$T : c_0^* \to \ell_1,$$

que é uma isometria, no sentido de satisfazer:

$$\|T(f)\|_{\ell_1} = \|f\|_{c_0^*} \qquad \forall f \in c_0^*,$$

e que T é sobrejetiva. Defina, $T : c_0^* \to \ell_1$, como $T(f) = (f(e_i))$, onde e_i é a base canônica de ℓ_1. T está bem definida, pois basta conhecermos como f age na base de de ℓ_1. Agora verifiquemos que T é linear. Sejam $f.g \in c_0^*$, com

$$(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i), \qquad (\lambda g)(e_i) = \lambda g(e_i).$$

temos que ,

$$T(f+\lambda g)=T(f)+\lambda T(g).$$

Logo, T é linear. Para mostrarmos que T é isometria, mostremos primeiro que

$$\|T(f)\|_{\ell_1}\leq\|f\|_{c_0^*} \tag{5}$$

Por definição

$$\|T(f)\|_{\ell_1}=\|(f(e_i))\|_{\ell_1}=\sum_{i=1}^{\infty}|f(e_i)| \tag{6}$$

Afim de obter a desigualdade 5, construímos a seguinte sequência em c_0.

$$\begin{aligned} x_n &= (sign^+(a_1),sign^+(a_2),...,sign^+(a_n),0,...,...)\\ &= sign^+(a_1)e_1+sign^+(a_2)e_2+...+sign^+(a_n)e_n+0e_{n+1}+...\\ &= \sum_{i=1}^{n}sign^+(a_i)e_i \end{aligned}$$

onde $a_i=f(e_i)$ e $sign^+(a_i)=1$, se $a_i\geq 0$ e $sign^+(a_i)=0$ se $a_i<0$. Note que é razoável pedir que $a_i=f(e_i)$, pois dada qualquer sequência em c_0, a imagem dessa sequência por f depende unicamente da imagem em e_i, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\sum_{i=1}^{n}sign^+(a_i)e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}sign^+(a_i)f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}|a_i| \end{aligned} \tag{7}$$

Já que f é linear. ($f\in c_0^*$).Além do mais,

$$\|x_n\|_{c_0}=\max\left\{|sign^+(a_1)|,...,|sign^+(a_n)|,0,...\right\}=1.$$

Agora, de (6) e (7);

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|=\sum_{i=1}^{n}|f(e_i)|=\sum_{i=1}^{n}sign^+(a_i)f(e_i)=f(x_n)$$

Como

$$f(x_n)\leq|f(x_n)|\leq\|f\|_{c_0^*}\|x_n\|_{c_0}=\|f\|_{c_0^*}1=\|f\|_{c_0^*}$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}|f(e_i)|\leq\|f\|_{c_0^*},\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

tomando o limite com $n\to\infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(e_i)|\leq\|f\|_{c_0^*}\Longrightarrow\|T(f)\|_{\ell_1}\leq\|f\|_{c_0^*}$$

Agora, mostremos a desigualdade, $\|f\|_{c_0^*}\leq\|T(f)\|_{\ell_1}$. Por definição, $\|f\|_{c_0^*}=\sup_{x\in c_0}|f(x)|$ Pela definição de supremo, dado $\epsilon>0$ temos que $\|f\|_{c_0^*}-\epsilon$, é uma cota superior. Isto é, $\exists x_\epsilon\in c_0$, tal que $\|x_\epsilon\|_{c_0}=1$ e

$$\|f\|_{c_0^*}-\epsilon\leq|f(x_\epsilon)| \tag{8}$$

fixando $\epsilon>0$ e $x_\epsilon\in c_0$,

$$x_\epsilon(x_{1_\epsilon},x_{2_\epsilon},...,x_{k_\epsilon},0,...)$$

defina a sequência

$$u_{n_\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} x_{i_\epsilon} e_i, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Da forma que a sequência u_{n_ϵ} foi definida , note que, $u_{n_\epsilon} \to x_\epsilon$, na norma c_0. Ou seja, $\|u_{n_\epsilon} - x_\epsilon\|_{c_0} \to 0$, quando $n \to \infty$. Como f é um funcional linear contínuo em c_0, temos

$$|f(u_{n_\epsilon}) - f(x_\epsilon)| \to 0, \qquad n \to \infty$$

Daí de 8

$$\begin{aligned} \|f\|_{c_0^*} - \epsilon &\leq |f(x_\epsilon)| \\ &= |f(x_\epsilon) - f(u_{n_\epsilon}) + f(u_{n_\epsilon})| \\ &\leq |f(x_\epsilon) - f(u_{n_\epsilon})| + |f(u_{n_\epsilon})| \end{aligned} \tag{10}$$

Da expressão 9 e da linearidade de f, temos

$$|f(u_{n_\epsilon})| = |f(\sum_{i=1}^{n} x_{i_\epsilon} e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{i_\epsilon}| f(e_i)|$$

Como $\|x_\epsilon\|_{c_0} = 1$. temos $|x_{i_\epsilon}| \leq 1$, dai

$$|f(u_{n_\epsilon})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(e_i)| = \|T(f)\|_{\ell_1} \tag{11}$$

De 10 e 11, temos

$$\|f\|_{c_0^*} - \epsilon \leq |f(x_\epsilon)| \leq |f(x_\epsilon) - f(u_{n_\epsilon})| + \|T(f)\|_{\ell_1},$$

escolhendo $\epsilon = \frac{1}{n}$, tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos $\|f\|_{c_0^*} \leq \|T(f)\|_{\ell_1}$. Logo, concluímos que $\|T(f)\|_{\ell_1} = \|f\|_{c_0^*}$. Resta-nos mostrar que T é sobrejetiva. De fato, dada qualquer sequência $\alpha = (\alpha_n) \in \ell_1$. Defina $f : c_0 \to \mathbb{R}$, pondo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ É fácil verificar que f está bem definida e que $f \in c_0^*$. Agora, note que $f(e_i) = \alpha_i$. Portanto, $T(f) = (f(e_i)) = (\alpha_i) = x$. Isso termina a prova. Agora para concluir que $c_0^{**} = \ell_\infty$, basta usar o exercício anterior.

10. Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere o funcional $f_a : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_a(\psi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)dt + a\psi(0).$$

Mostre que $f_a \in (C[-1,1])^*$ e que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

Solution: A aplicação

$$\begin{aligned} f_a \quad : \quad C([-1,1]) &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \int_{-1}^{1} \phi(t)dt + a\phi(0) \end{aligned}$$

é, para cada $a \in \mathbb{R}$, uma aplicação linear (deixamos a cargo do leitor uma demonstração deste fato!) entre os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais $C([-1,1])$ e $\mathbb{R}$, a qual cumpre:

$$\begin{aligned} |f_a(\phi)| &\leqslant |\int_{-1}^{1} \phi(t)\ dt| + |a||\phi(0)| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} |\phi(t)|\ dt + |a| \sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)|\ dt + |a|\ \|\ \phi\ \| \\ &= (2 + |a|)\ \|\ \phi\ \|, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in C([-1,1])$. Sendo assim, temos que $f_a \in C([-1,1])^*$ e

$$\| f_a \| \leqslant 2 + |a|,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\| f_a \| = 2 + |a|$. Com efeito, se $a \geqslant 0$, observamos que

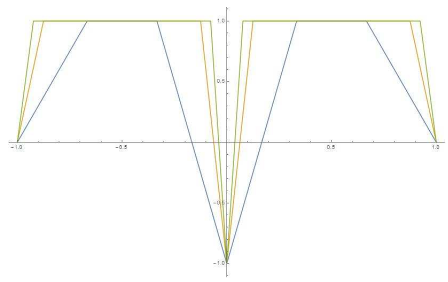
$$f_a(1) = \int_{-1}^{1} dt + a = 2 + a = 2 + |a|$$

e assim, que

$$\| f_a \| = \sup_{t \in [-1,1]} |f_a(t)| = 2 + |a|$$

ao menos neste caso. Se $a < 0$ podemos definir uma sequência de aplicações contínuas

$$\begin{array}{rcl} \phi_n & : & [-1,1] \to \mathbb{R} \\ & & t \mapsto \begin{cases} n(t+1) & \text{se} \quad -1 \leqslant t \leqslant -1 + 1/n, \\ 1 & \text{se} \quad -1 + 1/n \leqslant t \leqslant -1/n, \\ -2nt - 1 & \text{se} \quad -1/n \leqslant t \leqslant 0, \\ 2nt - 1 & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1 & \text{se} \quad 1/n \leqslant t \leqslant 1 - 1/n, \\ -n(t-1) & \text{se} \quad 1 - 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \end{array}$$



No gráfico acima temos esboços de ϕ_3 *(azul)*, ϕ_8 *(amarelo)* e ϕ_{13} *(verde)*. Aplicando f_a a ϕ_n obtemos:

$$\begin{aligned} f_a(\phi_n) &= \int_{-1}^{1} \phi_n(t)\, dt + a\phi_n(0) \\ &= 2\frac{\frac{1}{n}\cdot 1}{2} + 2\frac{\frac{1}{n}\cdot 1}{2} + \frac{\frac{1}{n}\cdot 1}{2} + 2(1 - \tfrac{2}{n}) - a \\ &= \frac{-3}{n} + 2 - a \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 - a = 2 + |a|, \end{aligned}$$

de modo que $\| f_a \| = 2 + |a|$ também neste caso. Portanto, $\| f_a \| = 2 + |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

11. **(Lema de Riesz)** Sejam $(\mathcal{N}, \|.\|)$ um espaço vetorial normado sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ e $\mathcal{M}$ um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{N}$. Prove que para cada $0 < \alpha < 1$ existe $\xi \in \mathcal{N}/\mathcal{M}$ com $\|\xi\| = 1$ e

$$\inf_{\eta \in \mathcal{M}} \|\xi - \eta\| \geq \alpha.$$

Dê um exemplo para justificar que a hipótese "$\mathcal{M}$ é fechado" não pode ser retirada.

Solution: Seja $\zeta \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ e

$$a := d(\zeta, \mathcal{M}) = \inf_{\eta \in \mathcal{M}} ||\zeta - \eta||.$$

Note que, como $\mathcal{M}$ é fechado, $\mathcal{M}^c = \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ é aberto, o que mostra que para cada $\zeta \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, existe uma bola aberta $B_{r_\zeta}(\zeta) \subset \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ (que contem ζ). Assim,

$$||\zeta - \eta|| > r_\zeta > 0, \ \forall \eta \in \mathcal{M},$$

pois $\eta \notin B_{r_\zeta}(\zeta)$, e portanto $a = \inf\limits_{\eta \in \mathcal{M}} ||\zeta - \eta|| > 0$.
Agora, tome qualquer $\alpha \in (0,1)$. Pela definição de ínfimo, existe $\eta_0 \in \mathcal{M}$ tal que

$$a \leq ||\zeta - \eta_0|| \leq \frac{a}{\alpha} \tag{12}$$

(note que $a/\alpha > a$ quando $0 < \alpha < 1$). Seja $\xi = c(\zeta - \eta_0)$, onde $c = \dfrac{1}{||\zeta - \eta_0||} \in \mathbb{F}$. Então $||\xi|| = 1$ e, para todo $\eta \in \mathcal{M}$,

$$||\xi - \eta|| = ||c(\zeta - \eta_0) - \eta|| = c||\zeta - \eta_0 - c^{-1}\eta|| = c||\zeta - \eta_1||,$$

onde $\eta_1 = (\eta_0 + c^{-1}\eta) \in \mathcal{M}$, pois $\eta_0, \eta \in \mathcal{M}$ subespaço de $\mathcal{N}$.
Pela definição de a, temos que $||\zeta - \eta_1|| \geq a$, e assim

$$||\xi - \eta|| \geq ca = \frac{c}{||\zeta - \eta_0||} \geq \frac{a}{\frac{a}{\alpha}} = \alpha,$$

onde a última desigualdade segue de (12).
Portanto,

$$\inf_{\eta \in \mathcal{M}} ||\xi - \eta|| \geq \alpha,$$

com $||\xi|| = 1$ e $\xi \in \mathcal{N} \notin \mathcal{M}$, pois

$$d(\xi, \mathcal{M}) = \inf_{\eta \in \mathcal{M}} ||\xi - \eta|| \geq \alpha.$$

Para justificar que a hipótese "$\mathcal{M}$ é fechado"não pode ser retirada, considere o espaço $\mathcal{C}[0,1]$ das funções f contínuas definidas em $[0,1]$ com a norma

$$||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (enunciado abaixo) sabemos que o subespaço $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios definidos em $[0,1]$ é denso em $\mathcal{C}[0,1]$. Assim, temos que $\mathcal{P}$ não é fechado em $[0,1]$, pois se o fosse, teríamos $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{C}[0,1]$, o que não é verdade.
Agora, tome $\xi \in \mathcal{C}[0,1] \notin \mathcal{P}$ tal que $||\xi|| = 1$. Como $\mathcal{P}$ é denso em $\mathcal{C}[0,1]$, para qualquer $\epsilon > 0$ a bola $B_\epsilon(\xi)$ contem algum $p \in \mathcal{P}$; isto é, $||\xi - p|| < \epsilon$. Desta forma, para cada $\alpha = \epsilon$, $0 < \alpha < 1$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $||\xi - p|| < \alpha$, o que mostra que

$$\inf_{\eta \in \mathcal{P}} ||\xi - \eta|| < \alpha.$$

Teorema de Aproximação de Weierstrass. Dada uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe uma sequência de funções polinomiais de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que converge uniformemente para f.

Obs.: Note que a demonstração acima é válida para qualquer subespaço denso em seu espaço.

12. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ e $T : \mathcal{N}1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear. São equivalentes:

(a) $\sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\| < \infty$;

(b) Exite $C > 0$ tal que $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$;

(c) T é uniformemente contínuo;

(d) T é contínuo;

(e) T é contínuo em $\xi = 0$.

Solution: $(i) \Rightarrow (ii)$**:**
Para $\xi \in \mathcal{N}_1$, $\xi \neq 0$, temos

$$\frac{\|T\xi\|_2}{\|\xi\|_1} = \left\| T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_1}\right)\right\|_2 \leq \sup\{\|Ty\| : \|y\| \leq 1\} < \infty.$$

Denotando, $\sup\{\|Ty\| : \|y\| \leq 1\}$ por C, segue que

$$\|T\xi\|_2 \leq C\|\xi\|_1.$$

Daí, concluimos, pois para $\xi = 0$ (ii) é trivialmente satisfeita.

$(ii) \Rightarrow (iii)$**:**
Sejam $x, y \in \mathcal{N}_1$. Note que, se tomarmos $\delta = \frac{\epsilon}{C}$, para um $\epsilon > 0$ dado, vale

$$\|x - y\|_1 < \delta \Longrightarrow \|Tx - Ty\|_2 = \|T(x - y)\|_2 \leq C\|x - y\|_1 < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon. \tag{13}$$

Portanto, T é uniformemente contínua.

$(iii) \Rightarrow (iv)$**:**
Fixando um $x \in \mathcal{N}_1$ em (13) obtemos, pela definição de continuidade, que T é contínuo em x. Como x é arbitrário segue que T é contínuo.

$(iv) \Rightarrow (v)$**:**
Se T é contínuo em todo $x \in \mathcal{N}_1$ então, em particular, ele é contínuo no 0.

$(v) \Rightarrow (i)$**:**
Tomando $\epsilon = 1$, segue da continuidade de T na origem a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|\xi\| = \|\xi - 0\| < \delta \Longrightarrow \|T\xi\| = \|T\xi - 0\| = \|T\xi - T0\| < 1.$$

Então, tomando $\|\xi\| \leq 1$, que implica $\|\frac{\delta}{2}\xi\| < \delta$, temos

$$\frac{\delta}{2}\|T\xi\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}\xi\right)\right\| < 1 \Longrightarrow \|T\xi\| < \frac{2}{\delta}.$$

Daí, temos

$$\sup\{\|T\xi\| : \xi \in N_1, \ \ \|\xi\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

13. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Seja

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) := \text{conjuntos dos operadores lineares limitados de } \mathcal{N}_1 \text{ a } \mathcal{N}_2.$$

Dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina

$$\|T\| := \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1, \ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|.$$

Prove que:

(a) $(\mathcal{L}(\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2), \|.\|)$ é um espaço normado;

(b) Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ também o é;

(c) $\|T\| = \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1}\{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} = \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|}$;

(d) Dados $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1) := \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_1)$, então $TS \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ e $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

(e) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, então

$$e^{tT} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j}{j!} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$$

e $\|e^{tT}\| \leq e^{t\|T\|}$.

(f) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, com $\|T\| < 1$, então $S := \sum\limits_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ e $S = (I_d - T)^{-1}$, onde I_d é o operador identidade.

(g) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, com T inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, e $\|T - S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, enão S é inverível. Conclua que o conjunto dos operadores inversíveis em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ é aberto (Sugestão: Use o item (vi)).

Solution:

(a) O conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é, trivialmente, um espaço vetorial. Basta mostrar que $\|T\| := \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Segue-se que,

- $\|T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| \geq 0$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$, pois é o supremo de valores positivos. E além disso,
  $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| = 0 \Leftrightarrow \|T\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$;
- $\|\alpha T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|(\alpha T)\xi\| = |\alpha| \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| = |\alpha|\|T\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$;
-

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\| &= \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|(T_1 + T_2)\xi\| \\
&= \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} (\|T_1\xi\| + \|T_2\xi\|) \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T_1\xi\| + \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T_2\xi\| \\
&= \|T_1\| + \|T_2\|
\end{aligned}$$

(b) Dada $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon\ , \qquad \forall n, m > n_0$$

Segue-se que

$$|T_n(\xi) - T_m(\xi)\| = \|(T_n - T_m)\xi\| \leq \|T_n - T_m\|\|\xi\| \leq \epsilon\|\xi\| \tag{14}$$

$\forall \xi \in \mathcal{N}_1$ e $n, m > n_0$.

Disso concluímos que para cada $\xi \in \mathcal{N}_1$, a sequência $(T_n(\xi))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, pois $\mathcal{N}_2$ é Banach. Defina $T : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$, por $T(\xi) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(\xi)$ para cada $\xi \in \mathcal{N}_1$. Note que, T é linear devido a unicidade da convergência. Em (14) fazendo $m \to \infty$, temos

$$\|T_n(\xi) - T(\xi)\| = \|(T_n - T)\xi\| \leq \epsilon\|\xi\|$$

$\forall \xi \in \mathcal{N}_1$ e $n > n_0$. Logo $\|T_n - T\| \leq \epsilon$, e portanto, $(T_n - T) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Em particular, $T = T_n - (T_n - T) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $T_n \to T$.

(c) Mostremos inicialmente que $\|T\| = \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1}\{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}$.
Dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então existe $C > 0$ tal que $\|T\xi\| \leq C\|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1$.

Logo

$$\|T\xi\| \leq \left(\inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}\right) \|\xi\|$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| \leq \left(\inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}\right) 1$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|} = \|T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\| \leq \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| = \|T\|$$

$$\Rightarrow \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} \leq \|T\|$$

Agora mostremos a seguinte igualdade: $\inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} = \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\|$. De fato, para $\forall \xi \in \mathcal{N}_1$ temos,

$$\|T\xi\| \leq \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}\|\xi\|$$

$$\Rightarrow \|T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\| = \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|} \leq \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \in \mathcal{N}_1} \|T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\| \leq \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\}$$

Por outro lado,

$$\frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|} = \|T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

$$\Rightarrow \|T\xi\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\|\xi\|$$

$$\Rightarrow \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Para verificarmos a última igualdade, observe que,

$$\sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \sup_{\xi \neq 0} \left\|T\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|}$$

.

(d) Por definição, precisamos mostrar que TS é linear e limitada. De fato,

$$\begin{aligned} (TS)(\alpha x + \beta y) &= T(S(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha S(x) + \beta S(Y)) \\ &= \alpha TS(x) + \beta TS(y) = \alpha(TS)(X) + \beta(TS)(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \ \text{ e } \ x, y \in \mathcal{N}_1. \end{aligned}$$

Portanto, TS é linear.

Dado $\xi \in \mathcal{N}_1$ tem-se,

$$\|(TS)(\xi)\| = \|T(S(\xi))\| \leq \|T\|\|S(\xi)\| \leq \|T\|\|S\|\|\xi\|.$$

Tomando $C = \|T\|\|S\|$, concluímos que TS é limitada. E além disso, do item anterior temos que $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

(e) Dados $\alpha, \beta, t \in \mathbb{F}$ e $x, y \in \mathcal{N}_1$ temos,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j}{j!}\right)(\alpha x + \beta y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (T)^j (\alpha x + \beta y)}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (T^j(\alpha x + \beta y))}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (\alpha T^j(x) + \beta T^j(y))}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (\alpha T^j(x))}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (\beta T^j(y))}{j!} \\
&= \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (T^j)(x)}{j!} + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t)^j (T^j)(y))}{j!} \\
&= \alpha e^{tT(x)} + \beta e^{tT(y)}
\end{aligned}$$

Logo e^{tT} é linear. Provemos que o operador é limitado.

Dado $\xi \in \mathcal{N}_1$, temos

$$\|e^{tT(\xi)}\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j(\xi)}{j!} \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j \|T^j \xi\|}{j!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j \|T\|^j}{j!} = e^{|t|\|T\|} \leq \infty$$

A última desigualdade é satisfeita por se tratar de uma série absolutamente convergente. Portanto, a série é limitada, e $e^{tT} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$. Em particular, a série $e^{tT(\xi)}$ converge em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ para cada $\xi \in \mathcal{N}_1$, pois $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ é banach.

(f) Como $\|T\| \leq 1$, a série $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ é absolutamente convergente, e portanto, convergente.Pelo item (b) segue $S := \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$. Como

$$(I - T)\left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)(I - T) = I - T^{j+1}$$

para cada j. Note que $\lim_{j\to\infty} T^{j+1} = 0$, pois $\|T\| \leq 1$. Segue que

$$(I - T)\left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)(I - T) = I$$

e $S = (I_d - T)^{-1}$.

(g) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ inversível. Dado $S \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ tal que $\|T - S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Tem-se

$$1 \geq \|T^{-1}\|\|T - S\| \geq \|T^{-1}(T - S)\| = \|I - T^{-1}S\|$$

Pelo item anterior temos que $I - (I - T^{-1}S) = T^{-1}S$ é inversível.

Logo $S = T(T^{-1}S)$ é inversível. Além disso, podemos concluir que o conjunto dos operadores lineares inversíveis é aberto. Pois dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ inversível mostramos, em particular, que T é ponto interior.

14. Seja $K \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ tal que $\|K\|_\infty < 1$. Mostre que para cada $f \in \mathcal{C}([0,1])$ existe uma única

$u \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)u(s)ds + f(t),\ \forall t \in [0,1].$$

Prove ainda que

$$u(t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t,s)f(s) \right) ds,\ t \in [0,1],$$

onde

$$K_n(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & ,\quad \text{se } n = 0; \\ \displaystyle\int_0^1 K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau & ,\quad \text{se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(Sugestão: use 6(vi)).

Solution: Primeiramente, considere $E = (C([0,1]), ||_\infty)$ e defina

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ & E \longrightarrow E \\ & u \longmapsto \varphi(u) \end{aligned}$$

tal que $\forall t \in [0,1]$,

$$\varphi(u)(t) = \int_0^1 K(t,s)u(s)ds$$

Vamos mostrar que φ está bem definida e que $\varphi : E \longrightarrow E \in L(E;E)$. Para isso, tome $u \in E$. Logo

$$\begin{aligned} |\varphi(u)|_\infty^2 &= \Big(\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(u)(t)| \Big)^2 = \Big(\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 K(t,s)u(s)ds \right| \Big)^2 \leq \Big(\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K(t,s)||u(s)|ds \Big)^2 \leq \\ &\leq \Big(\sup_{t\in[0,1]} \Big(\int_0^1 |K(t,s)|^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^1 |u(s)|^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big)^2 = \Big(\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K(t,s)|^2 ds \int_0^1 |u(s)|^2 ds) \Big) \leq \\ &\leq |K|_\infty^2 |u|_\infty^2 < 1.|u|_\infty^2 \end{aligned}$$

Assim, temos $|\varphi(u)|_\infty < |u|_\infty < \infty$. Isso mostra que $\varphi(u) \in E$ e que φ é contínua em E. Além disso, como

$$|\varphi| = \sup_{u\neq 0} \frac{|\varphi(u)|}{|u|} < 1$$

ocorre. Temos então pelo exercício (8(vi)) que o operador $(I_d - \varphi) : E \longrightarrow E$ é inversível, visto que $C([0,1])$ é Banach com a norma do sup. Assim, dado $f \in E$, $\exists! u \in E$(pois $(I_d - \varphi)$ é bijetora), tal que:

$$(I_d - \varphi)(u) = f$$

Ou seja, $\forall t \in [0,1]$, tem-se

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)u(s)ds + f(t)$$

Agora, novamente pelo item (8(vi)), temos que a inversa do operador $(I_d - \varphi) : E \longrightarrow E$, pode ser escrito como $(I_d - \varphi)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j$. Logo,

$$u = (I_d - \varphi)^{-1}(f) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j\Big)(f) = (I + \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots)(f) = f + \varphi(f) + \varphi(\varphi(f)) + \dots$$

Assim,

$$u(t) = f(t) + \int_0^1 K(t,s)f(s)ds + \int_0^1 K(t,s_1)\Big(\int_0^1 K(t,s)f(s)ds\Big)ds_1 + \dots$$

Ou seja, podemos escrever u de maneira recorrente.

$$u(t) = f(t) + \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t,s)f(s)\Big)ds$$

onde

$$K_n(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & se \quad n = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 K(t,\eta)K_{n-1}(\eta,s)d\eta, & se \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

15. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} < 1$ mostre que a equação integral

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + f(x), \ x \in \Omega$$

tem uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

Solution: Notação: $\|\cdot\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \|\cdot\|_2$.
Defina,

$$T(u)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$$

onde $u(y) \in L^2(\Omega)$.
Queremos provar que $Tu \in L^2(\Omega)$.
De fato, pois

$$\begin{array}{rcl} \|Tu(x)\|^2 = \| \int_\Omega K(x,y)u(y)dy\|^2 & \leq & \big(\int_\Omega \|K(x,y)\|\|u(y)\|dy\big)^2 \\ & \leq & \Big[\big(\int_\Omega \|K(x,y)\|^2dy\big)^{\frac{1}{2}} \big(\int_\Omega \|u(y)\|^2dy\big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2 \\ & = & \int_\Omega \|K(x,y)\|^2dy\|u\|_2^2 \end{array}$$

Portanto T é integrável em Ω, ou seja, $Tu \in L^2(\Omega)$ já que $u \in L^2(\Omega)$. Então

$$\begin{array}{rcl} \|Tu\|_2^2 & = & \int_\Omega |Tu(x)|^2dx = \int_\Omega \left|\int_\Omega K(x,y)u(y)dy\right|^2 dx \\ & \leq & \int_\Omega \int_\Omega \|K(x,y)\|^2\|u\|_2^2dydx \\ & = & \int_\Omega \|u\|_2^2 \int_\Omega \|K(x,y)\|^2dydx \\ & = & \|u\|_2^2 \int_\Omega \int_\Omega \|K(x,y)\|^2dydx \\ & = & \|u\|_2^2\|K(x,y)\|_2^2 \end{array}$$

O que implica que $\|Tu\|_2^2 \leq \|u\|_2^2\|K(x,y)\|_2^2 \leq \|u\|_2^2$, já que $\|K(x,y)\|_2^2 < 1$. Logo Tu está bem definida.
Provemos agora que T é linear, onde $T = \int_\Omega K(x,y)dy$. De fato, dados $u, v \in L^2(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{array}{rcl} T(u+\alpha v)(x) & = & \int_\Omega K(x,y)(u+\alpha v)(y)dy \\ & = & \int_\Omega K(x,y)(u(y)+\alpha v(y))dy \\ & = & \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + \alpha \int_\Omega K(x,y)v(y)dy \\ & = & Tu(x) + \alpha Tv(x) \end{array}$$

Com isso, T é um operador linear e como $L^2(\Omega)$ é Banach e $\|T\| \leq \|K\|_2 < 1$, segue do exercício 8-f que $(I - T)$ é inversível, onde I é o operador identidade.
Observe que,

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + f(x)$$

pode ser escrito como,

$$u(x) - Tu(x) = f(x)$$
$$\Rightarrow (I - T)u(x) = f(x) \Rightarrow u(x) = (I - T)^{-1} f(x)$$

E isso acontece para cada $f \in L^2(\Omega)$. Concluímos assim que u é único.