AF - Lista 02

Professor Marcos Leandro
Turma de Doutorado 2018

2 de Maio de 2018

1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ (não necessariamente de dimensão finita). Dizemos que um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ é dita uma base de Hamel se $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente e $\text{span}\mathcal{B} = E$.
   (a) Use o Lema de Zorn para provar que todo espaço vetorial não trivial possui base de Hamel.
   (b) Use o Teorema da Categoria de Baire para mostrar que se E é um espaço de Banach e $\dim E = \infty$, então $\mathcal{B}$ é não-enumerável.
   (c) Prove que todas as bases de Hamel E possuem a mesma cardinalidade.
   (d) Dê um exemplo de um espaço vetorial que não seja de Banach e que tenha a base de Hamel enumerável.

Solution:

(a) Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Considere

$$C = \{X \subset E : \ X \ \text{ é linearmente independente}\},$$

parcialmente ordenado pela inclusão.

Nesse conjunto, aplicaremos o Lema de Zorn para obtermos uma base de Hamel para E. Tomando $x \in E \setminus \{0\}$, temos que $\{x\} \in C$, e assim, $C \neq \emptyset$. Tome $A = \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cadeia, i.e., um conjunto totalmente ordenado em C e considere

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda. \tag{1}$$

Afirmamos que $X \in C$. De fato, é claro que $X \subset E$. Além disso, se $x_1, \cdots, x_n$ são elementos de X, então, como A é totalmente ordenado, segue que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que X_{λ_0} contém todos esses elementos, e portanto, $x_1, \cdots, x_n$ são linearmente independentes, demonstrando assim nossa afirmação.

Como a ordem parcial em C é dada pela inclusão, segue de (1) que $X \in C$ é uma cota superior para A. Da arbitrariedade de A, temos que toda cadeia em C possui cota superior em C. Aplicamos então o Lema de Zorn, que garante a existência de um elemento maximal em C. Chamemos esse elemento de $\mathcal{B}$.

Afirmação: $\mathcal{B}$ é base de Hamel para E.

Pela definição de C, temos que $\mathcal{B} \subset E$ é linearmente independente. Resta assim, mostrarmos que $\text{span}\mathcal{B} = E$. Suponha o contrário, i.e., suponha que existe $x_0 \in E \setminus \text{span}\mathcal{B}$. Como x_0 não é combinação linear (finita) de elementos de $\mathcal{B}$, temos que $\mathcal{B} \cup \{x_0\}$ é linearmente independente e que $x_0 \notin \mathcal{B}$. Temos então

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{x_0\} \in C \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cup \{x_0\},$$

o que contraria a maximalidade de $\mathcal{B}$, que nos foi garantida pelo Lema de Zorn. Logo, $\text{span}\mathcal{B} = E$. Como, além disso, $\mathcal{B}$ é linearmente independente, provamos assim nossa afirmação.

(b) Suponha que $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\}$ seja enumerável e ponha $M_k = \text{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, M_k é subespaço de E e, como $\dim M_k = k < \infty$, segue que M_k é Banach (pois todo espaço normado de dimensão finita é Banach). Como M_k é um subspaço de E que é Banach, tem-se que M_k é fechado. Além disso, pelo fato de $E = \text{span}\mathcal{B}$, segue que

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k,$$

e assim, da completude de E e do Teorema da Categoria de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int M_{k_0} \neq \emptyset$. Existe portanto uma bola aberta $B(a, r)$ em E que está inteiramente contida em M_{k_0}. Mostraremos que, neste caso, $M_{k_0} = E$. Para tanto, tomemos $x \in E \setminus \{a\}$. Então $y := \frac{r}{2} \frac{(x-a)}{\|x-a\|} + a$ é tal que $\|y - a\| = \frac{r}{2} < r$, ou seja, $y \in B(a, r)$ e, assim, $y \in M_{k_0}$. Segue então que

$$x = \frac{2}{r}\|x - a\|(y - a) + a \in M_{k_0},$$

uma vez que é combinação linear de $y, a \in M_{k_0}$, que, por sua vez é espaço vetorial. Assim, mostramos que todo elemento $x \in E$ também pertence a $M_{k_0} \subset E$, e portanto, $M_{k_0} = E$. Mas isto é um absurdo, uma vez que $\dim M_{k_0} = k_0 < \infty = \dim E$. Essa contradição se originou quando supomos que $\mathcal{B}$ fosse enumerável. $\mathcal{B}$ deve, portanto ser não enumerável no caso de ser $\dim E = \infty$.

(c) Sejam B_1 e B_2 bases de Hamel de um espaço vetorial E.

$$\begin{cases} \text{Tome } A = \{\varphi : D_\varphi \subset B_1 \longrightarrow Im(\varphi) \subset B_2; \varphi \text{ é injetiva e } Im(\varphi) \cup (B_1 \backslash D_\varphi) \text{ é L.I. }\}. \\ \varphi_1 \leq \varphi_2 := D_{\varphi_1} \subset D_{\varphi_2} \text{ e } \varphi_2{}_{|_{D_{\varphi_1}}} = \varphi_1. \\ \Longrightarrow (A, \leq) \text{ é parcialmente ordenado .} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Tome } M \subset A, M \neq \emptyset, M \text{ totalmente ordenado, arbitrário .} \\ \text{Defina } D_0 = \bigcup_{\varphi \in M} D_\varphi \text{ e } \varphi_0(x) = \varphi(x) \text{ se } x \in D_\varphi, \forall \varphi \in A. \\ \Longrightarrow M \text{ é totalmente ordenado e possui cota superior: } \varphi_0. \end{cases}$$

Pelo Lema de Zorn, o conjunto A possui um elemento maximal, digamos $\psi : D_\psi \longrightarrow B_2$ em A, onde ψ é injetiva e $Im(\psi) \cup (B_1 \backslash D_\psi)$ é L.I. **(*1)**

Afirmação: $D_\psi = B_1$

Suponhamos, por contradição, que $D_\psi \subsetneq B_1$.

Isto implica que $Im(\psi) \subsetneq B_2$ pois, caso contrário, de **(*1)**, teríamos $Im(\psi) \cup (B_1 \backslash D_\psi) = B_2 \cup (B_1 \backslash D_\psi)$ L.I. O que contraria o fato de B_2 ser uma base.

Como $Im(\psi) \subsetneq B_2$, tomemos $y \in B_2 \backslash Im(\psi)$ arbitrário. Temos duas possibilidades:

- Se y é linearmente independente de $Im(\psi) \cup (B_1 \backslash D_\psi)$, escolhemos um ponto arbitrário $x \in B_1 \setminus D_\psi$ e definimos a extensão $\tilde{\psi} : D_\psi \cup \{x\} \longrightarrow B_2$ de ψ pondo $\tilde{\psi}(x) = y$. Isto implica que $\psi \leq \tilde{\psi}$ o que contradiz a maximalidade de ψ.
- Se y não é linearmente independente de $Im(\psi) \cup (B_1 \backslash D_\psi)$, podemos expressá-lo de modo único como

$$y = \sum_{v \in Im(\psi)} \lambda v + \sum_{u \in B_1 \backslash D_\psi} \theta_u u,$$

em que ao menos um $\theta_{u0} \neq 0$ pois y é um elemento da base B_2. Considere agora a extensão $\tilde{\psi} : D_\psi \cup \{u_0\} \longrightarrow B_2$ em que $\tilde{\psi}(u_0) = y$. Claramente $\tilde{\psi}$ é injetiva e $D_\psi \cup \{u_0\} \subset B_1$. Além disso, $Im(\tilde{\psi}) \cup (B_1 \backslash D_{\tilde{\psi}}$ é L.I. O que implica $\psi \leq \tilde{\psi}$, o que contradiz a maximalidade de ψ.

Logo $D_\psi = B_1$, onde $\psi : B_1 \longrightarrow B_2$ é uma função injetora. Isto é, $Card(B_1) \leq Card(B_2)$.

De modo análogo, mostra-se que existe $\zeta : B_2 \longrightarrow B_1$ injetora. Isto é, $Card(B_2) \leq Card(B_1)$.

Pelo Teorema de Schroeder-Bernstein existe uma bijeção entre B_1 e B_2 e, portanto, possuem a mesma cardinalidade.

(d) O espaço vetorial dos polinômios com coeficiente reais, $P(\mathbb{R})$, não é Banach.

$B = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ é uma base de Hamel para $P(\mathbb{R})$.

2. Defina espaço de Hilbert e base ortonormal completa e mostre que todo espaço de Hilbert não trivial possui base ortonormal completa.

Solution:

Definição: Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H munido de um produto escalar (u, v) tal que H é completo na norma $\|.\|$ definida, para cada $u \in H$ por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Definição: Um conjunto $B = \{e_i\}$ em H é dito uma *base ortonormal* de H se ele satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$, I conjunto de índices;

ii) $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$, $i, j \in I$;

iii) o espaço linear gerado pelos e_i é denso em H; isto é, $\overline{span\ B} = H$.

Se o fato de existir qualquer outra base ortonormal S contendo B implicar que $B = S$, então B é dita *base ortonormal completa.*

Demonstração:

Suponha $H \neq 0$. Dado $h \in H$, se $\|h\| = 1$, o subconjunto $\{h\}$ é um subconjunto ortonormal. Se $\|h\| \neq 1$, tome $\bar{h} = h/\|h\| \in H$, pois H é espaço vetorial, e assim, o subconjunto $\{\bar{h}\}$ é ortonormal. Então, vemos que H possui subconjunto ortonormal.

Nós introduzimos uma relação de ordem parcial nos subconjuntos ortonormais de H pela inclusão de conjuntos. Assim, $U \leq V$ se, e somente se, $U \subset V$. Agora, considere

$$W = \{U_j | j \in J\}$$

uma família totalmente ordenada de conjuntos ortonormais; isto é, para quaisquer $i, j \in J$ temos que ou $U_i \leq U_j$ ou $U_j \leq U_i$. Note que W é possível, pois a família formada apenas pelo subconjunto $\{h\}$ (ou $\{\bar{h}\}$) citado anteriormente é um exemplo.

Além disso, note que $\bigcup_{j \in J} U_j$ é um subconjunto ortonormal e é uma cota superior para a família W, no sentido de inclusão. De fato, como W é totalmente ordenado, os elementos pertencentes aos subconjuntos que estão na união são ortogonais entre si e são unitários; e é claro que qualquer $U_j \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Nestas condições, o Lema de Zorn implica que W tem um elemento maximal $B = \{e_i | i \in I\}$. Então B é um subconjunto ortonormal maximal.

Afirmação: $\overline{span\ B} = H$.

De fato, suponha que exista um $y \in H$ tal que $y \notin \overline{span\ B}$. Defina a_i por

$$a_i = (y, e_i). \tag{2}$$

Então vale a desigualdade de Bessel

$$\sum_i |a_i|^2 \leq \|y\|;$$

basta considerar

$$\left\| y - \sum_F a_i e_i \right\|^2, \tag{3}$$

onde F representa uma coleção finita de i. Usando a ortonormalidade de $\{e_i\}$, segue que

$$\left\| y - \sum_F a_i e_i \right\|^2 = \left(y - \sum_F a_i e_i, y - \sum_F a_i e_i \right) = (y,y) - \sum_F a_i(e_i, y) - \sum_F a_i(y, e_i) + \sum_F a_i^2 (e_i, e_j)$$
$$= \|y\|^2 - 2\sum_F a_i(e_i, y) + \sum_F a_i^2 = \|y\|^2 - \sum_F a_i^2 = \|y\|^2 - \sum_F |a_i|^2,$$

onde a penúltima igualdade segue de (2). Como (3) é não negativo, segue que

$$\|y\|^2 - \sum_F |a_i|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_F |a_i|^2 \leq \|y\|^2$$

é válido para toda coleção finita F, e então para a coleção infinita.
Como $\{e_i\}$ é um conjunto ortonormal completo, segue do lema (enunciado abaixo) que podemos definir

$$x = \sum a_i e_i,$$

onde $x \in H$, e $a_i = (x, e_i)$. Mas, como por (2) $a_i = (y, e_i)$, temos que

$$(y - x, e_i) = (y, e_i) - (x, e_i) = a_i - a_i = 0,$$

o que significa que $y - x$ é ortogonal a e_i, para todo i. Note que $y - x \neq 0$, já que $y \notin H$ e $x \in H$. Então $\dfrac{y-x}{\|y-x\|}$ pode ser acrescentado ao subconjunto ortonormal B, contradizendo o fato de que este subconjunto é maximal. Portanto, $\overline{span\ B} = H$.
Assim, concluímos que $B = \{e_i | i \in I\}$ é base ortonormal completa de H.

Teorema F (Simmons, p.255): Seja H um espaço de Hilbert, e seja $\{e_i\}$ um conjunto ortonormal em H. Então as seguintes condições são todas equivalentes umas às outras:

i) $\{e_i\}$ é completo;

ii) $x \perp \{e_i\} \Rightarrow x = 0$;

iii) se x é um vetor arbitrário em H, então

$$x = \sum (x, e_i) e_i; \tag{4}$$

iv) se x é um vetor arbitrário em H, então $\|x\|^2 = \sum |(x, e_i)|^2$.

Referência: SIMMONS, G. F. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: 1963.

3. Enuncie e demonstre o Teorema de Hahn-Banach complexo.

Solution: **Teorema de Hahn-Banach complexo:** *Sejam X espaço vetorial real ou complexo e $p : X \to [0, \infty)$, satisfazendo:*
$p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta), \forall\ \xi, \eta \in X.$
$p(\alpha\xi) = |\alpha|p(\xi), \forall\ \xi \in X, \alpha \in \mathbb{F}.$
Se $f : Z \to \mathbb{F}$ é um funcional linear definido no subespaço $Z \subset X$ com

$$|f(x)| \leq p(x), \forall\ x \in Z \tag{5}$$

então f possui extensão linear $F : X \to \mathbb{F}$ dominada por p, $|F(x)| \leq p(x), \forall\ x \in X$.
Demonstração:
• Se X é espaço vetorial real:
De 5, $|f(x)| \leq p(x) \Rightarrow f(x) \leq p(x), \forall\ x \in Z$. Pelo Teorema de Hanh-Banach, existe uma extensão linear $F : X \to \mathbb{R}$, onde $F(x) \leq p(x)$. Daí,
$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x)$. Ou seja, $-p(x) \leq F(x)$, concluímos assim que $|F(x)| \leq p(x), \forall\ x \in X$.

• Se X é espaço vetorial complexo:
Seja $f : Z \to \mathbb{C}; f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, onde f_1, f_2 são funcionais lineares reais e $|f(x)| \leq p(x), \forall\ x \in Z$. Restringindo $Z \subset X$ com a multiplicação por escalares reais, observe que:
$|f_1(x)| \leq |f(x)|$ e $|f_2(x)| \leq |f(x)|, \forall\ x \in Z$. Daí, $f_1(x) \leq p(x)$ e $f_2(x) \leq p(x)$.
Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem F_1 e F_2 extensões lineares de f_1 e f_2 respectivamente.
Retornando para $Z \subset X$ e usando $f = f_1 + if_2$, temos que para todo $x \in Z$,

$$\begin{gathered} f_1(ix) + if(ix) = f(ix) = if(x) = i[f_1(x) + if_2(x)] = -f_2(x) + if_1(x) \\ \Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix), \forall\ x \in Z. \end{gathered}$$

Daí, $f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \forall\ x \in Z$. Defina, $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix), \forall\ x \in X$, queremos mostrar que F é a extensão de f de Z para X, isto é, F é um funcional linear sobre X e $|F(x)| \leq p(x), \forall\ x \in X$.
De fato, sejam $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $x \in X$, temos que

$$\begin{gathered} F((a + ib)x) = F(ax + ibx) = F_1(ax + ibx) - iF_1(-bx + aix) \\ = aF_1(x) + bF_1(ix) + ibF_1(x) - aiF_1(ix) = a[F_1(x) - iF_1(ix)] + ib[F_1(x) - iF_1(ix)] \\ = (a + ib)[F_1(x) - iF_1(ix)] = (a + ib)F(x) \end{gathered}$$

Portanto, F é um funcional linear sobre X.
Notemos que se $x = 0$ a desigualdade $|F(x)| \leq p(x)$ é satisfeita.
Se $x \neq 0$, temos $F(x) \neq 0$ assim,
$F(x) = |f(x)|e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow |F(x)| = e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x)$
Logo, $F(e^{-i\theta}x) = ReF(e^{-i\theta}x)$. Daí,
$|F(x)| = F_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$. Com isso, o teorema fica demonstrado.

4. (a) Mostre através de exemplo que a extensão dada pelo Teorema de Hahn-Banach pode não ser única.
   (b) Seguindo a notação do Brézis, se $\overline{G} = E$, mostre que a extensão é única.

Solution:

(a) Sejam $E = \mathbb{R}^2$, $G = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e $g : G \to \mathbb{R}$, dada por $g(x, x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Considere $p(x, y) = \|g\||(x, y)|$ o funcional sublinear tal que $g(x, y) \leq p(x, y)$, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considere $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$. Observe que $f_1 = f_2 = g$ em G. E além disso, $\|f_1\| = \|f_2\| = \|g\| = 1$ e $f_1 \neq f_2$.

(b) Suponha que f_1 e f_2 sejam extensões de g. Dado $x \in G$, existe $(x_n) \subseteq G$ tal que $x_n \to x$, pois $\overline{G} = E$. Segue-se que

$$f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = f_2(x),$$

pois $f_{1|_G} = f_{1|_G} = g$. Pela unicidade de limite tem-se que $f_1 = f_2$.

5. Sejam G um subespaço do espaço vetorial E, e p, f como no Teorema de Hahn Banach. Se existem duas extensões de Hahn-Banach $F_0, F_1 : E \to \mathbb{C}$ de f então

$$F_s := sF_1 + (1-s)F_0, \ \ s \in [0,1]$$

também é uma extensão Hahn-Banach.

Solution: De fato, como F_0 e F_1 são extensões de f, temos que $F_0 \mid_G = F_1 \mid_G = f$ e $F_0(x) \leq p(x)$ e $F_1(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$, onde $p : E \to \mathbb{C}$ é tal que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ e $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x, y \in E$. Agora note que:

i) $F_s \mid_G = f$, para cada $s \in [0,1]$.
Seja $x \in G$. Então, para cada $s \in [0,1]$,

$$F_s(x) = sF_1(x) + (1-s)F_0(x) = sf(x) + (1-s)f(x) = f(x).$$

ii) $F_s(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.
Dado $x \in E$,

$$F_s(x) = sF_1(x) + (1-s)F_0(x) \leq sp(x) + (1-s)p(x) = p(x).$$

Portanto, F_s também é uma extensão Hahn-Banach de f.

6. Sejam E um espaço vetorial normado e G um subespaço de E. Mostre que G é denso se, e somente se, o único elemento de E^* que se anula em G é o funcional nulo.

Solution:
$\Rightarrow$)
Note que a função identicamente nula em E é um exemplo de função de E^* que se anula em G. Afirmamos que esta é única. Suponhamos, por contradição, que não, ou seja, que existe um funcional linear contínuo definido em E que se anula em G tal que $g(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in E/G$. Pela densidade de G em E conseguiriamos uma sequência $\{x_n\}$ convergindo para x_0 com $g(x_n) = 0$ para todo n. Daí, temos

$$g(x_0) = \lim g(x_n) = \lim 0 = 0.$$

O que é uma contradição.

$\Leftarrow$)
Suponhamos, por contradição, que G não é denso, ou seja, que o fecho $\overline{G}$ de G é diferente de E. Note que $\overline{G}$ continua sendo um subespaço vetorial de E. Considere um $y_0 \in E - \overline{G}$. Seja $N = \overline{G} + [y_0]$. Então para $z \in N$ existem únicos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in \overline{G}$ tais que $z = x + ay_0$. Defina

$$\varphi_0 : N \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_0(x + ay_0) = ad.$$

onde $d = dist(y_0, \overline{G})$, no caso d é diferente de 0. É claro que φ_0 é linear, $\varphi_0(\overline{G}) = 0$ e que $\varphi_0(y_0) = d$. Provemos que $\|\varphi_0\| = 1$. Seja $z = x + ay_0 \in N$. Para $a \neq 0$,

$$\|z\| = \|x + ay_0\| = |a| \left\| \frac{x}{-a} - y_0 \right\| \geq d\,|a| = |\varphi_0(z)|\,,$$

e para $a = 0$ a desigualdade $\|z\| \geq |\varphi_0(z)|$ é óbvia. Portanto, segue que $\|\varphi_0\| \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in \overline{G}$ tal que $d \leq \|y_0 - x_\epsilon\| \leq d + \epsilon$. Seja $z_\epsilon = \frac{y_0 - x_\epsilon}{\|y_0 - x_\epsilon\|}$. Então $z_\epsilon \in N$, $\|z_\epsilon\| = 1$ e

$$\varphi_0(z_\epsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\epsilon\|} \geq \frac{d}{d+\epsilon}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\|\varphi_0\| \geq 1$, e portanto $\|\varphi_0\| = 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in E^*$ que estende φ_0 a E tal que $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$. Daí chegamos a contradição, pois garantirmos a existência de outro funcional linear contínuo que se anula em $\overline{G}$ e é diferente do funcional identicamente nulo.

Solution: **(OUTRA SOLUÇÃO)**

$\Rightarrow$)

Queremos mostrar que o único elemento de E^* que se anula em G é o funcional nulo.

Note que o funcional identicamente nulo ($f \equiv 0$) em E é um exemplo de função de E^* que se anula em G.

$\vdash$: ($f \equiv 0$) é único.

Suponha por absurdo que exista outro funcional linear contínuo $g \in E^*$ que se anule em G tal que $g(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in E \setminus G$. Como G é denso em E existe um sequência $(x_n) \subset G$ tal que $x_n \to x_0$ com $g(x_n) = 0$, para todo n. Assim,

$$g(x_0) = lim g(x_0) = lim 0 = 0$$

O que é uma contradição, pois $g(x_0) \neq 0$.

$\Leftarrow$)

Agora temos por hipótese que o único elemento de E^* que se anula em G é ($f \equiv 0$). Queremos mostrar que $\overline{G} = E$.

Suponha por absurdo que G não é denso em E, ou seja que $\overline{G} \neq E$. Seja $x_0 \in E \setminus \overline{G}$ e considere o subconjunto $A = \overline{G}$ que é fechado, e convexo pois G é um subespaço. Considere também $B = \{x_0\}$ que é convexo e compacto. Pela $2^o FGTHB$ existe $f \in G^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ de maneira que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B estritamente. Portanto existe $\epsilon > 0$, tal que

$$f(x) + \epsilon \leq \alpha \leq f(x_0) - \epsilon \qquad \textit{para todo } x \in G,\ x_0 \in B,$$

$$f(x) < f(x) + \epsilon \leq \alpha \leq f(x_0) - \epsilon < f(x_0).$$

Em particular $f(x) < \alpha < f(x_0)$, para todo $x \in G$.

Como f é um funcional linear limitado em G ($f \in G^*$)

$$f(x) < \alpha \Rightarrow f(nx) < \alpha \Rightarrow nf(x) < \alpha \Rightarrow f(x) < \frac{\alpha}{n}$$

aplicando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n} = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0. \tag{6}$$

Por outro lado,

$$f(x) < \alpha \Rightarrow f(-nx) < \alpha \Rightarrow -nf(x) < \alpha \Rightarrow nf(x) > -\alpha \Rightarrow f(x) > \frac{-\alpha}{n}$$

aplicando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{-\alpha}{n} = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0. \tag{7}$$

De (6) e (7) concluímos que $f(x) = 0$ para todo $x \in G$, o que é um absurdo pois contradiz a hipótese de que o único funcional que se anula em G é o funcional nulo. Portanto, G é denso em E, ou seja, $\overline{G} = E$.

7. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Mostre que $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço de Banach se, e somente se, $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach.

Solution: A seguinte implicação: "Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço de Banach." está demonstrada no exercício 13 item *ii* da lista 3.
Vamos demonstrar a outra implicação: "Se $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach."

Considere f um funcional linear sobre $\mathcal{N}_1$ e $y \in \mathcal{N}_2$ um vetor qualquer. Podemos definir uma aplicação linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ por

$$Tx = f(x)y.$$

Note que, se f for um funcional linear limitado T também é uma aplicação linear limitada. De fato,

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|y\| \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|y\|\|f\|.$$

Faremos uso do seguinte resultado: Seja $\mathcal{N}_1$ um espaço vetorial normado. Para todo vetor não nulo $x_0 \in \mathcal{N}_1$ existe $f \in \mathcal{N}_1^*$ tal que $\|f\|_{\mathcal{N}_1^*} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.

De fato, considere $G = \text{span}(x_0)$ e o funcional linear $f : G \to \mathbb{R}$ definido por $g(x_0) = \|x_0\|$. Defina $p : \mathcal{N}_1 \to \mathbb{R}$ por $p(x) = \|g\|.\|x\|$, $x \in \mathcal{N}_1$. Note que, p assim definido é um funcional sublinear,pois

- $p(\alpha x) = \alpha\|g\|.\|x\|$, $\forall \alpha \geq 0$ e $x \in \mathcal{N}_1$.
- $p(x + y) = \|f\|.\|x + y\| \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{N}_1$.
- E além disso, $g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|\|x\| = p(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}_1$.

Aplicando T.H.B. no subespaço G e ao funcional limitado g, concluímos que existe um funcional linear limitado $f \in \mathcal{N}_1^*$ tal que $f_{|_G} = g$ e $f(x) \leq p(x)$.

Seja $f : \mathcal{N}_1 \to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = \|x\|$ uma extensão de g. Note que $f(x) = \|x\| \leq p(x) = \|g\|.\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{N}_1$, ou seja, $\|f\| \leq \|g\|$. Por outro lado,

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{N}_1, \|x\| \leq 1} |f(x)| \geq \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)|$$

,ou seja, $\|f\| \geq \|g\|$. Portando, $\|f\| = \|g\| = 1$.

Sendo assim, dada $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{N}_2$. Por este último resultado, existe $f \in \mathcal{N}_1^*$ tal que $\|f\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina uma aplicação linear $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ por

$$T_n x = f(x)y_n.$$

Então $\|T_n\| = \|y_n\|$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Como $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é uma espaço de Banach, segue que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Em particular, $T_n x \to Tx$ para todo $x \in \mathcal{N}_1$. Escolhendo $x \in \mathcal{N}_1$ tal que $f(x) = 1$, segue-se que $T_n x = y_n$, e portanto $y_n \to Tx$. Logo concluímos que $\mathcal{N}_2$ também é um espaço de Banach.

8. Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ espaços normados não-triviais. Prove que se qualquer operador linear limitado não-nulo $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é sobrejetor, então dim$\mathcal{N}_2$=1.

Solution: Suponha que $dim\mathcal{N}_2 > 1$. Logo, tome $\{e_1, e_2\} \subset \mathcal{N}_2$ um conjunto LI de vetores unitários e considere $\{\tilde{e}_j\}_{j \in \Lambda}$ uma base de $\mathcal{N}_1$ unitária onde Λ pode ser finito ou infinito. Assim, defina o operador $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, tal que $f(\tilde{e}_1) = e_1, f(\tilde{e}_j) = 0$ $\forall j > 1$. Vemos que f é linear, pois, para todo $x = \sum_{i \in \Lambda} x_i \tilde{e}_i$, $y = \sum_{i \in \Lambda} y_i \tilde{e}_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x+\lambda y) = f(\sum_{i\in\Lambda}(x_i+\lambda y_i)\tilde{e}_i) = (x_1+\lambda y_1)e_1 = x_1e_1+\lambda y_1 e_1 = f(x)+\lambda f(y)$$

Além disso, $\forall x \in \mathcal{N}_1$

$$\frac{f(x)}{|x|} = \frac{|x_1e_1|}{|x|} = \frac{|x_1|}{|x|} < 1$$

Por fim, vemos que f não é sobrejetiva, pois a imagem de $\mathcal{N}_1$ pela f é apenas um eixo dado pelo $span\{e_1\}$, logo não é sobrejetivo nem mesmo em $span\{e_1, e_2\}$, com mais razão, não é sobrejetivo sobre $\mathcal{N}_2$. Pela contrapositiva, temos o resultado.

9. Mostre que todo funcional linear não nulo é sobrejetivo.

Solution: Sejam E um espaço vetorial e $f: E \to \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo. Como f é não nulo existe pelo menos um $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$, considere $\beta \in \mathbb{R}$ e tome $\lambda = \frac{\beta}{f(x)}$. Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lambda f(x) \ \text{(linearidade do funcional f)} \\ &= \frac{\beta}{f(x)} f(x) = \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como $\beta \in \mathbb{R}$ é qualquer, segue que $f(E) = \mathbb{R}$. Donde f é sobrejetivo, pela arbitrariedade do funcional f, o resultado segue.

10. Seja E um espaço normado real e $x \in E$. Mostre que

$$\|x\| = \sup_{f\in E^*,\ f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Conclua que a aplicação $J: E \to E^{**}$ definida por $x \mapsto J(x) = J_x \in E^{**}$, onde

$$J_x(f) = \langle f, x\rangle,\ f \in E^*$$

é uma isometria.

Solution: Utilizaremos o seguinte resultado auxiliar: "Se $0 \neq x \in E$, então existe $f \in E^*$ com $f(x) = \|x\|$ e $\|f\| = 1$. "esse resultado pode ser demonstrado utilizando o Teorema de Hahn-Banach sob as seguintes condições. O funcional sublinear é

$$p: E \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = \|x\|$$

o subespaço gerado por x, $G =< x >= \mathbb{R}x$, e o funcional linear $g: G \to \mathbb{R}$, definido como $g(\alpha x) = \alpha\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Com esse resultado, quando $x = 0$ o a demonstração é direta. Suponha que $x \neq 0$; assim existe $h \in E^*$ com $\|h\| = 1$ e $h(x) = \|x\|$, de tal forma que:

$$\|x\| = \frac{h(x)}{\|h\|} \leq \sup_{f\in E^*,\ f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \sup_{f\in E^*,\ f\neq 0} \frac{\|f\|\|x\|}{\|f\|} = \|x\|$$

Dessa maneira, temos que a aplicação $J: E \to E^{**}$, definida acima é uma isometria.

11. Seja E um espaço normado, $M \subseteq E$ um subespaço fechado e $x_0 \in E\backslash M$. Se

$$d = dist(x_0, M),$$

mostre que existe $f_0 \in E^*$ tal que $f_{0|M} = 0$, $f_0(x_0) = 1$ e $\|f_0\| = 1/d$.

Solution: Sejam

$$G = M \oplus \langle x_0 \rangle \subset E$$

onde

$$\langle x_0 \rangle = \{y \in E : y = \alpha x_0 \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\begin{array}{cccc} g & : & G & \to & \mathbb{R}\,. \\ & & x + \alpha x_0 & \mapsto & \alpha \end{array}$$

Perceba que:

1. $g(x_0) = 1$:
$$g(x_0) = g(0 + 1x_0) = 1;$$

2. $M \subset \ker(g)$:
$$g(x) = g(x + 0x_0) = 0, \quad \forall\, x \in M;$$

3. $\mid g(x + \alpha x_0) \mid \leqslant \dfrac{1}{d}\|x + \alpha x_0\|$:
$$0 < d = \inf_{x \in M} \|x - x_0\| \ \Rightarrow \mid \alpha \mid = \frac{\|\alpha(-x + x_0)\|}{\| - x + x_0\|} \leqslant \frac{1}{d}\| - \alpha x + \alpha x_0\|, \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$
de onde segue que
$$\mid g(x + \alpha x_0) \mid = \mid \alpha \mid \leqslant \frac{1}{d}\| - \alpha \frac{x}{-\alpha} + \alpha x_0\| = \|x + \alpha x_0\|, \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, \alpha \neq 0,$$
sendo óbvia a desigualdade no caso em que $\alpha = 0$ e assim, $g \in G^*$ com $\|g\| \leqslant \dfrac{1}{d}$;

4. $\|g\| = \dfrac{1}{d}$:

   considere uma sequência de pontos $x_n \in M$ para a qual $\|x_n - x_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$ e veja que
$$g\Big(\frac{-x_n + x_0}{\| - x_n + x_0\|}\Big) = \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{d},$$
de onde segue que $\|g\| = \dfrac{1}{d}$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f_0 \in E^*$ tal que $f_0|_G = g$ e $\|f_0\| = \|g\| = \dfrac{1}{d}$. Observe que:

1. $x_0 \in G \quad \Longrightarrow \quad f_0(x_0) = g(x_0) = 1;$
2. $x \in M = \ker(g) \subset G \quad \Longrightarrow \quad f_0(x) = g(x) = 0.$

Isto encerra nossa argumentação.

12. Dados dois espaços normados E, F e $T : E \to F$ linear, mostre que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se $\dim E < \infty$. Conclua que um funcional linear $f : E \to \mathbb{R}$ pertence a E^* se $\dim E < \infty$.

Solution: (*Lemma, Kreyszig, pg. 72*) Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um subconjunto LI de um espaço normado X de dimensão n. Então existe um $c > 0$, tal que, para qualquer escolha de escalares

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, temos que:

$$\|\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Vamos agora ao exercício. Primeiramente, considere $dimE = n$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Assim, todo elemento de E pode ser escrito como $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$. Como T é linear, temos que

$$\|Tx\|_2 = \|\sum_{i=1}^{n} \xi_i T e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \|Te_i\|_2 \leq \max_k \|Te_k\|_2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

Agora, tome $\alpha_i = \xi_i$ e $x_i = e_i$ como no lemma acima. Assim, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \leq \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\|_2 = \frac{1}{c}\|x\|_1$$

Logo,

$$\|Tx\|_2 \leq \gamma \|x\|_1$$

onde $\gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|_2$. Ou seja, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

13. Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e M um subespaço de E. Considere

$$M^{\perp} := \{f \in E^* | \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M\}.$$

Mostre que $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

Solution: Mostremos inicialmente que $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. De fato, tome $x \in M$, Assim,

$$\langle f, x \rangle = 0 \ \forall f \in M^{\perp},$$

ou ainda, $x \in E; \langle f, x \rangle = 0 \ \forall f \in M^{\perp}$. Logo, $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. Agora vamos mostrar que $(M^{\perp})^{\perp}$ é fechado. Para isso tome $(x_n) \in (M^{\perp})^{\perp}$; $x_n \to x$. Como

$$\begin{aligned} (x_n) \in (M^{\perp})^{\perp} &\implies \langle f, x_n \rangle = 0 \quad \forall f \in M^{\perp} \\ \text{(tomando o limite com} \quad n \to \infty) &\implies \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in M^{\perp} \\ &\implies x \in (M^{\perp})^{\perp}. \end{aligned}$$

Assim, $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{(M^{\perp})^{\perp}}$, como $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow \overline{M} \subseteq \overline{(M^{\perp})^{\perp}} = (M^{\perp})^{\perp}$ Agora, suponhamos por absurdo que $(M^{\perp})^{\perp} \not\subseteq \overline{M}$, ou seja ,$\exists x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$; $x_0 \notin \overline{M}$. Faça $A = \overline{M}$ e $B = x_0$. Logo, $A \cap B = \emptyset$. A-fechado, B- é compacto e ambos são convexos. Então, pela segunda forma geométrica de Hahn-Banach, temos que $\exists f \in E^*$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(a) < \alpha < f(b); \quad a \in A \quad \text{e} \quad b \in B \implies f(x) < \alpha < f(x_0), \forall x \in A$$

Mas $A \subseteq E \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad x \in A$, tem-se $tx \in A$. Assim:

$$f(tx) < \alpha < f(x_0)$$

Logo, se $t > 0$

$$\begin{aligned} f(tx) < \alpha &\implies f(x) < \frac{\alpha}{t} \\ &\implies f(x) \leq 0, \forall x \in A, \quad \text{quando} \quad t \to \infty \end{aligned}$$

De modo análogo, quando assumimos que $t < 0$, chegamos à $f(x) \geq 0, \forall x \in A$, quando $t \to \infty$, ou seja, teremos que $f(x_0) > 0$. O que é uma contradição!!, pois $x_0 \in (M^\perp)^\perp$. Logo, $(M^\perp)^\perp \subseteq \overline{M}$, Assim temos o resultado esperado: $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

14. Sejam E espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset E$ convexos disjuntos. Suponha que A tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in E^*, f \not\equiv 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa A e B.

Solution:

(a) $\text{Int}(A)$ é um conjunto convexo:

Dados $x, y \in \text{Int}(A)$ quaisquer, existe $\delta > 0$ para o qual $B(x, \delta) \subset A$ e $B(y, \delta) \subset A$. Para todos $t \in [0, 1]$ e $z \in B(tx + (1-t)y, \delta)$, nós temos que

$$z = [tx + (1-t)y] + v,$$

onde $v \in B(0, \delta)$. Note que

$$\begin{cases} z - (1-t)(y-x) &= (z - [tx + (1-t)y]) + x \\ &= v + x \qquad\qquad \in B(x, \delta) \subset A, \\ \\ z - t(x-y) &= (z - [tx + (1-t)y]) + y \\ &= v + y \qquad\qquad \in B(y, \delta) \subset A, \end{cases}$$

e assim, que

$$\begin{aligned} z &= v + [tx + (1-t)y] \\ &= t(v+x) + (1-t)(v+y) \in A, \end{aligned}$$

já que A é convexo. Segue daí que $B(tx + (1-t)y, \delta) \subset A$ e $\text{Int}(A)$ é, por esta razão, um conjunto convexo.

(b) Se o par $f \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ separa aos conjuntos $\text{Int}(A), B \subset E$ ele também separa a $A, B \subset E$. Observe que:

1. $\text{Int}(A), B \subset E$ são convexos;
2. $\text{Int}(A)$ é aberto em E;
3. $\text{Int}(A), B \subset E$ são disjuntos:

$$(\text{Int}(A) \cap B) \subset (A \cap B) = \emptyset \implies \text{Int}(A) \cap B = \emptyset.$$

Existem, de acordo com a *Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach*, $f \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais $\text{Int}(A) \subset [f \leqslant \alpha]$ e $B \subset [f \geqslant \alpha]$. Se $x \in A \setminus \text{Int}(A) \subset \partial(A)$ existe uma sequência de pontos $x_n \in \text{Int}(A)$ tais que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Como $f \in E^*$ é contínua, isto implica que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \alpha$$

e assim, $A \subset [f \leqslant \alpha]$.

Notação:

$$[f \leqslant \alpha] = \{x \in E : f(x) \leqslant \alpha\},$$

$$[f \geqslant \alpha] = \{x \in E : f(x) \geqslant \alpha\}.$$