AF - Lista 01

Professor Marcos Leandro
Turma de Doutorado 2018

20 de Abril de 2018

1. Se $E = (E, \|.\|)$ é um espaço vetorial normado real e $d(x,y) = \|x-y\|,\ x,y \in E$, mostre que d é uma métrica em E e portanto, que (E,d) é um espaço métrico.

Solution: Para mostrar que d é uma métrica em E, dados $x,y,z \in E$, vamos mostrar que d satisfaz às seguintes propriedades:

- $d(x,x) = 0$.
  De fato, $d(x,x) = \|x-x\| = \|0\| = 0$, onde a segunda igualdade segue do fato de que E é espaço vetorial e a última igualdade segue da propriedade da norma.
- $d(x,y) > 0$, se $x \neq y$.
  Segue da propriedade da norma que $d(x,y) = \|x-y\| > 0$, pois $x - y \neq 0$.
- $d(x,y) = d(y,x)$.
  Temos também pela propriedade da norma que $d(x,y) = \|x-y\| = |-1|\|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
  Pela Desigualdade Triangular válida para a norma, segue que

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto (E,d) é um espaço métrico.

2. Dados $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ e $q > 0$ com $1/p + 1/q = 1$ valem:
   (a) para $a, b \geq 0$,
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \textbf{(Des. Young)}$$
   (b) para $x_i, y_i \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\big)^{1/p} \big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\big)^{1/q}, \qquad \textbf{(Des. Hölder)}\ ,$$
   (c) para $x_i, y_i \in \mathbb{R}$,
$$\|x+y\|_p := \big(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\big)^{1/p} \leq \big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\big)^{1/p}, \qquad \textbf{(Des. Minkowski)}\ .$$

Solution:

(a) Nesse item faremos a desigualdade para $p, q > 1$. Consideremos a função, $f(x) = x^{p-1}$ definida em $(0, \infty)$, observe que:

$$A_1 = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}.$$

Note que a função $g(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ é a inversa de $f(x)$ em $(0, \infty)$. Além disso

$$A_2 = \int_0^b g(y)dy = \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{b^q}{q}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que, $a < b$. Fazendo o gráfico da função f podemos ver facilmente que:

$$ab \leq A_1 + A_2.$$

O que prova a desigualdade de Young.

(b) Utilizaremos o item (i) para os seguintes números:

$$a = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \qquad \forall \quad k \geq 1$$

Temos que,

$$\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\left(\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q}{q}.$$

Passando o somatório em k, variando de 1 até N, obtemos:

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \sum_{k=1}^N |x_k y_k| \leq \frac{1}{p\sum_{i=1}^N |x_i|^p} \sum_{k=1}^N |x_k|^p + \frac{1}{q\sum_{i=1}^N |y_i|^q} \sum_{k=1}^N |y_k|^q.$$

Usando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e reindexando os índices teremos a desigualdade requerida.

(c) Agora para o item (iii), utilizaremos a desigualdade de Hölder,

$$(\|x+y\|_p)^p \quad = \quad \sum_{i=1}^N |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^N (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1},$$

dessa maneira teremos a desigualdade:

$$\begin{aligned}
(\|x+y\|_p)^p &\leq \sum_{i=1}^N |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^N |y_i||x_i + y_i|^{p-1}. \quad \text{(Usando Hölder, obteremos)} \\
&\leq \|x\|_p \|(|x_1 + y_1|^{p-1}, ..., |x_n + y_n|^{p-1})\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&+ \|y\|_p \|(|x_1 + y_1|^{p-1}, ..., |x_n + y_n|^{p-1})\|_{\frac{p}{p-1}}, \\
&= (\sum_{i=1}^N |x_i + y_i|^p)^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

3. Mostre que:
   (a) $\|.\|$, $\|.\|_S$, $\|.\|_M$ são normas equivalentes em $\mathbb{R}^N$;
   (b) Se $N = 2$, então $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_M$;
   (c) Duas normas em um espaço de dimensão finita são equivalentes.

Solution:

(a) (Primeira solução) Pelo item *iii*, temos: "Se X é um espaço vetorial de dimensão finita, então todas as normas em X são equivalentes." Em particular, as normas $\|.\|$, $\|.\|_S$, $\|.\|_M$ são normas equivalentes em $\mathbb{R}^N$, pois $\mathbb{R}^N$ é um espaço vetorial de dimensão n.

(Segunda solução) Basta mostrar que as normas são duas a duas equivalentes. Inicialmente, mostraremos que $\|.\| \sim \|.\|_S$.
Pela definição de normas equivalentes, precisamos encontrar $A, B > 0$, de forma que, $A\|x\|_S \leq \|x\| \leq B\|x\|_S$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.
Afirmação 1: $\|.\| \leq B\|.\|_S$.
Dado $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Logo $\|x\| \leq 1\|x\|_S$ e B=1.

Afirmação 2: $A\|.\|_S \leq \|.\|$

$|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ para cada $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.
Somando as desigualdades, temos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Logo $\frac{1}{n}\|x\|_S \leq \|x\|$ e $A = \frac{1}{n}$.

Agora mostremos que $\|.\|_S \sim \|.\|_M$.
Por definição precisamos encontrar $A, B > 0$, de forma que,
$A\|x\|_M \leq \|x\|_S \leq B\|x\|_M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Observe que $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max\limits_i \{|x_i|\}$.
Logo $B = n$. Por outro lado,

$$\max_i \{|x_i|\} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Logo $A = 1$.
Por fim, $\|.\| \sim \|.\|_M$. Pela transitividade da relação de equivalência, temos

$$\|.\| \sim \|.\|_S, \quad \|.\|_S \sim \|.\|_M \Rightarrow \|.\| \sim \|.\|_M.$$

(b) Basta provar que $\|x\|_M \leq \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \|x\|_M$.

De fato,

Se $N = 2$ tem-se, então dado um vetor $x \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$.

$$\|x\|_p = \|x_1\|^p + \|x_2\|^p \leq 2\max\{\|x_1\|^p, \|x_2\|^p\}$$

$$(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} (\max\{\|x_1\|^p, \|x_2\|^p\})^{\frac{1}{p}}$$

Aplicando limite com $p \to \infty$, tem-se:

$$\lim_{p\to\infty} (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{p\to\infty} 2^{\frac{1}{p}} (\max\{\|x_1\|^p, \|x_2\|^p\})^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{p\to\infty} (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

Logo $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \|x\|_M$. Observe ainda que

$$\max\{\|x_1\|^p, \|x_2\|^p\} \leq \|x_1\|^p + \|x_2\|^p$$

$$(\max\{\|x_1\|^p, \|x_2\|^p\})^{\frac{1}{p}} \leq (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Aplicando limite com $p \to \infty$, tem-se:

$$\lim_{p\to\infty} \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \leq \lim_{p\to\infty} (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \leq \lim_{p\to\infty} (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Logo $\|x\|_M \leq \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$. Portanto segue que $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_M$.

(c) Sejam $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ uma norma em X e $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base para X. Dado $\xi \in X$, existem $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in \mathbb{F}$, onde $n = \dim X$, tal que, $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$. Basta mostrar $\|.\|$ é equivalente a $\|.\|_* = \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|$. Segue que

$$\|\xi\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \|e_i\| \leq \left(\max_i \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = B\|\xi\|_*.$$

Para obter a outra desigualdade, suponha por absurdo, que não exista $A > 0$ com $A\|\xi\|_* \leq \|\xi\|$, para todo $\xi \in X$. Dessa forma, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\xi_N \in X$ com $\|\xi_N\|_* = 1$ e $1 = \|\xi_N\|_* > N\|\xi_N\|$. Como $S(0;1)$ é compacta, existe uma subsequência (ξ_{N_j}) de (ξ_N) convergindo para ξ_0 em $(X, \|.\|_*)$, pela continuidade da norma vem que $\|\xi_0\|_* = 1$. Assim, usando a desigualdade obtida acima,

$$\|\xi_0\| \leq \|\xi_0 - \xi_{N_j}\| + \|\xi_{N_j}\| \leq B\|\xi_0 - \xi_{N_j}\| + \frac{1}{N_j}$$

que converge a zero quando $j \to \infty$, ou seja, $\|\xi_0\| = 0$ e $\xi_0 = 0$, contradição, pois $\|\xi_0\|_* = 1$.

4. Dado $p \in [1, \infty)$ considere

$$\ell_p \ = \big\{x = (x_1, x_2, \cdots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\big\},$$

$$\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\big)^{1/p}.$$

(a) Mostre que $E = (\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço normado.

(b) Se $x \in \ell^p \cap \ell^q$, $1 \leq p \leq q < \infty$, então $x \in \ell^r$, para todo $r \in [p, q]$. Além disso, prove que

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p^{\alpha} \|x\|_q^{1-\alpha}, \text{ onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

(c) Seja $1 \leq p \leq q < \infty$. Mostre que $\ell^p \subset \ell^q$. Além disso, prove que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, $\forall x \in \ell^p$.

(d) Prove que para $1 \leq p < \infty$ teremos que $\ell^p \subset c_0$.

Solution:

(i) Mostre que $E = (\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço normado.

Vamos denotar por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Assim, dados $x = (x_1, x_2, \cdots)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots)$ em ℓ^p e α em $\mathbb{K}$, definimos as operações

$$x + y = (x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots),$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots).$$

Assim, ℓ^p é um espaço vetorial, já que as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas para os números reais que compõem cada coordenada de um elemento em ℓ^p. Note que os elementos resultantes das operações ainda pertencem a ℓ^p, pois:

- pela Desigualdade de Minkowski e pelo fato de que $x, y \in \ell^p$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p < \infty$$

$$\Rightarrow \quad (x + y) \in \ell^p;$$

- pela propriedade do módulo em números reais e pelo fato de que $x \in \ell^p$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_i|^p = |\alpha|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \quad \Rightarrow \quad (\alpha x) \in \ell^p$$

.

Além disso, para mostrar que $\|.\|_p$ é norma, note que:

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$, pois é soma de números não negativos, e
  $\|x\|_p = 0 \iff |x_i| = 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N} \iff x = 0;$
- $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p;$
- $\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p,$
  onde a desigualdade é devido à desigualdade de Minkowski.

Portanto $(\ell^p, \|.\|_p)$ é espaço normado.

(ii) Se $x \in \ell^p \cap \ell^q,\ 1 \le p \le q < \infty$, então $x \in \ell^r$, para todo $r \in [p, q]$. Além disso, prove que

$$\|x\|_r \le \|x\|_p^{\alpha} \|x\|_q^{1-\alpha}, \text{ onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Seja $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^p \cap \ell^q$, então $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q < \infty$. O inciso (iii), seguinte a provar, garanta que $x \in \ell^r$.

Como $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, então $1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$, onde $p' = \frac{p}{\alpha r}$ e $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$, logo podemos fazer uso da desigualdade de Hölder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\|x\|_r &= \|x^{\alpha} x^{1-\alpha}\|_r \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i^{\alpha}||x_i^{1-\alpha}|)^r\Big)^{1/r} \\
&\le \Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i^{\alpha}|)^{rp'}\Big)^{1/p'} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i^{1-\alpha}|)^{rq'}\Big)^{1/q'}\Big]^{1/r} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i^{\alpha}|)^{p/\alpha}\Big)^{\alpha/p} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i^{1-\alpha}|)^{q/(1-\alpha)}\Big)^{(1-\alpha)/q} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|)^{p}\Big)^{\alpha/p} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|)^{q}\Big)^{(1-\alpha)/q} \\
&= \|x\|_p^{\alpha} \|x\|_q^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

(iii) Seja $1 \le p \le q \le \infty$. Mostre que $\ell^p \subset \ell^q$. Além disso, prove que $\|x\|_q \le \|x\|_p,\ \forall x \in \ell^p$.

Seja $x \in \ell_p$, então $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ e portanto $|x_i|^p \longrightarrow 0$ sempre que $i \longrightarrow \infty$, logo existe i_0 com a propriedade $|x_i|^p < 1$ para todo $i > i_0$. O fato que $|x_i|^p < 1$ implica que $|x_i| < 1$ e assim $|x_i|^q \le |x_i|^p$ para todo $i > i_0$ e portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q = \sum_{i=1}^{i_0} |x_i|^q + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |x_i|^q \le \sum_{i=1}^{i_0} |x_i|^q + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

portanto $x \in \ell_q$.

Seja $\hat{x} = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ para $i = 1, 2, \cdots$, então para todo $i = 1, 2, \cdots$ cumpre-se que $\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \le 1$ e assim $\big(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\big)^q \le \big(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\big)^p$, onde fazendo a soma para todo $i \in \mathbb{N}$ obtemos $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

(iv) Prove que para $1 \le p < \infty$ teremos que $\ell^p \subset c_0$.

O resultado segue da definição de serie convergente, de fato, se $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^p$, implica que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ ou melhor $|x_i|^p \longrightarrow 0$ quando $i \longrightarrow \infty$, portanto $x \in c_0$.

5. Considere

$$\begin{aligned}
\ell_{\infty} &= \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ é limitada}\big\}, \\
\|x\|_{\infty} &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.
\end{aligned}$$

Mostre que $E = (\ell_{\infty}, \|.\|_{\infty})$ é um espaço normado.

Solution: Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Note que

$$X = \{x = (x_1, x_2, ...) \mid \ x_i \in \mathbb{K}, \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

é um espaço vetorial (com a soma e produto por escalar usual). Seja $x, y \in \ell_\infty$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\sup |\alpha x_i + \beta y_i| \leq \sup(|\alpha x_i| + |\beta y_i|) \leq \sup |\alpha x_i| + \sup |\beta y_i| = |\alpha| \sup |x_i| + |\beta| \sup |y_i| . \tag{1}$$

Daí, podemos afirmar que

$$\sup |\alpha x_i + \beta y_i| \leq |\alpha| \, \|x\|_\infty + |\beta| \, \|y\|_\infty < \infty \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in \ell_\infty.$$

Portanto, ℓ_∞ é um subespaço vetorial de X, e portanto, um espaço vetorial. Agora, basta provarmos que $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$ é uma norma. Vejamos:

- $\|x\|_\infty = \sup |x_i| \geq 0$,
- $\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \sup |x_i| = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\|_\infty = \sup |\alpha x_i| = |\alpha| \sup |x_i| = |\alpha| \, \|x\|_\infty$,
- Basta fazer $\alpha = \beta = 1$ em (1) e usar a definição de $\|.\|_\infty$.

Obs: Todos os supremos estão com respeito ao índice i da sequência.

6. Considere

$$c = \left\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ é convergente}\right\},$$

$$c_0 = \left\{x \in c \mid \lim_{i \to \infty} x_i = 0\right\},$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Mostre que $E = (c, \|.\|_\infty)$ e $E = (c_0, \|.\|_\infty)$ são espaços normados.

Solution: Notemos inicialmente que basta mostrar que c e c_0 são subespaços vetoriais de $\ell_\infty(\mathbb{C})$, e que $(\ell_\infty(\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado, uma vez que norma restrita a subespaço vetorial ainda é norma. Mostremos inicialmente que $(\ell_\infty(\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ é um e.v.n. Sejam, pois, dados (x_i) e (y_i) em ℓ_∞ e $\lambda \in \mathbb{C}$

1. Que ℓ_∞ é espaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$), pode ser verificado de maneira inteiramente análoga ao exercício anterior, com as "mesmas" operações

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \quad \text{e} \quad \lambda(x_i) = (\lambda x_i);$$

2. $\|(x_i)\|_\infty = \sup_i |x_i| \geq 0$, e vale a igualdade se, e somente se, $x_i = 0$, $\forall i$, se e somente se $x = 0$;
3. $\|\lambda(x_i)\|_\infty = \sup_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sup_i |x_i| = |\lambda| \|(x_i)\|_\infty$;
4. $\|(x_i) + (y_i)\|_\infty = \sup_i |x_i + y_i| \leq \sup_i (|x_i| + |y_i|) \leq \sup_i |x_i| + \sup_i |y_i| = \|(x_i)\|_\infty + \|(y_i)\|_\infty$.

Portanto, $(\ell_\infty(\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ é um e.v.n., como afirmamos. Mostremos agora que c e c_0 são subespaços vetoriais de ℓ_∞,

5. Como sequências convergentes são limitadas, temos que c e c_0 são subconjuntos de ℓ_∞;

6. $0 = (0, 0, \cdots) \in c \cap c_0$, pois sequências constantes convergem (para essa constante, neste caso zero);

7. Se $x = (x_i),\ y = (y_i) \in c$ são tais que $x_i \to a$ e $y_i \to b$ quando $i \to \infty$, e $\lambda \in \mathbb{C}$, então pela continuidade da soma e da multiplicação por escalar, temos que $\lambda x + y = (\lambda x_i + y_i)$ é tal que
$$\lambda x_i + y_i \xrightarrow{i \to \infty} \lambda a + b, \tag{2}$$
e daí temos que $\lambda x + y \in c$. De (2) decorre ainda que, se $x, y \in c_0$, ou seja, se $a = b = 0$, temos que $\lambda x + y \in c_0$.

Segue então que c e c_0 são subespaços vetoriais de ℓ_∞. Com isso, completamos o exercício.

7. Defina
$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt,\ x \in C([0,1]).$$
Mostre que $E = (C([0,1]), \|.\|_1)$ é um espaço normado.

Solution: Primeiramente, mostraremos que E é um espaço vetorial. Para isso, considere $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ em $C([0,1])$, arbitrárias. Logo

- **COMUTATIVIDADE**: $x(t) + y(t) = y(t) + x(t), \forall t \in [0,1]$.
- **ASSOCIATIVIDADE**:$(x(t)+y(t))+z(t) = x(t)+(y(t)+z(t))$, $\alpha(\beta x(t)) = (\alpha\beta)x(t), \forall t \in [0,1]$.
- **VETOR NULO**: $\exists 0 \in C([0,1])$, dado por $0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $x(t) + 0 = 0 + x(t) = x(t), \forall t \in [0,1]$.
- **INVERSO ADITIVO**:Para cada $x \in C([0,1])$ existe um $-x \in C([0,1]$, tal que $x(t) - x(t) = -x(t) + x(t) = 0, \forall t \in [0,1]$.
- **DISTRIBUTIVIDADE**: $(\alpha+\beta)x(t) = \alpha x(t)+\beta y(t), \alpha(x(t)+y(y)) = \alpha x(t)+\beta y(t), \forall t \in [0,1]$.
- **MULTIPLICAÇÃO POR 1**: $1.x(t) = x(t), \forall t \in [0,1]$.

Agora, mostraremos que $\|\|_1$ é norma. Primeiramente, temos que
$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt \geq 0$$
E
$$\|x\|_1 = 0 \iff \int_0^1 |x(t)|dt = 0 \iff |x(t)| = 0, \forall t \in [0,1] \iff x = 0$$
Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que
$$\|\lambda x\|_1 = \int_0^1 |\lambda x(t)|dt = \int_0^1 |\lambda||x(t)|dt = |\lambda| \int_0^1 |x(t)|dt = |\lambda|\|x\|_1$$
E
$$\|x+y\|_1 = \int_0^1 |x(t)+y(t)|dt \leq \int_0^1 |x(t)| + |y(t)|dt = \int_0^1 |x(t)|dt + \int_0^1 |y(t)|dt = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
Isso mostra que E é espaço vetorial normado.

8. Dado um espaço normado $E = (E, \|.\|)$ mostre que:
   (a) $\Big| \|x\| - \|x\| \Big| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in E,$
   (b) se $x_n \to x$ então $\|x_n\| \to \|x\|$,
   (c) se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $x_n + y_n \to x + y$,
   (d) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_n \to x$ então $\alpha x_n \to \alpha x$.

Solution:

(a) Sejam $x, y \in E$. Notemos que,

$$\begin{cases} \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \text{ e} \\ \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\| \end{cases} \Rightarrow \pm(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$$

Portanto, $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$.

(b) Temos que $x_n \to x$, isto é, $\|x_n - x\| \to 0$. Notemos pelo item (a) que,

$$\|x_n - x\| \geq \Big| \|x_n\| - \|x\| \Big| \Rightarrow \Big| \|x_n\| - \|x\| \Big| \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\| \to \|x\|.$$

Portanto, $\|x_n\| \to \|x\|$.

(c) Temos que $x_n \to x$ e Temos que $y_n \to y$, isto é, $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|y_n - y\| \to 0$. Daí,

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| = \|x_n - x + y_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

Portanto, $x_n + y_n \to x + y$.

(d) Temos que $x_n \to x$, isto é, $\|x_n - x\| \to 0$. Daí,

$$\|\alpha x_n - \alpha x\| = \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha| \|x_n - x\| \to 0.$$

Portanto, $\alpha x_n \to \alpha x$.

9. Prove que $E = (C([0, 1]), \| \cdot \|_1)$ não é completo.

Solution: Lembremos que $|f|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Tomemos $f_n(t) = t^n$, para $t \in [0, 1]$. Sabemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$. Temos ainda que

$$n < m \Rightarrow |f_n - f_m|_1 = \int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^n - t^m) dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \xrightarrow{n,m} 0,$$

e, portanto $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy. No entanto, $\{f_n\}$ não converge para em $C[0, 1]$. De fato,

$$\lim_{t \to \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{se } t = 1 \end{cases} =: f(t).$$

Note que

$$|f_n - f|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

e portanto, a sequência $\{f_n\} \subset E$ coverge para f que, por ser descontínua, pertence a E. Com isso, mostramos que E não é completo, pois possui uma sequência de Cauchy que não converge para um de seus pontos.

10. Dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mostre que $E = (C(\overline{\Omega}), |.|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Solution: Consideremos em $C(\overline{\Omega}) = \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}; \text{ f é contínua}\}$ a norma $|f|_\infty = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$. Provemos que:

- $C(\overline{\Omega})$ é espaço vetorial;
  De fato, para $f, g \in C(\overline{\Omega})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos as operações
  $$f + g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in \overline{\Omega},$$
  $$\alpha f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$
  Dessa forma, $C(\overline{\Omega})$ é um espaço vetorial, pois os elementos resultantes das operações ainda pertencem a $C(\overline{\Omega})$, já que a soma de funções contínuas ainda é uma função contínua, e o produto de uma função contínua por um escalar ainda é uma função contínua. Além disso, as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas para os números reais que compõem o contradomínio das funções em $C(\overline{\Omega})$.

- $|.|_\infty$ é norma;
  De fato, note que $|.|_\infty$ está bem definida. Temos que $\overline{\Omega}$ é um compacto e as funções em $C(\overline{\Omega})$ são contínuas. Além disso, a função modular também é contínua, donde concluímos que o conjunto $\{|f(x)|; x \in \overline{\Omega}\}$ é compacto, para cada $f \in C(\overline{\Omega})$, e portanto possui valor supremo.

  Agora, sejam $f, g \in C(\overline{\Omega})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

  i) $|f|_\infty = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \geq 0$, pois é supremo de valores não negativos;
  e $|f|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in \overline{\Omega} \Leftrightarrow f = 0$.

  ii) $|\alpha f|_\infty = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\alpha f(x)| = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\alpha||f(x)| = |\alpha| \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| = |\alpha||f|_\infty$;

  iii) $|f+g|_\infty = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)+g(x)| \leq \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + |g(x)| \leq \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |g(x)| = |f|_\infty + |g|_\infty$, onde a desigualdade segue da desigualdade triangular de números reais.

- $(C(\overline{\Omega}), |.|_\infty)$ é completo;
  Seja $(f_m)_{m=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
  $$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |f_m - f_n|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon. \tag{3}$$
  Assim, para qualquer $x_0 \in \overline{\Omega}$ fixo,
  $$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad m, n > N.$$
  Isso mostra que $(f_m(x_0))$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sequência converge; isto é, $f_m(x_0) \to f(x_0)$ quando $m \to \infty$. Desse jeito, para cada $x \in \overline{\Omega}$, podemos definir a função $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$. Em (3), se $n \to \infty$, obtemos que $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon$, e então para qualquer $x \in \overline{\Omega}$,
  $$|f_m(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Isso mostra que $(f_m(x))$ converge uniformemente para $f(x)$. Como as f_i's são contínuas em $\overline{\Omega}$ e a convergência é uniforme no compacto $\overline{\Omega}$, a função limite f é contínua em $\overline{\Omega}$. Então $f \in C(\overline{\Omega})$ e $f_m \to f$, pois vimos que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > N \quad \Rightarrow \quad |f_m - f|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Isso prova que $C(\overline{\Omega})$ é completo.

Portanto, $(C(\overline{\Omega}), |.|_\infty)$ é um espaço de Banach.

11. Prove que ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach.

Solution: Como já vimos que ℓ^p é um espaço vetorial normado (Exercício 4), falta verificarmos se ℓ^p é completo, isto é, toda sequência de Cauchy converge a um elemento do espaço.
De fato, seja $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^j, \cdots)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ uma sequência de Cauchy, ou seja, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m, n > n_0$

$$\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon \Rightarrow |x_m^j - x_n^j| < \varepsilon, \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(x_n^j) \in \mathbb{R}$ é de Cauchy, daí é convergente já que $\mathbb{R}$ é completo.
Seja $x_j = \lim x_n^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e defina $x = (x_1, x_2, \cdots)$.
Mostraremos que $x \in \ell^p$ e $x_m \to x$.
Como,

$$\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |x_m^j - x_n^j|^p \right)^{1/p} < \varepsilon, \forall\ m, n \geq n_0.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_m^j - x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \forall\ m \geq n_0, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \|x_m - x\|_p < \varepsilon, \forall\ m, n \geq n_0 \Rightarrow x_m \to x$$

E, $x_m - x \in \ell^p$, pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_m^j - x_j|^p < \varepsilon^p < \infty.$$

Note que, $x = (x - x_m) + x_m \in \ell^p$, pois ℓ^p é um espaço vetorial.
Portanto, $x_m \to x$ com $x \in \ell^p$ e com isso ℓ^p é Banach.

12. Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Prove que $\mathcal{N}$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série de elementos de $\mathcal{N}$ absolutamente convergente é convergente.

Solution: Suponha inicialmente que $\mathcal{N}$ é um espaço de Banach e seja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, uma série absolutamente convergente em $\mathcal{N}$, i.e.,

$$\{x_k\} \subset \mathcal{N} \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty. \tag{4}$$

Devemos mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge em $\mathcal{N}$. Ponha $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$. Então,

$$n > m \Rightarrow \|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \ [por\ (4)],$$

o que nos mostra ser $\{S_k\} \subset \mathcal{N}$ uma sequência de Cauchy, e portanto convergente, pois $\mathcal{N}$ é completo.

Reciprocamente, suponha que toda série absolutamente convergente em $\mathcal{N}$ converge (em $\mathcal{N}$), e considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma sequência de Cauchy. Devemos mostrar que $\{x_n\}$ converge. Note que é suficiente mostrarmos que $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Ora, como $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy, podemos escolher uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfaz,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1/2^k, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k < \infty$, temos de (5) que $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ é absolutamente convergente, e portanto, por hipótese, é convergente. Note que suas somas parciais são tais que

$$S_m = \sum_{k=1}^{n}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \xrightarrow{m\to\infty} x \in \mathcal{N},$$

e assim, $x_{n_{m+1}} \xrightarrow{m\to\infty} x + x_{n_1} \in \mathcal{N}$. Obtemos então uma subsequência $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}$ que converge, e portanto, como esta é de Cauchy, segue que converge (para o mesmo limite que a subsequência). Como queríamos.

13. (Ω, A, μ) espaço de medida positiva,$L^p(\Omega, A, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu)\}$ com $\mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \quad \text{é mensurável} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u|^p d\mu < \infty\}$. Defina $\|u\|_p = (\int_\Omega |u|^p d\mu)^{(1/p)}$.Prove que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

Solution: Note que $\|\cdot\|_p$ não é, em geral uma norma em $L^p(\Omega, A, \mu)$, pois pode acontecer $\|u\|_p = 0$ para u não identicamente nula.
De modo geral se (Ω, A, μ) espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, são equivalentes se $u = v$ μ-quase sempre, isto é, existe um conjunto $B \in A$ tal que $\mu(B) = 0$ e $u(x) = v(x), \forall x \notin B$.
Denotando a classe de equivalência de uma função u por $[u]$, o conjunto quociente é

$$L^p(\Omega, A, \mu) = \{[u] : u \in \mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu)\}$$

as operações

$$[u] + [v] = [u + v] \quad e \quad \alpha[u] = [\alpha u]$$

Além disso, definindo $\|[u]\|_p = \|u\|_p$.

(a) Primeiramente vamos mostrar que $L^p(\Omega, A, \mu)$ é um espaço vetorial. De fato, sejam $u, v \in L^p(\Omega, A, \mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $L^p(\Omega, A, \mu)$ é um espaço vetorial, já que as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas para as classes de equivalência das funções mensuráveis. Note que os elementos resultantes das operações ainda pertencem a $L^p(\Omega, A, \mu)$ pois;

- Pela desigualdade de MInkowski para integrais temos que

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p < \infty$$

Assim $[u + v] \in L^p(\Omega, A, \mu)$.

- Usando propriedades do módulo e da integral temos $\int_\Omega |\alpha u|^p d\mu = |\alpha|^p \int_\Omega |u|^p d\mu < \infty$. Logo $[\alpha u] \in L^p(\Omega, A, \mu)$

(b) $(L^p(\Omega, A, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado

- $|u| \geq 0 \Rightarrow |u|^p \geq 0 \Rightarrow \int_\Omega |u|^p d\mu \geq 0 \Rightarrow (\int_\Omega |u|^p d\mu)^{(1/p)} \geq 0$, Portanto $\|u\|_p \geq 0$. $\|u\|_p = 0 \Leftrightarrow (\int_\Omega |u|^p d\mu)^{(1/p)} = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |u|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow |u| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, (existe um $B \in A$ tal que $\mu(B) = 0$ tal que $u(x) = 0$, $\forall x \notin B$.)
- $\|\alpha u\|_p = (\int_\Omega |\alpha u|^p d\mu)^{(1/p)} = (\int_\Omega |\alpha|^p |u|^p d\mu)^{(1/p)} = |\alpha| (\int_\Omega |u|^p d\mu)^{(1/p)} = |\alpha| \|u\|_p$
- Usando a desigualdade triangular para módulo e a desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_p^p &= \int_\Omega |u+v|^p d\mu = \int_\Omega |u+v||u+v|^{p-1} d\mu \\
&\leq \int_\Omega (|u|+|v|)|u+v|^{p-1} d\mu = \int_\Omega |u||u+v|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |v||u+v|^{p-1} d\mu \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u+v|^p d\mu\right)^{(p-1)/p} + \left(\int_\Omega |v|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u+v|^p d\mu\right)^{(p-1)/p} \\
&= \|u+v\|_p^{p-1} (\|u\|_p + \|v\|_p)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\|u+v\|_p \leq (\|u\|_p + \|v\|_p)$

(c) Finalmente vamos mostrar que $(L^p(\Omega, A, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach, resta provar que é um espaço completo. Para isso seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega, A, \mu)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe um $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon^p, \quad \text{sempre que} \quad m, n \geq M$$

Seja $(g_k)_{k=1}^\infty$ uma subsequência de $(f_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\|g_{k+1} - g_k\| < 2^{-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.Considere a função

$$g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1} - g_k(x)| \tag{6}$$

g é mensurável e não negativa.Além disso,

$$|g(x)|^p = \lim_{n\to\infty} \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k(x)| \right)^p$$

Pelo lema de Fatou, segue que

$$\int_\Omega |g|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k(x)| \right)^p d\mu$$

Elevando ambos os membros a $1/p$ e usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{1/p} &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k(x)| \right)^p d\mu \right)^{1/p} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|g_1(x) + \sum_{k=1}^n g_{k+1} - g_k(x)\|_p \qquad (7) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} (\|g_1(x)\|_p + \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k(x)\|_p) \leq \|g_1(x)\|_p + 1
\end{aligned}
$$

Definindo $B = \{x \in \Omega : g(x) < \infty\}$, de (7) podemos concluir que $\mu(\Omega - B) = 0$.Logo a série em (6) converge exceto talvez no conjunto de medida nula $\Omega - B$, isto é, a serie converge

μ-quase sempre.Segue que a funcao $g\chi_B \in \mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu)$, onde χ_B é a função característica de B.Defina $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1} - g_k(x)) & se \quad x \in B \\ 0 & se \quad x \notin B \end{cases}$$

Como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + +(g_k - g_{k-1})$, temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1} - g_j(x)| \leq g(x)$$

Para todo x e $g_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in B$, isto é, a sequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para f μ-quase sempre. Pelo teorema da convergência dominada, segue que $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu)$. Como

$$|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p \chi_B, \mu - \text{quase sempre e}$$

$$\lim_{k\to\infty} |f - g_k|^p = 0, \mu - \text{quase sempre}$$

Novamente pelo teorema da convergência dominada temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} |f - g_k|^p d\mu = \int_{\Omega} 0 d\mu = 0$$

Daí concluimos que $g_k \to f$ em $\mathcal{L}^p(\Omega, A, \mu)$, e portanto $[g_k] \to [f]$ em $L^p(\Omega, A, \mu)$. Assim $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência $([f_k])_{k=1}^{\infty}$ que converge para $[f]$, logo, $[f_n] \to [f]$ em $L^p(\Omega, A, \mu)$.