Lista 9 de Análise Funcional - Doutorado 2018

Professor Marcos Leandro

2 de Julho de 2018

1. Prove que o operador $T : \ell^p \to \ell^p, 1 \leq p < \infty$, definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right) \tag{1}$$

é um operador compacto.

Solution: Mostraremos que T é limite de operadores compactos em $\mathcal{L}(\ell^p)$. Como sabemos que $\mathcal{K}(\ell^p)$ é fechado em $\mathcal{L}(\ell^p)$, teremos que $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha

$$\begin{array}{cccc} T_n : & \ell^p & \longrightarrow & \ell^p \\ & (\xi_1, \xi_2, \cdots) & \longmapsto & \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0 \cdots\right). \end{array}$$

Claramente T_n é linear, contínuo ($\|T_n(\xi)\|_p \leq \|\xi\|_p$), e como sua imagem é gerada pelos vetores canônicos $e_1, \cdots, e_n$, segue que tem posto finito. Portanto,

$$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\ell^p).$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \|(T_n - T)\xi\|_p^p &= \sum_{j\geq n+1} \frac{1}{j^p}|\xi_j|^p \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^p} \sum_{j=n+1} |\xi_j|^p \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^p}\|\xi\|_p^p \end{aligned}$$

$$\therefore \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq \frac{1}{n+1},$$

o que nos dá $T = T_n - (T_n - T) \in \mathcal{L}(\ell^p)$ e que $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ em $\mathcal{L}(\ell^p)$.

Observação: Note que uma simples adaptação da prova acima mostra que se $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de escalares que converge para zero, então o operador $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, \cdots)$$

é compacto.

2. Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador de posto finito. Prove que T é compacto.

Solution: Seja (x_n) uma sequência limitada em E. Por hipótese, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, segue que $(T(x_n))$ é limitada. Como T possui posto finito, por definição, têm-se que $dim(T(E)) < \infty$. Como em espaços de dimensão finita toda sequência limitada possui subsequência convergente, segue que, a sequência $(T(x_n))$ possui subsequência convergente. Pelo critério de compacidade (Veja Kreyszig, pg.407) segue que T é compacta.

Critério de Compacidade: Sejam E e F espaços normados, $T : E \to F$ um operador linear. Então T é compacto, se e somente se, a imagem por T de qualquer sequência limitada (x_n) em E sobre F é uma sequência $T(x_n)$ que possui subsequência convergente.

3. Sejam H um espaço de Hilbert separável, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal e $P_N : H \to H$ definido por

$$P_N(u) := \sum_{n=1}^{N} (u, e_n)e_n.$$

Calcule $\lim_{N\to\infty} P_N(u)$ e prove que o operador obtido por este limite não é compacto. Isso contradiz o fato de $\mathcal{K}(H)$ ser um subespaço fechado de $\mathcal{L}(H)$.

Solution: Temos que

$$P_N(u) = \sum_{n=1}^{N} (u, e_n)e_n$$

é uma soma que considera finitas entradas não nulas de u, para cada $u \in H$. Assim,

$$\lim_{N\to\infty} P_N(u) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (u, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)e_n = u,$$

onde a última igualdade segue do Corolário 5.10 (Brezis). Assim, vemos que o operador obtido por este limite é o operador identidade,

$$Id(u) = \lim_{N\to\infty} P_N(u) = u, \quad \forall u \in H.$$

Mostremos que este operador não é compacto. De fato, a bola unitária fechada

$$B_H = \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$$

é limitada. Como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base para H, vemos que $\dim H = \infty$. Então, pelo Teorema de Riesz (ver Brezis), B_H nõ pode ser compacta. Logo,

$$Id(B_H) = B_H = \overline{B_H},$$

o que mostra que $Id(B_H)$ não é relativamente compacto.

Observação: Os operadores P_N convergem pontualmente para o operador identidade, mas não convergem uniformemente. Isso mostra que a convergência uniforme é fundamental para que o operador limite seja um operador compacto, como garante o Teorema 6.1 (Brezis).

Corolário 5.10: Seja (e_n) uma base ortonormal. Então para todo $u \in H$, nós temos

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k)e_k,$$

isto é,

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u, e_k)e_k$$

e

$$|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2.$$

Teorema de Riesz: Seja E um espaço vetorial normado com B_E compacta. Então E tem dimensão finita.

Teorema 6.1: O conjunto $\mathcal{K}(E, F)$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{L}(E, F)$ (na topologia associada à norma $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$).

4. Prove que os seguintes operadores são compactos:

   (i) $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ e $K : C([a,b]^2) \to \mathbb{R}$;

   (ii) $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ e $K : C([a,b]^2) \to \mathbb{R}$;

   (ii) $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ e $K : L^2([a,b]^2) \to \mathbb{R}$.

   Onde

$$(Tu)(t) := \int_a^b K(t,s)u(s)ds.$$

Solution: Para solução do item (i), utilizaremos o seguinte Teorema

Teorema(Ascoli-Arzelà) Seja K um espaço métrico e Ξ um subconjunto limitado de $C(K)$. Assuma que Ξ é uniformemente equicontínuo, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; ; \; d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \;\; \forall f \in \Xi$$

Então o fecho de Ξ em $C(K)$ é compacto.

Solução do item (i): Denote por $Q = [a,b] \times [a,b]$. Como K é uma função de duas variáveis contínua, temos que $M := \max_{(t,s)\in Q} |K(t,s)| < \infty$. Logo, $\|T(u)\|_\infty \leq M(b-a)\|u\|_\infty$, ou seja, $\|T\| \leq M(b-a)$ e, portanto, o operador T é limitado.

Agora, para $u \in B[0,1] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \in C([a,b]); \|f\|_\infty \leq 1\}$, vale $\|T(u)\|_\infty \leq M(b-a)$. Assim, para bola fechada de raio 1 em $C[a,b]$, temos que a imagem por T é limitada. Basta portanto mostrarmos que $T(B[0,1])$ é equicontínuo, pois, nesse caso obtemos que o operador T é compacto pelo teorema de Ascole. Dito isso, observe que K sendo uniformemente contínuo (pois K é contínuo em um compacto), temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|K(t,s) - K(r,s)| < \varepsilon$ se $|t-r| < \delta$(independente de s). Assim, se $u \in B[0,1]$ e $|t-s| < \delta$,

$$|(Tu)(t) - (Tu)(r)| \leq \int_a^b |K(t,s) - K(r,s)||u(s)|ds \leq \varepsilon(b-a)\|u\|_\infty \leq \varepsilon(b-a)$$

Logo, $T(B[0,1])$ é equicontínuo. Portanto, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, T é compacto.

Solução do item (ii): Denote por $Q = [a,b] \times [a,b]$. Como K é uma função de duas variáveis contínua, temos que $M := \max_{(t,s)\in Q} |K(t,s)| < \infty$. Além disso, sendo K contínua, temos que, fixando $t \in [a,b]$ a função $s \mapsto K(t,s)$ é um elemento de $L^2[a,b]$. Agora, para todo $t \in [a,b]$ tem-se

$$|(Tu)(t)| \leq \int_a^b |K(t,s)||u(s)|ds \overset{Holder}{\leq} \Big(\int_a^b |K(t,s)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2 \leq M\sqrt{(b-a)}\|u\|_2$$

Disso, obtemos que o operador T é contínuo. Além disso, se $u \in B[0,1] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \in L^2[a,b]; \|f\|_2 \leq 1\}$, temos que $|T(u)|_\infty \leq M\sqrt{(b-a)}$. Logo $T(B[0,1])$ é limitada. Agora veremos que $T(B[0,1])$ é equicontínuo. Observe que K sendo uniformemente contínuo (pois K é contínuo em um compacto), temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|K(t,s) - K(r,s)| < \varepsilon$ se $|t-r| < \delta$(independente de s). Assim, se $u \in B[0,1]$ e $|t-s| < \delta$, então

$$|(Tu)(t) - (Tu)(r)| \leq \|K(t,s) - K(r,s)\|_2 \|u\|_2 \leq \varepsilon\sqrt{(b-a)}$$

Logo, pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, temos que $T(B[0,1])$ é precompacto em $C[a,b]$. Agora, temos que mostrar que $T(B[0,1])$ é precompacto em $L^2[a,b]$.

Observe que a inclusão $I : (C[a,b], \|.\|_\infty) \to (L^2[a,b], \|.\|_2)$ é contínua. Assim, um conjunto precompacto em $C[a,b]$ é precompacto em $L^2[a,b]$. De fato, considere $A \subset C[a,b]$ precompacto, logo $\overline{A}$ é compacto, e pela continuidade de I , temos que $I(\overline{A})$ é compacto em $L^2[a,b]$. Em particular, $I(\overline{A})$ é fechado em $L^2[a,b]$. Como $I(A) \subset I(\overline{A})$, segue-se que $\overline{I(A)} \subset I(\overline{A})$ e portanto $\overline{I(A)}$ é compacto.

Assim, temos que $T(B[0,1])$ é um conjunto precompacto em $L^2[a,b]$ e isso conclui que T é compacto.

Solução do item (iii): Denote por $Q = [a,b] \times [a,b]$. Como $K \in L^2(Q)$ e o conjunto das funções contínuas em Q é denso em $L^2(Q)$, existe uma sequência $K_n : Q \to \mathbb{R}$ de funções contínuas de modo que $\|K - K_n\|_{L^2(Q)} \to 0$. Assim, definindo $T_n : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, por

$$(T_n u)(t) = \int_a^b K_n(t,s)u(s)ds$$

e usando estimativas como acima, obtemos

$$\|T_n u - Tu\|_2 \leq \|K_n - K\|_{L^2(Q)}\|u\|_2$$

e logo

$$\|T_n - T\| \leq \|K_n - K\|_{L^2(Q)}$$

o qual se anula para $n \to \infty$. Pelo item (ii), temos que cada T_n é um operador compacto e como T é um operador linear contínuo, temos pelo (Teorema 6.1 Brezis) que T é compacto.

5. Sejam E e F espaços normados. Prove que $T \in \mathcal{K}(E,F)$ se, e somente se, $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

Solution:
$\Rightarrow$) Suponhamos que $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Sabemos que $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$ se, e só se, $(T^* f_n) \subset F^*$ possui subsequência convergente para toda $(f_n) \subset F^*$ limitada.
Assim, seja $(f_n) \subset F^*$ tal que $\|f_n\| \leq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Vamos denotar o compacto $\overline{T(B_E)} = K$. Seja $H \subset C(K)$, definida por

$$H = \phi : K \to \mathbb{R}; \phi_n(y) = F_n(y), \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Vamos mostrar que $\overline{H}$ é compacto.
a) H é equicontínuo: de fato, para quaisquer $x, y \in K$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$, temos que

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| = |f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(x-y)| \leq \|f_n\|\|x-y\| < \varepsilon, \forall\, \phi_n \in H.$$

b) H é limitado: de fato, $\forall\, x \in K$, temos

$$|\phi_n(x)| = |f_n(x)| \leq \|f_n\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Como $x \in \overline{T(B_E)}$, que é compacto, temos que $\exists\, M > 0$ tal que $\|x\| \leq M, \forall\, x \in \overline{T(B_E)}$.
Portanto, $|\phi_n(x)| \leq M, \forall\, x \in K, \forall\, \phi_n \in H$.
Assim, pelo teorema de Ascoli-Arzelà, $\overline{H}$ é compacto. Logo, existe $(\phi_{n_j}) \subset (\phi_n)$ e $\phi \in \overline{H}$ tal que $\|\phi_{n_j} - \phi\|_\infty \to 0$ se $j \to \infty$, isto é, particularmente para $x = Tu$,

$$\sup_{u \in B_E} |f_{n_j}(Tu) - \phi(x)| \to 0,$$

pois $T(B_E) \subset K$.
Logo, (ϕ_{n_j}) é convergente e, assim, é de Cauchy. Daí,

$$\sup_{u \in B_E} |f_{n_j}(Tu) - f_{n_i}(Tu)| \to 0,$$

ou seja,

$$\|T^* f_{n_j} - T^* f_{n_i}\|_{E^*} = \sup_{u \in B_E} |T^* f_{n_j}(u) - T^* f_{n_i}(u)| \to 0.$$

Logo, $(T^* f_{n_j})$ é de Cauchy em E^* e, assim $(T^* f_{n_j})$ é convergente(pois E^* é Banach). Portanto, concluímos que $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$ e mostremos que $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Pelo que já vimos, $T^{**} \in \mathcal{K}(E^{**}, F^{**})$.
Afirmação: $T^{**}(J_E(B_E)) = J_F(T(B_E))$
De fato, $\forall\ y \in F^*$ e $x \in B_E$, vale que

$$< T^{**}(J_E x), y > = < J_E x, T^* y > = < T^* y, x > = < y, Tx > = < J_F(Tx), y >$$

Logo, na bola B_E, temos $T^{**} J_E = J_F T$, e a afirmação está demonstrada.
Pela afirmação, temos que $J_F(T(B_E)) = T^{**}(J_E(B_E)) \subset T^{**}(B_{E^{**}})$. Como T^{**} é compacto, então $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ é compacto em F^{**}. Assim, $\overline{J_F(T(B_E))} \subset \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ é compacto em F^{**}, pois é um fechado contido em um compacto.
Além disso, como $J_F : F \to J_F(F) \subset F^{**}$ é um isomorfismo isométrico, então $J_F(F)$ é fechado em F^{**}. Assim, $J_F(F) = \overline{J_F(F)}$. Dessa forma, temos que $\overline{J_F(T(B_E))} \subset \overline{J_F(F)} = J_F(F)$. Logo faz sentido aplicar a inversa $J_F^{-1} : J_F(F) \to F$. Assim, temos que $T(B_E) \subset J_F^{-1}(\overline{J_F(T(B_E))})$.
Como $J_F^{-1}(\overline{J_F(T(B_E))})$ é compacto, obtemos que $\overline{T(B_E)} \subset \overline{J_F^{-1}(\overline{J_F(T(B_E))})} = J_F^{-1}(\overline{J_F(T(B_E))})$ é compacto, pois é um conjunto fechado contido em um compacto.
Portanto, $T \in \mathcal{K}(E, F)$, e o resultado está demonstrado.

6. Sejam E e F espaços normados, $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $x_n \rightharpoonup x$ em E. Prove que $Tx_n \to Tx$ em F.

Solution:
Pelo exercício 3 da lista 5 podemos afirmar que

$$Tx_n \rightharpoonup Tx.$$

Tendo isso, suponhamos, por contradição, que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ não converge forte para $T(x)$, ou seja, que existem $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$, tais que

$$\|T(x_{n_k}) - T(x)\| \geq \epsilon, \qquad \forall k. \tag{2}$$

Como $x_{n_k} \rightharpoonup x$ segue que (x_{n_k}) é limitada, e portanto, pela compacidade de T, $(T(x_{n_k}))$ admite subsequência $T(x_{n_{k_j}})$ convergente, digamos

$$T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \in F.$$

Por maior razão $T(x_{n_{k_j}}) \rightharpoonup y$ e, como a topologia fraca é Hausdorff, concluimos que $T(x) = y$. Então $T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow T(x)$, o que contradiz (2).

7. Seja T o operador definido em (1) com $p = 2$. Dado $\eta \in \ell^2$, use a alternativa de Fredholm para discutir sobre a solução do problema

$$(I - T)\xi = \eta.$$

Solution: No que se segue, fazemos a convenção de que

$$\zeta(n) = \zeta_n$$

para todo $\zeta \in l^2$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
Seja $T : l^2 \to l^2$ dada por

$$T\zeta = (\zeta_n / n)$$

para todo $\zeta \in l^2$. Como sabemos de exercícios anteriores, T é um operador linear contínuo, compacto e auto-adjunto em l^2. Veremos agora que todos os auto-valores deste operador pertencem ao conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Com efeito, se $\zeta \in l^2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ são tais que $T\zeta = \lambda\zeta$, ocorre $((\lambda - 1/n)\zeta_n) = 0 \in l^2$. De duas, uma:

1. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda - 1/n = 0$; segue que $\lambda - 1/m \neq 0$ (e portanto, que $\zeta_m = 0$) para todo $m \neq n$. Note que $N(\lambda I - T) = \mathbb{K}e_n$ e assim, que

$$\begin{array}{rcl} R(\lambda I - T) & = & R(\lambda I - T^*) \quad \text{(T é auto-adjunto)} \\ & = & \overline{R(\lambda I - T^*)} \quad \text{(Alternativa de Fredholm)} \\ & = & R(\lambda I - T^*)^{\perp\perp} \quad \text{(Propriedade do operador } \perp) \\ & = & N(\lambda I - T)^{\perp} \quad \text{(Alternativa de Fredholm)} \\ & = & (\mathbb{K}e_n)^{\perp} \\ & = & \{\zeta \in l^2 : \zeta_n = 0\} \quad (\lambda = 1/n) \end{array}$$

   de onde podemos concluir que, dado $\eta \in l^2$, o problema $(1/nI - T)\zeta = \eta$ admite solução $\zeta \in l^2$ se, e apenas se, $\eta_n = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2. $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda - 1/n = 0$; segue que $\zeta_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim, que $N(\lambda I - T) = \{0\}$. Da alternativa de Fredholm temos que $R(\lambda I - T) = l^2$ e portanto, dado $\eta \in l^2$, sempre existe um (único) $\zeta \in l^2$ de modo que $(\lambda I - T)\zeta = \eta$.

Com isto concluímos o exercício.

8. Seja H um espaço de Hilbert, e T um operador compacto, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Mostre que:

   1. As equações

$$\begin{array}{ll} (1) & u - \lambda A u = w \\ (2) & v - \lambda A^* v = z \end{array}$$

      têm únicas soluções $u, v \in H$ para cada $w, z \in H$ ou ambas as equações

$$\begin{array}{ll} (3) & \phi - \lambda A \phi = 0 \\ (4) & \psi - \lambda A^* \psi = 0 \end{array}$$

      possuem soluções não nulas, onde o número de soluções linearmente independestes é finito e mesmo para ambas as equações.

   2. a equação (1) tem pelo menos uma soluções se, e somente se, w é ortogonal a todas as soluções de (4).

   3. a equação (2) tem pelo menos uma soluções se, e somente se, z é ortogonal a todas as soluções de (3).

Solution:

1) Suponha que as equações (1) e (2) não possuam soluções únicas para algum $w, z \in H$. Logo, vão existir u_1, u_2 e v_1, v_2 soluções das equações $(1)e(2)$, tais que $u_1 \neq u_2$ e $v_1 \neq v_2$. Defina $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$, isso implica que $u, v \neq 0$ seriam soluções não nulas de (3) e (4). Além disso, pelo Teorema Alternativa de Fredholm segue que $\dim[Ker(I - \lambda A)] < \infty$ e $\dim[Ker(I - \lambda A)]$ $=\dim[Ker(I - \lambda A^*)]$, isto é, ambos os espaços admitem uma base ortogonal finita. Sendo assim, o número de soluções L.I é finito para ambas as equaços.

2) Pelo Alternativa de Fredholm segue que $Im(I-\lambda A)$ é fechado e $Im(I-\lambda A) = Ker(I-\lambda A^*)^{\perp}$, logo (1) admite solução $u \in H \iff w \in Im(I-\lambda A) \iff w \in Ker(I-\lambda A^*)^{\perp} \iff <w, v> = 0, \forall v \in Ker(I-\lambda A^*)$, isto é, w é ortogonal a toda solução de (4).

3) Sabemos que A é operador compacto $\iff$ o seu dual A^* também o for. Além disso, temos também que $(A^*)^* = A$. Uzando novamente Alternativa de Fredholm segue que $Im(I-\lambda A^*)$ é fechado e $Im(I-\lambda A^*) = Ker(I-\lambda A^{**})^{\perp} = Ker(I-\lambda A)^{\perp}$. Diante disto, suponha v solução de (2), então, $z \in Im(I-\lambda A^*) \iff z \in Ker(I-\lambda A^{**})^{\perp} \iff z \in Ker(I-\lambda A)^{\perp} \iff <z, \phi> = 0 \forall \phi \in Ker(I-\lambda A)$, ou seja, z é ortogonal a toda solução de (3)

9. Sejam E e F dois espaços de Banach e $T \in K(E, F)$. Assuma $dimE = \infty$. Prove que existe uma sequência $(u_n) \in E$ tal que $\|u_n\|_E = 1$ e $\|Tu_n\|_F \longrightarrow 0$.

Solution: Suponha, por absurdo, que $\|Tu_n\|_F \nrightarrow 0$. Então existe algum $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|Tu\|_F > \varepsilon \ \forall u \in E$$

Ou seja,

$$\|Tu\|_F > \varepsilon\|u\| \ \forall u \in E.$$

Portanto $Im(T)$ é fechado. Considere o operador

$$T_0 : E \longrightarrow Im(T) \text{ definido por } T_0 = T.$$

T_0 é claramente um operador linear contínuo bijetor, onde E e $Im(T)$ são espaços de Banach (obs. $Im(T)$ é um subespaço fechado do espaço de Banach F). Logo pelo corolário do Teorema da Aplicação aberta,

$$T_0^{-1} \in \mathcal{L}(Im(T), E).$$

Por outro lado, $T_0 \in K(E, Im(T))$. Portanto B_E é compacto e $dimE < \infty$. O que contradiz a hipótese de $dimE = \infty$.

Colorário do Teorema da Aplicação Aberta. Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo operator que é bijetor. Então T^{-1} é também contínuo.

10. Seja $1 \le p < \infty$. Mostre que $l^p \subset c_0$ com injeção contínua. A injeção é compacta?

Solution:

1) Seja $x \in l^p$. Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Assim $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso,

$$\|x\|_{c_0} = \sup_n |x_n| \le (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} = \|x\|_{l^p}.$$

2) A injeção não é compacta. De fato, seja (x^n) uma sequência em l^p definida por

$$x_k^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \ge k; \\ 0 & \text{se } n \ne k. \end{cases}$$

Temos que $\|x^n\|_{l^p} = 1$ para todo n, portanti (x^n) é uma sequência limitada de l^p. Nenhuma subsequência de (x^n) pode ser uma sequência de Cauchy de c_0 pois para todo $n \neq m$,

$$\|x^n - x^m\|_{c_0} = 1.$$

Logo, pela proposição abaixo, a injeção $i : l^p \longrightarrow c_0$ não é compacta.

Proposição. Sejam E e F espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T : E \longrightarrow F$.

a) T é compacto.

b) $\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo limitado A em E.

c) Para toda sequência limitada (x^n) em E, a sequência $(T(x^n))$ tem subsequência convergente em F.

11. Sejam E e F dois espaços de Banach, e seja $T \in K(E, F)$. Assuma que a $Im(T)$ é fechada.
    1. Prove que T é um operador de posto finito.
    2. Assuma também que $dimN(T) < \infty$. Prove que $dimE < \infty$.

Solution:

1. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe uma constante c tal que $B_{Im(T)} \subset cT(B_E)$. Segue que
$$\overline{B_{Im(T)}} = B_{Im(T)} \subset c\overline{T(B_E)}$$
Como T é compacto, $\overline{T(B_E)}$ é compacto. Pelo fato de todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto ser compacto, segue que a bola unitária da $Im(T)$ é compacta. Portando $dimIm(T) < \infty$.

   Teorema da Aplicação Aberta: *Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo sobrejetor. Então existe uma constante $c > 0$ tal que*
$$B_F(0, c) \subset T_{B_E(0,1)}$$

2. Tome E_0 sendo o complemento de $N(T)$. Então $T_0 = T\mid_{E_0}$ é bijetora de E_0 em ImT. Assim $dimE_0 = dimImT < \infty \Rightarrow dimE = dimE_0 + N(T) < \infty$.