Lista 8 de Análise Funcional - Doutorado 2018

Professor Marcos Leandro

17 de Junho de 2018

1. Sejam M um subespaço de um espaço de Hilbert H e $f \in M^*$. Mostre que f admite uma única extensão para H preservando norma.

Solution: Considere a aplicação de dualidade F definida em H por

$$F(x) = \{f \in H^* : \ \|f\| = \|x\| \ \ e \ \ \langle f, x\rangle = \|x\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $F(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in H$. no entanto, $F(x)$ pode ter mais de um elemento, o que não ocorre se H^* for estritamente convexo, como veremos. Lembremos:

`Um espaço vetorial normado` E `é dito ser estritamente convexo, se dados` $x \neq y$ `em` E `com` $\|x\| = \|y\| = 1$`, tivermos`

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Assumamos inicialmente que $F(x)$ tem apenas um elemento para cada $x \in H$ (mostraremos que isso de fato ocorre, em seguida), e com isso mostremos que vale a conclusão do exercício. Ora, como cada funcional linear contínuo em M se estende unicamente para um funcional linear contínuo em $\overline{M}$, podemos considerar M como sendo um subespaço vetorial fechado. É claro que o produto escalar $(\cdot,\cdot)$ em H restrito a M faz de M um espaço de Hilbert. Seja $g \in M^*$. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, existe $y \in M$ tal que

$$\begin{cases} \langle g, x\rangle = (y, x) \ \ \forall x \in M \\ \|g\| = \|y\|. \end{cases}$$

Seja $f \in H$ extensão de Hahn-Banach para g, de modo que

$$\begin{aligned} &\|f\| = \|g\| = \|y\| \ \ e \\ &\langle f, y\rangle = \langle g, y\rangle = (y, y) = \|y\|^2, \end{aligned}$$

mas pelo o que assumimos, temos que existe único $f \in H^*$ que satisfaz essas duas condições. De onde segue a conclusão do exercício.

Mostremos o que falta.

Afirmação 1: H^* é estritamente convexo. Sejam $f_1 \neq f_2$ funcionais unitários em H^*. Novamente pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet (aplicado em H^*), existem $y_1 \neq y_2$ vetores unitários em H tais que $\langle f_1, \cdot\rangle = (y_1, \cdot)$ e $\langle f_2, \cdot\rangle = (y_2, \cdot)$. Assim, pela identidade do paralelogramos, temos que

$$\begin{aligned} \left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^2 &= \left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) - \left\|\frac{y_1-y_2}{2}\right\|^2 \\ &= 1 - \left\|\frac{y_1-y_2}{2}\right\|^2 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Afirmação 2: $F(x)$ é um conjunto unitário, $\forall x \in H$. Se $x = 0$, nada há pra mostrar. Considere $x \in H \setminus \{0\}$ e sejam $f_1 \neq f_2$ em $F(x)$. Então $\|f_1/\|x\|\| = 1 = \|f_2/\|x\|\|$, e pela afirmação 1 devemos ter

$$\begin{aligned}1 &> \left\| \frac{f_1+f_2}{2\|x\|} \right\| \\ &\geq \left\langle \frac{f_1+f_2}{2\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\|x\|^2}(\langle f_1, x\rangle + \langle f_2, x\rangle) \\ &= \frac{1}{2\|x\|^2} \cdot 2\|x\|^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

o que é absurdo.

2. Mostre que se H é um espaço de Hilbert, então H^* também o é.

Solution: Seja H um espaço de Hilbert. Observe que H é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno. Daí, basta mostrar que a norma em H^* é induzida por um produto interno, pois H^* é completo.

Dado $\psi, \varphi \in H^*$, pelo Teorema de Riesz-Fréchet, existem únicos $y_0, y_1 \in H$ tais que $\psi(x) = (x, y_0)_H$ e $\varphi(x) = (x, y_1)_H$ para todo $x \in H$, $\|\psi\|_{H^*} = \|y_0\|_H$ e $\|\varphi\|_{H^*} = \|y_1\|_H$

É fácil verificar que a expressão $(\psi, \varphi)_{H^*} := (y_1, y_0)_H$ define um produto interno em H^*. De $(\psi, \psi) = (y_0, y_0) = \|y_0\|^2 = \|\psi\|^2$ segue que esse produto interno induz a norma em H^*.

3. Seja $\mathcal{N} \subset \ell^2$ constituído por elementos com apenas um número finito de entradas não nulas. Prove que

$$f(\xi_1, \xi_2, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n},\ \xi := (\xi_1, \xi_2, ...) \in \mathcal{N}$$

é tal que $f \in \mathcal{N}^*$, porém $f \notin H^*$. Isso prova que a hipótese de H ser completo é fundamental no Teorema da Representação de Riesz.

Solution: A hipótese de H ser completo é fundamental no Teorema da Representação de Riesz. De fato, $f \in \mathcal{N}^*$ mas $f \notin H^*$, pois não existe $\eta \in \mathcal{N}$ de forma que

$$\langle f, \xi\rangle = \langle \eta, \xi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$$

$\forall \xi \in \mathcal{N}$, pois o vetor $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots) \notin \mathcal{N}$.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H^*/\{0\}$. Prove que $\dim(ker(f)^{\perp}) = 1$.

Solution:
Como $f \neq 0 \Rightarrow \ker(f) \neq H$.
Afirmação: $\ker(f)^{\perp} \neq 0$.
De fato, suponha que $\ker(f)^{\perp} = 0$. Pelo Teorema de Riesz, existe um único $u \in H$, tal que $f(v) = (u, v),\ \forall v \in H$. Daí,

$$(u, v) = 0\ \forall v \in \ker(f) \Rightarrow u \in \ker(f)^{\perp} \Rightarrow u = 0.$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|u\|_H = 0 \Rightarrow f = 0$$

o que é um absurdo. Logo, $\ker(f)^{\perp} \neq 0$.
Seja $z_0 \neq 0 \in \ker(f)^{\perp}$. Necessariamente $f(z_0) \neq 0$, pois caso contrário teríamos que $z_0 \in \ker(f)$ e como

$$z_0 \in \ker(f)^{\perp} \Rightarrow (z_0, v) = 0 \forall v \in \ker(f).$$

Em particular, $(z_0, z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = 0$.
Seja $u = \frac{z_0}{f(z_0)} \in \ker(f)^{\perp}$ e $f(u) = \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = 1$. Como $0 \neq \ker(f) \subset H$ é subespaço fechado temos que $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^{\perp}$. Daí, para todo $x \in H, x = y_1 + y_2$ onde $y_1 \in \ker(f)$ e $y_2 \in \ker(f)^{\perp}$. Sendo $z \in \ker(f)^{\perp} \subset H$ e $f(z) = b$. Temos que $z = (z - bu) + bu$. Porém, $(z - bu, v) = (z, v) - b(u, v) = 0, \forall v \in \ker(f)$, donde $(z - bu) \in \ker(f)^{\perp}$. Por outro lado,

$$f(z - bu) = b - bf(u) = 0 \Rightarrow z - bu \in \ker(f)$$
$$\Rightarrow (z - bu) \in \ker(f) \bigcap \ker(f)^{\perp} = 0 \Rightarrow z = bu \Rightarrow \dim(\ker(f)^{\perp}) = 1.$$

5. Prove que $(C[0,1], \|.\|_{\infty})$ não é um espaço com produto interno.

Solution: Vamos mostrar que a norma definida por

$$\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

não pode ser obtida de um produto interno porque não satisfaz a Desigualdade do Paralelogramo. De fato, tome $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções definidas por $x(t) = 1$ e $y(t) = t$. Então $\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [0,1]} |1| = 1 = \max_{t \in [0,1]} |t| = \|y\|_{\infty}$ e

$$\|x + y\|_{\infty} = \max_{t \in [0,1]} |x(t) + y(t)| = \max_{t \in [0,1]} |1 + t| = 2,$$

$$\|x - y\|_{\infty} = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [0,1]} |1 - t| = 1.$$

Logo,

$$\|x + y\|_{\infty}^2 + \|x - y\|_{\infty}^2 = 5$$

e

$$2(\|x\|_{\infty}^2 + \|y\|_{\infty}^2) = 4,$$

o que mostra que

$$\|x + y\|_{\infty}^2 + \|x - y\|_{\infty}^2 \neq 2(\|x\|_{\infty}^2 + \|y\|_{\infty}^2).$$

6. Sejam H um espaço de Hilbert e $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal de H. Prove que:

(i) $\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)| \leq \|x\|^2$, para cada $x \in H$ (Desigualdade de Bessel);

(ii) $(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i) \perp e_j, \ j = 1, ..., n$.

Solution: Para o item i), temos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\
&= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2
\end{aligned}
$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.
Para o item ii), temos que,

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

Disso obtemos que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, o vetor $(x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i)$ é perpendicular a e_j.

7. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Theta := \{e_j\}_{j \in I}$ um conjunto ortonormal de H, não necessariamente enumerável. Prove que:

   (i) Dado $x \in H$ o conjunto $S_x := \{e_j \in \Theta | (x, e_j) = 0\}$ é contável;

   (ii) $\sum_{i \in I} |(x, e_i)| \leq \|x\|^2$, para cada $x \in H$ (Desigualdade de Bessel);

   (iii) $(x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i) \perp e_j, \ \forall e_j \in S_x$.

Solution:

(i) Para cada inteiro positivo n, considere o conjunto

$$S_x^n = \left\{ e_i : |\langle x, e_i \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n} \right\}.$$

Daí, podemos afirmar que S_n tem no máximo $n-1$ vetores. De fato, pois caso contrário a desigualdade de Bessel não iria valer. A conclusão segue do fato que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

(ii) Considere o conjunto S_x como está definido no item anterior. Se S_x for vazio defina $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|$ sendo 0, assim a desigualdade dada no enunciado é trivialmente satisfeita. Agora consideremos que S_x não é vazio. Assim, pelo item anterior, segue que este é finito ou infinito contável. Se S_x for finito defina

$$S_x = \{e_1, e_2, ..., e_n\}.$$

Usando a ortonormalidade de $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ segue que

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \langle x, x \rangle -$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 .$$

Agora nos resta provar o caso em que S_x é contável e infinito. Defina

$$S_x = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$$

Como o n tomado no caso finito, provado acima, é arbitrário segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

(iii) Note que

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

8. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Theta := \{e_j\}_{j\in I}$ um conjunto ortonormal de H. Prove que as seguintes afirmaçãoes são equivalentes:

   (i) Θ é completo;

   (ii) Se $x \perp \Theta$, então $x = 0$;

   (iii) Dado $x \in H$, então $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$ é contável (Série de Fourier);

   (iv) Dado para cada $x \in H$, então $\sum_{i\in I} |(x, e_i)| = \|x\|^2$.

Solution: Dado $x \in H$, afirmamos que

$$I_x := \{j \in I; (x, e_j) \neq 0\}$$

é enumerável.

De fato, ponha $J_k = \{j \in I : |(x, e_j)| > 1/k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$I_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Vejamos que cada J_k é finito, e portanto, I_x é enumerável. Para isso, usaremos o seguinte

`LEMA 1 (Mujica, Proposição 21.1): Para todo` $x \in H$`, temos que` $\sum_{i=1}^{n} |(x, e_{j_i})|^2 \leq \|x\|^2$.

Com isso, se $J \subset J_k$ é finito, então

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j\in J} |(x, e_j)|^2 > \sum_{j\in J} \frac{1}{k^2} = \frac{|J|}{k^2},$$

e daí, $|J| < k^2\|x\|^2 < \infty$ e portanto $|J_k| \leq k^2\|x\|^2$. Ou seja, temos que J_k é finito, para cada $k \in \mathbb{N}$, conforme afirmamos.

Agora, as séries que aparecem em (iii) e (iv) fazem sentido.

[(i) $\Rightarrow$ (ii)] Temos, por hipótese que $\overline{span(\Theta)} = H$. Tome $x \perp \Theta$. Devemos mostrar que $x = 0$. Existe uma sequência $\{x_n\} \subset span(\Theta)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. É claro que $(x_n, x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|x\|^2 = (x, x) = (\lim x_n, x) = \lim(x_n, x) = 0,$$

e portanto, $x = 0$.

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] Seja $x \in H$. Por hipótese, temos que $x = \sum_{j \in I}(x, e_j)e_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= (x, x) = \left(\sum_{j \in I}(x, e_j)e_j, \sum_{j \in I}(x, e_j)e_j\right) \\
&= \left(\sum_{j \in I_x}(x, e_j)e_j, \sum_{j \in I_x}(x, e_j)e_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_{j_i})e_{j_i}, \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_{j_i})e_{j_i}\right) \\
&= \lim_{m,n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(x, e_{j_i})e_{j_i}, \sum_{k=1}^{n}(x, e_{j_k})e_{j_k}\right) = \lim_{m,n \to \infty}\sum_{i=1}^{m}(x, e_{j_i})\left(e_{j_i}, \sum_{k=1}^{n}(x, e_{j_k})e_{j_k}\right) \\
&= \lim_{m,n \to \infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x, e_{j_i})\overline{(x, e_{j_k})}\delta_{j_i j_k} = \lim_{m,n \to \infty}\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}}|(x, e_{j_i})|^2 \\
&= \sum_{j \in I}|(x, e_j)|^2.
\end{aligned}$$

$$\therefore \|x\|^2 = \sum_{j \in I}|(x, e_j)|^2$$

[(ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iv) $\Rightarrow$ (i)] Usaremos o seguinte

`LEMA 2 (Mujica, Proposição 21.3): Dado` $x \in H$`, a série`

$$\sum_{j \in I_x}(x, e_j)e_j$$

`é incondicionalmente convergente, ou seja, é convergente e sua soma independe da ordem escolhida em` I_x`.`

Solution: Tome $x \in H$ e considere

$$p = \sum_{j \in I}(x, e_j)e_j \quad e \quad q = x - p.$$

Como

$$\begin{aligned}
(q, e_i) &= (x, e_i) - (p, e_i) \\
&= (x, e_i) - \sum_{j \in I}(x, e_j)(e_j, e_i) \\
&= (x, e_i) - (x, e_i) = 0
\end{aligned}$$

para todo $i \in I$, temos $q \in \Theta^{\perp}$.

Supondo (ii), temos $q = 0$, de onde $x = p = \sum_{j \in I}(x, e_j)e_j$, que é (iii).

Suponhamos que vale (iv) e seja $M = \overline{span(\Theta)}$. Então, $p \in M$ e $q \in M^{\perp}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2 = \sum_{j \in I}|(x, e_j)|^2 + \|q\|^2,$$

e como vale (iv), $q = 0$. Assim, $x = p + q = p \in M$. Da arbitrariedade de $x \in H$, temos que $H = \overline{span(\Theta)}$, ou seja, Θ é completo.

9. Seja H um espaço de Hilbert e $A, B : H \to H$ lineares limitados. Mostre que os operadores adjuntos $A^*, B^* : E^* \to E^*$ satisfazem:

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$,

(ii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, onde α é um escalar,

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$,

(iv) $A^{**} = A$,

(v) $\|A^*\| = \|A\|$,

(vi) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

10. Sejam H um espaço de Hilbert, e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma sesquilinear de H. Mostre que:

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H,\ \|u\| \le 1,\ \|v\| \le 1\} \\ &= \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H,\ \|u\| = 1,\ \|v\| = 1\} \\ &= \inf\{C > 0 : |a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|,\ u, v \in H\}. \end{aligned}$$

Solution: Notação: Seja $a(u,v)$ uma forma sesquilinear limitada de um espaço de Hilbert H. Denotaremos por $\|a\|$ o numero :

$$\|a\| = \sup\left\{\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|}; u, v \in\ H \text{e}\, u, v \neq 0\right\}$$

Provaremos primeiramente que

$$\|a\| = \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H,\ \|u\| = 1,\ \|v\| = 1\} \tag{1}$$

Sejam $u, v \in H$ tais que $u, v \neq 0$.Temos

$$\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} = \left|a\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)\right| \le \sup_{u,v\in H; \|u\|=\|v\|=1} |a(u,v)|$$

o que implica que

$$\|a\| \le \sup_{u,v\in H; \|u\|=\|v\|=1} |a(u,v)| \tag{2}$$

Por outro lado,

$$\{a(u,v); u, v \in H \text{ tal que} \|u\| = \|v\| = 1\} \subset \{a(u,v); u, v \in H \,\text{tal que}\, u \neq 0 \,\text{e}\, v \neq 0\}$$

Daí,

$$\{a(u,v); u, v \in H \,\text{tal que} \,\|u\| = \|v\| = 1\} \subset \left\{\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|}; u, v \in H \,\text{tal que}\, u \neq 0 \,\text{e}\, v \neq 0\right\}$$

o que implica que

$$\sup_{u,v\in H; \|u\|=\|v\|=1} |a(u,v)| \le \|a\| \tag{3}$$

Portanto por (2) e (3) obtemos (1).
Agora provaremos

$$\|a\| = \inf\{C > 0 : |a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|,\ u, v \in H\} \tag{4}$$

Se $\|a\| = 0$ temos que $a = 0$ e portanto a igualdade segue trivialmente. Consideremos $\|a\| \neq 0$ e $C > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \le C\|u\|\|v\| \Rightarrow \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \le C, \text{ para todo } u, v \in H, \text{ tal que } u, v \neq 0$$

o que implica

$$\|a\| = \sup_{u,v\in H; u,v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \le C$$

Desta forma,$\|a\| \leq C$, para todo $C > 0$, tal que $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in H$.Assim, tomando-se o infimo obtemos

$$\|a\| \leq \inf\{C > 0; |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \,\text{para todo}\, u, v \in H\}. \tag{5}$$

Por outro lado, notemos que

$$\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \leq \|a\| \Rightarrow |a(u,v)| \leq \|a\|\|u\|\|v\| \;\text{ para todo } u, v \in H, \text{ tal que } u, v \neq 0$$

Se $u = 0$ ou $v = 0$ temos imediatamente que $|a(u,v)| = \|a\|\|u\|\|v\| = 0$,assim, concluimos que $|a(u,v)| \leq \|a\|\|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in H$, tal que $u, v \neq 0$. O que implica que $\|a\| \in \{C > 0; |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \,\text{para todo}\, u, v \in H\}$. Conseqüentemente,

$$\|a\| \geq \inf\{C > 0; |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \,\text{para todo}\, u, v \in H\} \tag{6}$$

Portanto por (5) e (6) obtemos (4).
Finalmente, provaremos que

$$\|a\| = \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| \leq 1, \;\|v\| \leq 1\}$$

Devido a (1) basta provar que

$$\sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| = \|v\| = 1\} = \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| \leq 1, \;\|v\| \leq 1\} \tag{7}$$

De fato, como

$$\{a(u,v); u, v \in H \,\text{tal que}\, \|u\| = \|v\| = 1\} \subset \{|a(u,v)|; u, v \in H \,\text{tal que}\, u \leq 1 \,\text{e}\, v \leq 1\}$$

Resulta que

$$\sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| = \|v\| = 1\} \leq \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| \leq 1, \;\|v\| \leq 1\} \tag{8}$$

Por outro lado, sejam $u, v \in H$ tais que $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ e $u, v \neq 0$. Então $\|u\|\|v\| \leq 1$, e portanto, $1 \leq \frac{1}{\|u\|\|v\|}$, o que nos leva a

$$|a(u,v)| \leq \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \leq \|a\| = \sup_{u,v \in H; \|u\| = \|v\| = 1} |a(u,v)|$$

Se $u = 0$ ou $v = 0$ temos que $|a(u,v)| = 0 \leq \sup\limits_{u,v \in H; \|u\| = \|v\| = 1} |a(u,v)|$. Logo $|a(u,v)| \leq \sup\limits_{u,v \in H; \|u\| = \|v\| = 1} |a(u,v)|$ para todo $u, v \in H$ com $\|u\| \leq 1$ e $\|v\| \leq 1$. O que implica que

$$\sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| \leq 1, \;\|v\| \leq 1\} \leq \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H, \;\|u\| = \|v\| = 1\} \tag{9}$$

Portanto por (8) e (9) obtemos (7). O que conclui a prova.

11. Sejam H um espaço de Hilbert, e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear de H. Mostre que as afirmações são equivalentes:

    (a) a é contínua em $H \times H$;

    (b) a é contínua em $(0, 0)$;

    (c) existe $C > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq C \,\|u\|\, \|v\|$, $\forall u, v \in H$;

    (d) a é Lipschitziana em cada parte limitada de $H \times H$.

Solution: $(a) \longrightarrow (b)$. Se a é contínua em $H \times H$, em particular o é em $(0,0)$.
$(b) \longrightarrow (c)$. Se a é contínua em $(0,0)$, então para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(u,v) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |a(u,v) - a(0,0)| < \epsilon, \text{isto é,}$$
$$\|(u,v)\| < \delta \Rightarrow |a(u,v)| < \epsilon.$$

Lembrando que a norma definida em $H \times H$ está dada por $\|(u,v)\| = \|u\| + \|v\|$ temos que

$$\|u\| + \|v\| < \delta \Rightarrow |a(u,v)| < \epsilon.$$

Assim, para $\epsilon = 1$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|u\| + \|v\| < \delta_1 \Rightarrow |a(u,v)| < 1. \tag{10}$$

Sejam $C > 0$ tal que $0 < \frac{1}{C} < \delta_1$ e $u, v \in H$ com $u, v \neq 0$. Logo $(\frac{u}{2C\|u\|}, \frac{v}{2C\|v\|})$, e assim

$$\left\|\left(\frac{u}{2C\|u\|}, \frac{v}{2C\|v\|}\right)\right\| = \left\|\frac{u}{2C\|u\|}\right\| \left\|\frac{v}{2C\|v\|}\right\| = \frac{1}{2C} + \frac{1}{2C} = \frac{1}{C} < \delta_1. \tag{11}$$

Das equações 10 e 11 obtemos que

$$\left|a\left(\frac{u}{2C\|u\|}, \frac{v}{2C\|v\|}\right)\right| < 1$$
$$\frac{|a(u,v)|}{4C^2\|u\|\|v\|} < 1,$$

e portanto $|a(u,v)| < 4C^2\|u\|\|v\|$, assim fica demostrado para $u, v \neq 0$. Por outro lado, se $u \neq 0$ ou $v \neq 0$, teríamos que $a(u,v) = 0$ e a desigualdade $(c.)$ fica provada, mais ainda, para todo $C > 0$.

$(c) \longrightarrow (d)$.Suponhamos que existe $C > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in H$ e seja $E \subseteq H \times H$ um subconjunto limitado, isto é, existe $r > 0$ tal que $E \subset B_r(0)$, onde $B_r(o)$ é a bola centrada em 0 e de raio r. Isto é, para todo $(u,v) \in E$ cumpre-se $\|(u,v)\| < r$, ou melhor

$$\|u\| + \|v\| < r \qquad\qquad \forall (u,v) \in E. \tag{12}$$

Agora vamos mostrar que $a(u,v)$ é Lipschitziana em E. Sejam $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in E$, pelo fato de a se uma aplicação limitada temos que

$$\begin{aligned}
|a(u_1,v_1) - a(u_2,v_2)| &= |a(u_1,v_1) - a(u_1,v_2) + a(u_1,v_2) - a(u_2,v_2)| \\
&= |a(u_1, v_1 - v_2) + a(u_1 - u_2, v_2)| \\
&\leq |a(u_1, v_1 - v_2)| + |a(u_1 - u_2, v_2)| \\
&\leq C\|u_1\|\|v_1 - v_2\| + C\|v_2\|\|u_1 - u_2\| \\
&\leq C\|u_1\|\|v_1 - v_2\| + C\|v_1\|\|v_1 - v_2\| + C\|v_2\|\|u_1 - u_2\| + C\|u_2\|\|u_1 - u_2\| \\
&= C\|v_1 - v_2\|(\|u_1\| + \|v_1\|) + C\|u_1 - u_2\|(\|u_2\| + \|v_2\|) \\
&\leq Cr\|v_1 - v_2\| + Cr\|u_1 - u_2\| \\
&= Cr(\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|).
\end{aligned}$$

O que conclui que $a(u,v)$ é Lipschitziana em E com constante de Lipschitz igual a Cr.

$(d) \longrightarrow (a)$. Suponhamos que $a(u,v)$ é Lipschitziana em limitados de $H \times H$. Sejam $(u_0,v_0) \in H \times H$ e $\epsilon > 0$. Como $a(u,v)$ é Lipschitziana em limitados de $H \times H$, existe $r > 0$ tal que $a(u,v)$ é Lipschitziana em $B_r((u_0,v_0))$. Isto é, existe uma constante de Lipschitz L_r (que depende de r) tal que

$$|a(u,v) - a(u_0,v_0)| \leq L_r\|(u - u_0, v - v_0)\| \qquad \forall (u,v) \in B_r((u_0,v_0)), \tag{13}$$

agora, escolhendo $\delta < min(\epsilon/L_r, r)$ obtemos junto com a equação 13

$$\|(u - u_0, v - v_0)\| < \delta \Rightarrow |a(u, v) - a(u_0, v_0)| \leq \epsilon.$$

Portanto $a(u, v)$ é continua em $H \times H$ pela arbitrariedade na escolha do u_0, v_0.