Lista 8 de Análise Funcional - Doutorado 2018

Professor Marcos Leandro

29 de Maio de 2018

1. Sejam M um subespaço de um espaço de Hilbert H e $f \in M^*$. Mostre que f admite uma única extensão para H preservando norma.

2. Mostre que se H é um espaço de Hilbert, então H^* também o é.

3. Seja $\mathcal{N} \subset \ell^2$ constituído por elementos com apenas um número finito de entradas não nulas. Prove que
$$f(\xi_1, \xi_2, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n},\ \xi := (\xi_1, \xi_2, ...) \in \mathcal{N}$$
é tal que $f \in \mathcal{N}^*$, porém $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right) \notin \mathcal{N}$. Isso prova que a hipótese de H ser completo é fundamental no Teorema da Representação de Riesz.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H^*/\{0\}$. Prove que $\dim(ker(f)^{\perp}) = 1$.

5. Prove que $(C[0,1], \|.\|_{\infty})$ não é um espaço com produto interno.

6. Sejam H um espaço de Hilbert e $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal de H. Prove que:
   (i) $\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)| \leq \|x\|^2$, para cada $x \in H$ (Desigualdade de Bessel);
   (ii) $(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i) \perp e_j,\ j = 1, ..., n$.

7. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Theta := \{e_j\}_{j \in I}$ um conjunto ortonormal de H, não necessariamente enumerável. Prove que:
   (i) Dado $x \in H$ o conjunto $S_x := \{e_j \in \Theta | (x, e_j) \neq 0\}$ é contável;
   (ii) $\sum_{i \in I} |(x, e_i)| \leq \|x\|^2$, para cada $x \in H$ (Desigualdade de Bessel);
   (iii) $(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i) \perp e_j,\ \forall e_j \in S_x$.

8. Sejam H um espaço de Hilbert e $\Theta := \{e_j\}_{j \in I}$ um conjunto ortonormal de H. Prove que as seguintes afirmaçãoes são equivalentes:
   (i) Θ é completo;
   (ii) Se $x \perp \Theta$, então $x = 0$;
   (iii) Dado $x \in H$, então $x = \displaystyle\sum_{i \in I} (x, e_i)e_i$ (Série de Fourier);
   (iv) Dado para cada $x \in H$, então $\displaystyle\sum_{i \in I} |(x, e_i)| = \|x\|^2$.

9. Seja H um espaço de Hilbert e $A, B : H \to H$ lineares limitados. Mostre que os operadores adjuntos $A^*, B^* : E^* \to E^*$ satisfazem:
   (i) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
   (ii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, onde α é um escalar,
   (iii) $(AB)^* = B^* A^*$,
   (iv) $A^{**} = A$,
   (v) $\|A^*\| = \|A\|$,

(vi) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

10. **(*)** Sejam H um espaço de Hilbert, e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma sesquilinear de H. Mostre que:

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H,\ \|u\| \leq 1,\ \|v\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|a(u,v)| : u, v \in H,\ \|u\| = 1,\ \|v\| = 1\} \\ &= \inf\{C > 0 : |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|,\ u, v \in H\}. \end{aligned}$$

11. **(*)** Sejam H um espaço de Hilbert, e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma sesquilinear de H. Mostre que as afirmaçõessão equivalentes:

    (a) a é contínua em $H \times H$;

    (b) a é contínua em $(0, 0)$;

    (c) existe $C > 0$ tal que $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|,\ \forall u, v \in H$;

    (d) a é Lipschtziana em cada parte limitada de $H \times H$.