Lista 7 de Análise Funcional - Doutorado 2018

Professor Marcos Leandro

17 de Junho de 2018

1. Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subseteq H$ uma sequência tal que

$$x_n \overset{H}{\rightharpoonup} x \;\; e \;\; \|x_n\| \to \|x\|.$$

Mostre que $x_n \to x$.

Solution: Lembremos do Teorema da representação de Riesz que diz:
Seja H um espaço de Hilbert e $f \in H^*$. Então existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$, para todo $x \in H$ e $\|f\| = \|y\|$.

- **Afirmação**:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H & \to & H^* \\ y & \mapsto & (., y) \end{array}$$

é uma isometria sobrejetora.

De fato, dado $f \in H^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz's existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y) \forall x \in H$.

$$\Longrightarrow f(x) = (., y)(x) \forall x \in H$$

$$\Longrightarrow f(x) = \Phi(y)(x) \forall x \in H$$

$$\Longrightarrow f = \Phi(y) \text{ para algum } y \in H$$

Logo Φ é sobrejetora.

Por outro lado,

i) $\|\Phi(y)\| = \sup\limits_{x\in H} \dfrac{|\Phi(y)(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\in H} \dfrac{|(x,y)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\in H} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x\in H} \dfrac{\|f\|\|x\|}{\|x\|} = \|f\| = \|y\|.$

ii) $\|y\|^2 = |(y, y)| = |\Phi(y)(y)| \leq \|\Phi(y)\|\|y\| \Longrightarrow \|y\| \leq \|\Phi(y)\|$

De i e ii temos que $\|\Phi(y)\| = \|y\|$ e, portanto, Φ é uma isometria.

- Como $x_n \rightharpoonup x$ então $f(x_n) \to f(x)$ $\forall f \in H^*$. Em particular, vale para $f = \Phi(x) = (., x)$. Assim

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow [(x_n, x) \to (x, x)].$$

- Como $\|x_n\| \to \|x\|$ então $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.
- $\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2(x_n, x)$.

Assim,

$$\|x_n - x\|^2 \longrightarrow \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, x) = 0.$$

Portanto $x_n \to x$.

2. Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subseteq H$ uma sequência tal que

$$\sup_n |\langle y, x_n \rangle| < \infty, \quad \text{para cada} \quad y \in H$$

Use o Princípio da Limitação Uniforme para mostrar que (x_n) tem uma subsequência fracamente convergente.

Solution: Defina o operador $T_n : H \to \mathbb{R}$ por

$$T_n(y) = \langle y, x_n \rangle,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Então T_n é linear e,

$$|T_n(y)| \leq \sup_n |T_n(y)| = \sup |\langle y, x_n \rangle| < \infty, \ \forall y \in H$$

$$\Rightarrow \frac{|T_n(y)|}{\|y\|} < \infty, \ \forall y \in H,$$

o que mostra que T_n é limitada. Como H e $\mathbb{R}$ são espaços de Banach, podemos usar o Princípio da Limitação Uniforme e concluir que

$$\sup_n \|T_n\| < \infty.$$

Assim, para cada $x_n \in H$, temos que

$$|T_n(x_n)| \leq \|T_n\| \|x_n\| \ \Rightarrow \ |\langle x_n, x_n \rangle| \leq \|T_n\| \|x_n\| \ \Rightarrow \ \|x_n\|^2 \leq \|T_n\| \|x_n\| \ \Rightarrow \ \|x_n\| \leq \|T_n\|$$

$$\Rightarrow \sup_n \|x_n\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

Logo, (x_n) é limitada. Como H é espaço de Hilbert, H é uniformemente convexo e então reflexivo, pela Proposição 5.1, Brezis. Portanto, pelo Teorema abaixo, concluímos que (x_n) possui subsequência fracamente convergente.

Teorema: Seja E um espaço reflexivo. Então toda sequência em E limitada possui subsequência fracamente convergente.
Demonstração: Ver, por exemplo, Teorema 5.25 das notas de aula de análise funcional do professor Rodney Josué Biezuner da UFMG.

3. Seja H um espaço de Hilbert. Dado $S \subset H$ mostre que $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$.

Solution:

$$x \in S^{\perp} \Rightarrow (x, y) = 0, \ \forall y \in S^{\perp\perp} \Rightarrow x \in S^{\perp\perp\perp}$$

$$\therefore S^{\perp} \subset S^{\perp\perp\perp}.$$

Reciprocamente, note que $X \subset Y \subset H \Rightarrow Y^{\perp} \subset X^{\perp}$. Assim, resta mostrar que $S \subset S^{\perp\perp}$, para que tenhamos $S^{\perp\perp\perp} \subset S^{\perp}$. Ora, como

$$(x, y) = 0 \ \forall y \in S^{\perp}, \ \forall x \in S \quad e$$

$$x \in S^{\perp\perp} \Leftrightarrow (x, y) = 0 \ \forall y \in S^{\perp},$$

temos que $S \subset S^{\perp\perp}$, como queríamos.

4. Se M é um subespaço de um espaço de Hilbert H mostre que M é fechado se e sómente se $M = M^{\perp\perp}$.

Solution: Pela Proposição 1.9 do Bresis podemos afirmar que para qualquer espaço vetorial normado (em particular, pra Hilbert) vale

$$\overline{M} = M^{\perp\perp}$$

Assim, a conclusão segue do fato de M ser fechado se, e somente se, $\overline{M} = M$.

5. Seja M é um subconjunto de um espaço de Hilbert H, mostre que o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de vetores de M é denso em H se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$.

Solution: Seja $V := span\{M\}$.
Como $H = \bar{V} + \bar{V}^{\perp}$. É suficiente mostrar que $M^{\perp} = \bar{V}^{\perp}$. De fato:
(i) se $x \in \bar{V}^{\perp} \Rightarrow x \perp \bar{V} \Rightarrow x \perp V \Rightarrow x \perp M \Rightarrow x \in M^{\perp}$.
(ii) se $x \in M^{\perp} \Rightarrow x \perp M \Rightarrow x \perp V \Rightarrow x \perp \bar{V} \Rightarrow x \in \bar{V}^{\perp}$.
Logo $H = \bar{V} + M^{\perp}$, portanto $H = \bar{V} \Leftrightarrow M^{\perp} = \{0\}$.

6. Sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é um subconjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert H e $x \in H$. Se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são escalares mostre que $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ atinge seu mínimo valor se, e somente se, $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$.

Solution:
Para $n \in \mathbb{N}$ fixo, considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Big\|^2$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Big\|^2 &= \Big\langle x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Big\rangle \\
&= \|x\|^2 - \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x \Big\rangle - \Big\langle x, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Big\rangle + \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Big\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x \Big\rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} [\langle x, e_i \rangle - \alpha_i]^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2
\end{aligned}$$

Como a função f varia em função de α_i, temos que o primeiro e o terceiro termo da expressão a direita são constantes, e visto que o segundo termo do lado direito é maior igual a zero, temos que f atinge seu mínimo se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} [\langle x, e_i \rangle - \alpha_i]^2 = 0$, ou seja, se, e somente se, $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$

7. Considere $H = \ell_2$ com o produto interno e norma euclidianos. Mostre que

$$O = \{e_1, e_2, \cdots, e_N, \cdots\},$$

onde $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$, é uma base de Hilbert.

Solution: Para mostrar que o conjunto

$$O = \{e_1, e_2, \cdots, e_N, \cdots\},$$

é uma base de Hilbert basta mostrar que:

- $|e_n| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$;
- O espaço G gerado pelos $\{e_n\}_n, n \in \mathbb{N}$ é denso em H.

Com o produto interno e norma euclidianos, os itens i e ii são trivialmente satisfeitos. Resta mostrar que $\overline{G} = \ell_2$.
Seja $x = (\xi_n)_n \in \ell_2 - \{G\}$ e $x_k := \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i \in G$. Disto segue que, $\|x - x_k\|_2 = \left(\sum_{i>k}^{\infty} \|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ tende a zero quando $k \to \infty$. Logo $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. E portanto, $x \in \overline{G} = \ell_2$.

8. Seja H um espaço de Hilbert separável. Mostre que todo conjunto ortonormal em H é contável.

Solution:
Seja $(e_i)_{i\in I}$ um conjunto ortonormal de H, e observe que:

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2 \Rightarrow \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}, i, j \in I, i \neq j.$$

Considere a família $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_i)$, onde $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_i)$ é a bola de centro e_i e raio $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_i) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_j) = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.
Além disso, essa família possui tantos elementos quanto o conjunto ortonormal que consideramos.
Se D é um conjunto denso em H, cada $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_i)$ possui um ponto $d_i \in D$ e como as bolas são duas a duas disjuntas, obtemos um subconjunto $(d_i)_{i\in I} \subseteq D$ com tantos elementos quanto o conjunto $(e_i)_{i\in I}$.
Se supormos por absurdo que $(e_i)_{i\in I}$ não seja enumerável, então $(d_i)_{i\in I}$ não será enumerável. Mas como $(d_i)_{i\in I} \subseteq D$, daí D não será enumerável. Contradição, pois como H é separável, existe um subconjunto D denso em H e enumerável.

9. Seja $e_n(t) = e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que $\{e_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\} \subset L^2([0, 2\pi])$ e é ortonormal.

Solution: Como

$$e_n(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt,\ t \in [0, 2\pi],$$

temos que e_n é contínua. Basta observar que podemos escrever $e_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$, e que $\cos nt$ e $\sin nt$ são funções contínuas. Logo, $\{e_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\} \subset L^2([0, 2\pi])$.
Além disso, note que o conjugado de $e_n(t)$ é

$$\overline{e_n(t)} = \cos nt - i \sin nt = e^{-int}.$$

Então, dados $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} e_m(t)\overline{e_n(t)} dt = \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt.$$

Se $m = n$,

$$\|e_n\|^2 = \langle e_n, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ \Rightarrow \ \|e_n\| = \sqrt{2\pi}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $m \neq n$,

$$\langle e_m, e_n \rangle = \left. \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)} \right|_0^{2\pi} = \frac{e^{i(m-n)2\pi}}{i(m-n)} - \frac{e^{i(m-n)0}}{i(m-n)}$$

$$= \frac{\cos[(m-n)2\pi] - i\sin[(m-n)2\pi] - \{\cos[(m-n)0] - i\sin[(m-n)0]\}}{i(m-n)} = \frac{1-0-1+0}{i(m-n)} = 0.$$

Portanto, $\{e_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\}$ é ortogonal.

10. Sejam H um espaço de Hilbert, $0 \neq E \subset H$ subespaço fechado e $P_E : H \to E$ o operador projeção. Prove que:

    (i) $\|P_E\| = 1$;

    (ii) P_E é sobrejetor;

    (iii) $P_E^2 = P_E$ e $P_E P_{E^\perp} = 0$;

    (iv) $P_{E^\perp} = Id - P_E$ e $\ker(P_E) = E^\perp$.

Solution: Como $E \neq 0$ é subespaço vetorial fechado de H, temos que para cada $f \in H$, $P_E(f) \in E$ é caracterizado por

$$(f - P_E(f), v) = 0 \ \ \forall v \in E. \tag{1}$$

(i) De (1), fazendo $v = P_E(f)$ temos

$$|P_E(f)|^2 = (P_E(f), f).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|P_E(f)|^2 \leq |P_E(f)||f|$, e daí $|P_E(f)| \leq |f|$.

$$\therefore \|P_E\| \leq 1$$

Seja $f_0 \in E$ com $|f| = 1$. Como $(f_0 - f_0, v) = 0 \ \forall v \in E$, temos de (1) que $P_E(f_0) = f_0$ (note que deste mesmo modo pode-se mostrar que P_E fixa os pontos de E), e daé

$$\|P_E\| \geq |P(f_0)| = |f_0| = 1.$$

$$\therefore \|P_E\| = 1.$$

(ii) Pelo o que acabamos de fazer, temos que $P_E(f) = f \ \forall f \in E$, e portanto, P_E é sobrejetor.

(iii) Dado $f \in H$, como $P_E(f) \in E$, temos que

$$P_E^2(f) = P_E(P_E(f)) = P_E(f).$$

$$\therefore P_E^2 \equiv P_E.$$

De outro modo,

$$|P_E(f) - P_E^2(f)|^2 = (P_E(f) - P_E(P_E(f)), \underbrace{P_E(f) - P_E^2(f)}_{\in E}) = 0$$

$$\therefore P_E^2 \equiv P_E.$$

Agora, tome $f \in H$. Como $P_{E^\perp}(f) \in E^\perp$, temos de (1) que

$$(P_E P_{E^\perp}(f), v) = (P_{E^\perp}, v) = 0 \quad \forall v \in E.$$

Em particular, tomando $v = P_E P_{E^\perp}(f) \in E$, temos que $|P_E P_{E^\perp}(f)|^2 = 0$. Da arbitrariedade de $f \in H$, segue que

$$P_E P_{E^\perp} \equiv 0.$$

(iv) Dado $f \in H$, temos que

$$(f - (Id - P_E)(f), w) = (P_E(f), w) = 0 \; \forall w \in E^\perp.$$

$$\therefore P_{E^\perp} \equiv Id - P_E.$$

Agora mostraremos que $Ker(P_E) = E^\perp$. Ora,

$$f \in E^\perp \Rightarrow f = P_{E^\perp}(f) = f - P_E(f) \Rightarrow P_E(f) = 0.$$

$$\therefore E^\perp \subset Ker(P_E).$$

Por outro lado, se $f \in Ker(P_E)$, temos de (1) que

$$P_E(f) = 0 \Rightarrow (f, v) = 0 \; \forall v \in E \Rightarrow f \in E^\perp.$$

$$\therefore Ker(P_E) \subset E^\perp.$$

11. Seja $(H, \|.\|)$ um espaço normado. Prove que a norma $\|.\|$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a Identidade do Paralelogramo.

Solution:
$\Rightarrow)$:
Se a norma $\|\cdot\|$ é induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ temos

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle, \qquad \forall x \in H.$$

Note que, vale

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

e

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 .$$

Somando as duas igualdade acima obtemos a regra do paralelogramo.
$\Leftarrow)$:
Agora suponhamos que vale a regra do paralelogramo para todo $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 ,$$

equivalentemente,

$$\frac{1}{8}\|x + y\|^2 + \frac{1}{8}\|x - y\|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2 + \frac{1}{4}\|y\|^2 .$$

Defina

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 . \tag{2}$$

Provemos que esta relação de fato define um produto interno e que este induz a norma $\|.\|$. Tomando $x, y, z \in H$, verifiquemos

i)$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

Usando a definição dada em (2) e a regra do paralelogramo temos

$$\begin{aligned}
\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - \tfrac{1}{4}\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\left\|\tfrac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\tfrac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) = 2\left\langle \tfrac{x+y}{2}, z\right\rangle.
\end{aligned}$$

Se $y=0$, então $\langle x,z\rangle = 2\left\langle \frac{x}{2}, z\right\rangle$, pois $\langle 0,z\rangle = 0$ (segue de (2)). Usando isso e o que foi feito acima podemos afirmar

$$\langle x+y,z\rangle = \frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle = \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2\right) = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$$

ii) $\langle ax,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \qquad \forall\, \alpha\in\mathbb{R};$

Usando o item anterior temos que para $n=2$ vale

$$\langle 2x,y\rangle = \langle x+x,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle = 2\langle x,y\rangle.$$

Justificando de maneira análoga segue que

$$\langle ax,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \qquad \forall\, \alpha\in\mathbb{N}.$$

Note que,

$$0 = \langle 0,y\rangle = \langle x-x,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle -x,y\rangle \Longrightarrow \langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle.$$

$$\Longrightarrow \langle -nx,y\rangle = \langle n(-x),y\rangle = n\langle -x,y\rangle = -n\langle x,y\rangle, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Portanto, $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ para todo $\alpha\in\mathbb{Z}$. Agora note que

$$\langle x,y\rangle = \left\langle \sum \frac{1}{n}x, y\right\rangle = n\left\langle \frac{1}{n}x, y\right\rangle, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Dos dois últimos resultados podemos concluir que

$$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \qquad \forall \alpha\in\mathbb{Q}.$$

Para obter o resultado para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$, basta observar que a função norma é contínua e, como o produto interno foi definido a partir da norma, ele também é uma função contínua. Assim, dado qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$, tomamos uma sequência $(\alpha_n)\subset\mathbb{Q}$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ e obtemos $\langle \alpha_n x,y\rangle = \alpha_n\langle x,y\rangle$, donde

$$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \qquad \forall x,y\in E,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

iii) Simetria;

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{4}\|y+x\|^2 - \frac{1}{4}\|y-x\|^2 = \langle y,x\rangle.$$

iv) Positiva definida;

$$\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\|x+x\|^2 - \frac{1}{4}\|x-x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0.$$

Daí,

$$\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0.$$

12. Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. Prove que $L^p(\Omega)$ é um espaq de Hilbert se, e somente se, $p=2$.

Solution: Se $L^p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert se, somente se, vale a identidade do paralelogramo

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 \tag{3}$$

Seja $f : [0,1] \to \Re$, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $g : [0,1] \to \Re$ definida por,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

calculando as normas:

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_p &= \left[\int_\Omega |f(x)|^p du\right[^{1/p} = \left[\int_0^1 1du\right]^{1/p} = \left[(u/1)^2\right]^{1/p} = 1, & (4) \\ \|g(x)\|_p &= \left[\int_\Omega |g(x)|^p du\right]^{1/p} = \left[\int_0^1 1du\right]^{1/p} = \left[(u/1)^2\right]^{1/p} = 1, & (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f(x)-g(x)\|_p &= \left[\int_\Omega ||f(x)-g(x)|^p|^p du\right]^{1/p} = \left[\int_0^2 |f(x)-g(x)|^p du\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_0^1 |1|^p du + \int_1^2 |-1| du\right]^{1/p} \\ &= \left[u|_0^1 + u|_1^2\right]^{1/p} = 2^{1/p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f(x)+g(x)\|_p &= \left[\int_\Omega ||f(x)+g(x)|^p|^p du\right]^{1/p} = \left[\int_0^2 |f(x)+g(x)|^p du\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_0^1 |1|^p du + \int_1^2 |-1| du\right]^{1/p} \\ &= \left[u|_0^1 + u|_1^2\right]^{1/p} = 2^{1/p}, \end{aligned}$$

Substituindo as normas (2)-(4) na identidade (1) obtemos que:

$$\begin{aligned} 2^{p/2} + 2^{1/p} &= 2(1+1) \\ 2^{1/p} &= 2 \\ 2/p &= 1 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, a identidade do paralelogram só vale se, somente se, $p = 2$.

13. Seja H um espaço de Hilbert, $E \subset H$ um subespaço fechado. Então E possui complemento ortogonal, ou seja $H = E \oplus E^\perp$.

Solution: Apelaremos ao seguinte resultado:

Teorema:(Geraldo Botellho,pg.109, Teorema 5.2.2) Seja E um espaço com produto interno e seja M um espaço completo de E. Para todo $x \in E$ existe um único $p \in M$ tal que

$$\|x - p\| = dist(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

Agora, mostraremos que cada $x \in H$ admite uma única representação da forma $x = p + q$, onde $p \in E$, $q \in E^{\perp}$. Visto que E subespaço fechado em H(Banach, com a norma$|x| = \langle x, x\rangle$) implica em E completo com a métrica induzida da norma $|.|$. Temos que, dado $x \in H$, existe um único $p \in E$ tal que

$$\|x - p\| = dist(x, E)$$

Tomando $q = x - p$ segue imediatamente que $x = p + q$. Basta então provar que $q = x - p \in E^{\perp}$. Dado $y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, o vetor $p + \lambda y \in E$, logo

$$\begin{aligned}
\|q\|^2 &= \|x - p\|^2 = dist(x, M)^2 \leq \|x - (p + \lambda y)\|^2 = \|q - \lambda y\|^2 = \langle q - \lambda y, q - \lambda y\rangle = \\
&= \|q\|^2 - \lambda\langle y, q\rangle - \lambda\langle q, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

Disso, obtemos que $0 \leq t^2\|y\|^2 - 2t|\langle y, q\rangle|$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Consequentemente, o descriminante do bonômio é menor ou igual a zero. Isso nos dá $|\langle y, q\rangle| = 0$, e portanto $q \in E^{\perp}$. Para provar a unicidade, suponha que $p + q = p_1 + q_1$, com $p, p_1 \in E$ e $q, q_1 \in E^{\perp}$. Como E e $E^{\perp}$ são subespaços, temos que

$$p - p_1 = q - q_1 \in E \cap E^{\perp} = 0$$

segue que $p = p_1$ e $q = q_1$.

14. Sejam H um espaço de Hilbert, $0 \neq E \subset H$ subespaço fechado e $P_E : H \to H$ o operador projeção ortogonal sobre E. Prove que P_E é um operador auto-adjunto.

Solution: Um operador linear $T : H \to H$ é auto-adjunto se $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \ \forall u, v \in H$.

Sendo $0 \neq E \subset H$ um subespaço fechado, então $H = E \oplus E^{\perp}$, $E^{\perp}$ é chamado de complemento ortogonal do subespaço E em H (Veja: Observação 5, Brezis pg 137), (Veja: Teorema 18.7- Introdução à Análise Funcional.César R. de Oliveira).

Sendo assim, todo $\xi \in H$ se decompõe $\xi = \xi_E + \xi_{E^{\perp}}$, onde $P_E\xi = \xi_E \in E$ e $\xi_{E^{\perp}} \in E^{\perp}$. Considere dois vetores quaisquer em $\xi = \xi_E + \xi_{E^{\perp}}$, $\eta = \eta_E + \eta_{E^{\perp}}$ em H. Como

$$\langle P_E\xi, \eta\rangle = \langle \xi_E, \eta_E + \eta_{E^{\perp}}\rangle = \langle \xi_E, \eta_E\rangle = \langle \xi_E + \xi_{E^{\perp}}, \eta_E\rangle = \langle \xi_E, P_E\eta\rangle,$$

Segue que P_E é auto-adjunto.

15. Seja $K \subset$ um conjunto convexo. Seja $f \in H$ e seja $u = P_K f$. Prove que

$$|v - u|^2 \leq |v - f|^2 - |u - f|^2 \quad \forall v \in K.$$

Deduzir que

$$|v - u| \leq |v - f| \quad \forall v \in K.$$

Dé uma interpretação geométrica

Solution: Fazemos

$$\begin{aligned} |v-f|^2 &= |v-f+u-u|^2 = |(v-u)+(u-f)|^2 \\ &= |v-u|^2 + |u-f|^2 + 2\langle v-u, u-f\rangle \\ |v-f|^2 - |u-f|^2 &= |v-u|^2 + 2\langle v-u, u-f\rangle \end{aligned}$$

Daí podemos ver que

$$|v-f|^2 - |u-f|^2 = |v-u|^2 + 2\left[\langle v,u\rangle - \langle v,f\rangle - \langle u,u\rangle + \langle u,f\rangle\right] \tag{6}$$

Por outro lado temos que pela caracterização de $u = P_K f$ temos que

$$\begin{aligned} \langle f-u, v-u\rangle &\leq 0 \\ \langle f,v\rangle - \langle f,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle &\leq 0 \\ \langle v,u\rangle - \langle v,f\rangle - \langle u,u\rangle + \langle u,f\rangle &\geq 0 \\ 2\left[\langle v,u\rangle - \langle v,f\rangle - \langle u,u\rangle + \langle u,f\rangle\right] &\geq 0 \end{aligned}$$

Dai temos que pela desigualdade anterior e pelo fato de $|v-u|^2 \geq 0$ a equação (6) fica na desigualdade

$$|v-f|^2 - |u-f|^2 \geq |v-u|^2$$

que é o que se queria demonstrar.

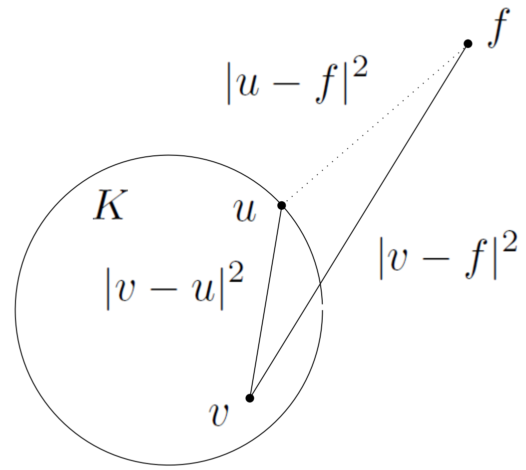
Da mesma firma temos $|u-f|^2 \geq 0$ e assim temos que $-|u-f|^2 \leq 0$, assim mostramos então que

$$|v-f|^2 \geq |v-u|^2$$

e com isso

$$|v-f| \geq |v-u|$$

interpretação gráfica



16. Seja $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^1. Seja $K \subset H$ convexo e seja $u \in H$. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes

    1. $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in K$,
    2. $(F'(u), v - u) \geq 0\ \forall v \in K$.

Solution: (1. $\longrightarrow$ 2.) Como K é convexo, então para $v, v_1 \in K$ temos que $tv + (1-t)v_1 \in K$ para todo $t \in [0,1]$, logo por hipóteses $F(u) \leq F(tv + (1-t)v_1)$. Por outro lado, como $K \subset H$ então fazendo $v_1 = u$ obtemos

$$F(u) \leq F(tv + (1-t)u) = F(u + t(v-u)),$$

assim

$$0 \leq \frac{F(u + t(v-u)) - F(u)}{t} \qquad \forall t \in [0,1], v \in K,$$

donde fazendo $t \longrightarrow 0$, obtemos $0 \leq (F'(u), v-u)\ \forall v \in K$, de fato é a definição da derivada $F'(u)$ na direção do vetor $v - u$.

(2. $\longrightarrow$ 1.) Seja $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\varphi(t) := F(u + t(v-u)) = F(tu + (1-t)v)$, é claro que φ é C^1 pois de fato F o é, além disso é convexa, de fato para todo $x, t_1, t_2 \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}\varphi(xt_1 + (1-x)t_2) &= F((xt_1 + (1-x)t_2)v + (1 - (xt_1 + (1-x)t_2))u) \\ &= F(xt_v + (1-x)t_2 v + u - xt_1 u + (1-x)t_2 u + ux - ux) \\ &= F(xt_1 v + (1-t_1)xu + (1-x)t_2 v + (1-x)(u - t_2 u)) \\ &= F(x(t_1 v + (1-t_1)u) + (1-x)(t_2 v + (u - t_2 u))) \\ &\leq xF(t_1 v + (1-t_1)u) + (1-x)F(t_2 v + (u - t_2 u)) \\ &= x\varphi(t_1) + (1-x)\varphi(t_2),\end{aligned}$$

portanto φ também é convexa e assim $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$. Isto é $F(v) - F(u) \geq (F'(u), v-u) \geq 0$, e portanto $F(v) \geq F(u)$ para todo $v \in K$.

17. Seja $a : H \times H$ é uma bilinear e continua tal que

$$0 \leq a(u,u), \quad \forall u \in H$$

Provar que $u \rightarrowtail F(u) = a(u,u)$ é convexa, é C^1 e calcular sua diferencial.

Solution: Vamos mostrar primeiro que F é convexa. De fato,pela definição temos que $0 \leq a(u,u), \quad \forall u \in H$, assim temos que para $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}0 &\leq t(1-t)a(u-v, u-v) \\ &= t(1-t)[a(u,u) - a(u,v) - a(v,u) + a(v,v)] \\ &= t(1-t)[a(u,u) + a(v,v)] + t(1-t)[-a(u,v) - a(v,u)]\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}0 &\geq t(1-t)[a(u,v) + a(v,u)] + t(t-1)[a(u,u) + a(v,v)] \\ &= t(1-t)[a(u,u) + a(v,v)] + F(u)(t^2 - t) + F(v)(t^2 - t) \\ &= t(1-t)[a(u,u) + a(v,v)] + F(u)(t^2 - t) + F(v)(t^2 - t) + tF(v) - tF(v) + F(v) - F(v) \\ &= t(1-t)[a(u,u) + a(v,v)] + t^2 F(u) + F(v) - 2F(v) + t^2 F(v) - tF(u) - (1-t)F(v)\end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}t^2 F(u) + t(1-t)[a(u,u) + a(v,v)] + (1-t)^2 F(v) &\leq tF(u) + (1-t)F(v) \\ a(tu, tu) + a(tu, (1-t)v) + a((1-t)v, tu) + a((1-t)v, (1-t)v) &\leq tF(u) + (1-t)F(v) \\ a(tu + (1-t)v, tu + (1-t)v) &\leq tF(u) + (1-t)F(v) \\ F(tu + (1-t)v) &\leq tF(u) + (1-t)F(v)\end{aligned}$$

Portanto F é convexa.
Agora vamos calcular sua diferencial, pela definição temos que

$$\begin{aligned}F'(u)v &= \lim_{h\to 0} \frac{F(u+hv) - F(u)}{h|v|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(u+hv, u+hv) - a(u,u)}{h|v|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(u,u) + a(u,hv) + a(hv,u) + a(hv,hv) - a(u,u)}{h|v|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ha(u,v) + ha(v,u) + h^2 a(v,v)}{h|v|} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(u,v) + a(v,u) + ha(v,v)}{|v|} = \frac{a(u,v) + a(v,u)}{|v|}\end{aligned}$$

Como a é uma aplicação bilinear continua e $v \neq 0$, portanto F é C^1.

18. Seja $G \subset H$ um subespaço linear do espaço de Hilbert H, G esta equipado com a norma de H. Sejam F um espaço de Banach e $S : G \to F$ um operador linear limitado. Então existe um operador linear limitado $T : H \to F$ que estende S e $||T||_{\mathcal{L}(H,F)} = ||S||_{\mathcal{L}(G,F)}$.

Solution: Temos que $S : G \to F$ um operador linear limitado. Vemos que G é denso em $\overline{G}$ pois para todo $x \in \overline{G}$ existe uma sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que $x_n \to x$, logo para qualquer $\delta > 0$ existe n_0 tal que $||x_n - x|| < \delta$ para todo $n > n_0$, assim $x_n \in B_\delta(x)$. Definimos a extensão de S pela continuidade $\overline{S} : \overline{G} \to F$ tal que

$$\overline{S}(x) = \lim_{n\to\infty} S(x_n),$$

a qual esta bem definida desde que F é Banach, o limite de $(S(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ existe e é único. Vemos que é linear e como S é limitado temos

$$||\overline{S}|| = \sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ ||x|| = 1}} |\overline{S}(x)| = \sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ ||x|| = 1}} \left|\lim_{n\to\infty} S(x_n)\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\substack{x \in \overline{G} \\ ||x|| = 1}} |S(x_n)|\right) = \sup_{\substack{x \in G \\ ||x|| = 1}} |S(x)| =$$

$= ||S||$, então $\overline{S}$ é limitado. Consideremos a projeção $P_{\overline{G}}$ tal que se $h \in H$, então $P_{\overline{G}}h = g \in \overline{G}$ se $< h - g, x >= 0$ para todo $x \in \overline{G}$, este operador é linear e continuo. Assim definimos o operador linear $T : H \to F$ como sendo $T = \overline{S} \circ P_{\overline{G}}$, o qual é uma extensão de S pois $T(g) = \overline{S}(P_{\overline{G}}(g)) = \overline{S}(g) = S(g)$ $\forall g \in G$ e temos

$$||T|| = \sup_{\substack{h \in H \\ ||h|| = 1}} |T(h)| = \sup_{\substack{h \in H \\ ||h|| = 1}} |\overline{S}(P_{\overline{G}}(h))| \leq \sup_{\substack{g \in \overline{G} \\ ||g|| = 1}} |\overline{S}(g)| = ||\overline{S}|| = ||S||.$$

19. Assuma que $\{e_n\}$ uma base ortonormal de H.

i) Mostre que $e_n \rightharpoonup 0$ converge fraco.

Seja (a_n) uma sequência limitada em $\mathbb{R}$ e $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

ii) Prove que $|u_n| \to 0$.

iii) Prove que $\sqrt{n}\, u_n \rightharpoonup 0$ converge fraco.

Solution:

i)

Pelo Teorema da Representação de Riesz's, para qualquer $f \in H^*$, existe $z \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, z\rangle \ \forall x \in H \text{ e } \|f\| = \|z\|.$$

Em particular,

$$f(e_n) = \langle e_n, z\rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Pelo Teorema da Desigualdade de Bessel, como (e_n) é uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno H, então para todo $x \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [f(e_n)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_n, z\rangle^2 \leq \|z\|^2$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, z\rangle^2$ é convergente.

$$\Rightarrow \langle e_n, z\rangle \to 0 \text{ (convergência forte) quando } n \to \infty$$

$$\Rightarrow f(e_n) \to 0 \text{ (convergência fraca) quando } n \to \infty$$

$$\Rightarrow e_n \rightharpoonup 0 \text{ (convergência fraca) quando } n \to \infty$$

ii)

Como (a_n) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq c$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \\ \Rightarrow \|u_n\| &= \frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i|\|e_i\| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c.1 = \frac{1}{n}.c.n \\ \Rightarrow \|u_n\| &\leq c\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \textbf{(*1)} \end{aligned}$$

Logo (u_n) é uma sequência limitada. Por outro lado, como $u_n \in H$, (e_n) é uma sequência ortonormal em H, pelo Teorema da Desigualdade de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle u_n, e_k\rangle^2 \leq \|u_n\|^2\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo a série $\sum_{k=1}^{\infty} \langle u_n, e_k\rangle^2$ é convergente.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \langle u_n, e_k\rangle \longrightarrow 0 \text{ para } k \longrightarrow \infty \\ &\Longrightarrow \quad \langle u_n, e_k\rangle \longrightarrow 0 \text{(para cada } k \text{ fixo) } n \longrightarrow \infty \\ &\Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow 0 \\ &\Longrightarrow \quad |u_n| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

iii) Como $(\sqrt{n}\ u_n)$ é uma sequência limitada em H e (e_n) é uma sequência ortonormal em H, pelo Teorema da Desigualdade de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \sqrt{n}\ u_n, e_k\rangle^2 \leq \|\sqrt{(n)}u_n\|^2\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo a série $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \sqrt{n}u_n, e_k\rangle$ é convergente.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \langle \sqrt{n}\ u_n, e_k\rangle \longrightarrow 0 \text{ para } k \longrightarrow \infty \\ &\Longrightarrow \quad \langle \sqrt{n}\ u_n, e_k\rangle \longrightarrow 0 \text{(para cada } k \text{ fixo) } n \longrightarrow \infty \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{n}u_n \longrightarrow 0 \text{ convergência forte} \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0 \text{ convergência fraca.} \end{aligned}$$