Lista 7 de Análise Funcional - Doutorado 2016

Professor Marcos Leandro

22 de Maio de 2018

1. Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subseteq H$ uma sequência tal que
$$x_n \overset{H}{\rightharpoonup} x \quad e \quad \|x_n\| \to \|x\|.$$
Mostre que $x_n \to x$.

2. Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subseteq H$ uma sequência tal que
$$\sup_n |\langle y, x_n \rangle| < \infty, \quad \text{para cada} \quad y \in H$$
Use o Princípio da Limitação Uniforme para mostrar que (x_n) tem uma subsequência fracamente convergente.

3. Seja H um espaço de Hilbert. Dado $S \subset H$ mostre que $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$.

4. Se M é um subespaço de um espaço de Hilbert H mostre que M é fechado se e sómente se $M = M^{\perp\perp}$.

5. Se S é um subconjunto de um espaço de Hilbert H, mostre que o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de vetores de S é denso em H se, e somente se, $S^{\perp} = \{0\}$.

6. Sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é um subconjunto ortonormal finito de um espaço de Hilbert H e $x \in H$. Se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são escalares mostre que $\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2$ atinge seu mínimo valor se, e somente se, $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$.

7. Considere $H = \ell_2$ com o produto interno e norma euclidianos. Mostre que
$$O = \{e_1, e_2, \cdots, e_N, \cdots\},$$
onde $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$, é uma base de Hilbert.

8. Seja H um espaço de Hilbert separável. Mostre que todo conjunto ortonormal em H é contável.

9. Seja $e_n(t) = e^{int}, \ t \in [0, 2\pi]$. Mostre que $\{e_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\} \subset L^2([0, 2\pi])$ e é ortonormal.

10. Sejam H um espaço de Hilbert, $0 \neq E \subset H$ subespaço fechado e $P_E : H \to E$ o operador projeção. Prove que:
    (i) $\|P_E\| = 1$;
    (ii) P_E é sobrejetor;
    (iii) $P_E^2 = P_E$ e $P_E P_{E^{\perp}} = 0$;
    (iv) $P_{E^{\perp}} = Id - P_E$ e $\ker(P_E) = E^{\perp}$.

11. **(*)**Seja $(H, \|.\|)$ um espaço normado. Prove que a norma $\|.\|$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a Identidade do Paralelogramo.

12. Prove que $L^p(\Omega), \ 1 \leq p < \infty$, é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$.

13. Seja H um espaço de Hilbert, $E \subset H$ um subespaço fechado. Então E possui complemento ortogonal, ou seja $H = E \oplus E^{\perp}$.

14. Sejam H um espaço de Hilbert, $0 \neq E \subset H$ subespaço fechado e $P_E : H \to H$ o operador projeção ortogonal sobre E. Prove que P_H é um operador auto-adjunto.