Análise Funcional - Lista 06 (Espaços Separáveis)

Marcos L. M. Carvalho - Turma de Doutorado 2018

1 de Junho de 2018

1. Seja E um espaço métrico separável e $F \subset E$. Prove que F é separável.

Solution:

Como X é separável, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em X. Considere $(r_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ uma sequência tal que $r_m \to 0^+$. Defina $B_{r_m}(u_n)$ a bola centrada em (u_n) e de raio r_m. Note que como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em X e $M \subset X$ o conjunto $A = B_{r_m}(u_n) \cap M \neq \emptyset$, seja $(Y_{m,n}) \in A$ e considere Y_p, $\;p = m, n$, a sequência de todos os $(Y_{m,n}) \in A$.

Afirmação: (Y_p) é denso em M.

De fato, seja $x \in M$ e considere V_x uma vizinhança de x de raio ϵ. Como $r_m \to 0^+$, tome um r_m tal que $0 < 2r_m < \epsilon$. Logo, $d(u_n, x) < r_m$. Por outro lado,

$d(Y_p, x) \leq d(Y_p, u_n) + d(u_n, x) < r_m + r_m < \epsilon$.

Portanto, (Y_p) é denso em M e M é separável.

2. Seja E um espaq vetorial de dimensão finita. Prove que E é separável.

Solution: Suponha que $\dim E = n$, e considere uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ para E. Assim, todo elemento $x \in E$ pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, / x_i \in \mathbb{R}.$$

Como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é enumerável e denso nos reais, temos que os elementos $y \in E$ da forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \; y_i \in \mathbb{Q}$$

formam um conjunto denso e enumerável em E. Isso mostra que E é separável.

3. Sejam (E, d) um espaço normado e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequencia. Prove que $F = \overline{span\{x_1, x_2, \dots\}}$ é separável.

Solution: Seja $L_0 = \Big\{ y \in F \; ; \; y = \sum_{i=1}^{k} q_i x_i, \; q_i \in \mathbb{Q} \; \forall i = 1, \dots, k \Big\}$, temos que é enumerável pois é união enumerável de conjuntos enumeráveis (variando o $k \in \mathbb{N}$). Considerando E um espaço normado sobre os reais vamos ter que $L = \Big\{ y \in F \; ; \; y = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i, \; r_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, \dots, k \Big\}$ é um conjunto denso em F, logo se $x \in F$ e $\epsilon > 0$ então existe $y_0 \in L$ tal que $||x - y_0|| < \frac{\epsilon}{2}$ com $y_0 = \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada $i = 1, \ldots, k$ existe $a_i \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|a_i - b_i| < \frac{\epsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} ||x_i||\right)}.$$

Assim $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in L_0$ e

$$||x - y|| \leq ||x - y_0|| + ||y_0 - y|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=i}^{k} |b_i - a_i| \, ||x_i|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon \sum_{i=1}^{k} ||x_i||}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} ||x_i||\right)} < \epsilon.$$

Entao L_0 é denso em F, logo F é separavel.

4. Sejam N um espaço normado e $E \subset N$. Prove que E é separável se, e somente se, $span\langle E\rangle$ é separável.

Solution: $\Leftarrow$) Por Hipótese temos que $span\langle E\rangle$ é separável. Como $E \subset span\langle E\rangle$, Pelo exercício 1 desta lista E, é separável.

$\Rightarrow$) Por hipótese E é separável, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in N}$, tal que $\overline{(x_n)} = E$. Seja $\alpha_i \in F$ e $x_i \in (x_n)$, a combinação $\sum_i \alpha_i x_i \in span(E)$. Defina a sequência $(y_i) = \{y_i = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_i x_i | \alpha_i \in F, x_i \in (x_n)\}$. Temos que $(y_i) \in span(E)$, (y_i) é enumerável e pelo fato que $\overline{(x_n)} = E$ temos que $\overline{(y_n)} = span(E)$. Portanto $span(E)$ é separável.

5. Sejam E um métrico e $F \subset E$ separável. Prove que $\overline{F}^d$ é separável.

Solution: Como $F \subset E$ é separável, implica que existe $D \subset F$ denso e enumerável em F. Sendo assim, como $D \subset \overline{F}^d$ é enumerável, resta mostrar que D é denso em $\overline{F}^d$, para isso, considere o conjunto aberto $U \subset \overline{F}^d$, então para qualquer $x \in U$ segue que $U \cap F \neq \emptyset$ pois $x \in \overline{F}^d$. Como $U \cap F$ é aberto em F e D é denso em F segue que $U \cap D = U \cap (F \cap D) = (U \cap F) \cap D \neq \emptyset$. Logo D é denso em $\overline{F}^d$.

6. Defina base de Schauder de um espaço normado $\mathcal{N}$ e prove que todo espaço normado que possui base de Schauder é separável.

Solution: Seja $\mathcal{N}$ um espaço vetorial normado. Uma **base de Schauder** para $\mathcal{N}$ é uma sequência $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{N}$, existe uma única sequência de escalares $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Neste caso, escrevemos $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$.

Como exemplo, temos que $\{e_n\}$ é uma base de Schauder para ℓ_p, se $1 \leq p < \infty$, onde $e_n = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$. E pelo exercício 5., juntamente com este, teremos que ℓ_∞ não possui base de Schauder. Vamos então a uma solução do exercício. Faremos a demonstração para $\mathcal{N}$ sobre $\mathbb{R}$. O caso em que $\mathcal{N}$ é $\mathbb{C}-$espaço vetorial é feito de maneira inteiramente análoga.

Seja então $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ uma base de Schauder para $\mathcal{N}$. Considere

$$X := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \in \mathcal{N}; \quad p_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

É claro que $X \subset \mathcal{N}$, e, como a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & X \\ (p_1, \cdots, p_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \end{array}$$

é sobrejetora e tem domínio enumerável, segue que X é enumerável.

Afirmamos que X é denso em $\mathcal{N}$; e com isso mostramos que $\mathcal{N}$ é separável.

Note inicialmente que $\{e_n/\|e_n\|\}$ também é uma base de Schauder para $\mathcal{N}$, de modo que, sem perda de generalidade, supomos e_n unitário para todo n.

Seja $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in \mathcal{N}$ e tome $\epsilon > 0$. Devemos mostrar que $B_\epsilon(x) \cap X \neq \emptyset$. Fixe $\delta > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere $p_i \in B_{\delta/2^i}(x_i) \cap \mathbb{Q}$. Tome $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| < \delta$$

Então,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \right\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} p_i e_i \right\| \\ &\leq \delta + \sum_{i=1}^{n} |x_i - p_i| \|e_i\| \\ &< \delta + \sum_{i=1}^{n} \delta/2^i \\ &< 2\delta. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \epsilon/2$, obtemos $\sum_{i=1}^{n} p_i e_i \in B_\epsilon(x) \cap X$, como queríamos.

Observação: Existem espaços de Banach que são separáveis e no entanto não possuem base de Schauder. (ver: Enflo, P. (1973), A Counterexample to the approximation property. Acta Math. **130,** 309-317.)

7. Use e Questão 3 para provar que ℓ^p, onde $1 \leq p < \infty$ é separável.

Solution: Note que a sequência (e_i) definida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ...) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ...) \\ &\vdots \end{aligned}$$

é uma base de Shauder para ℓ^p. Tome um $x \in \ell^p$. Para esse x existe uma sequência (x_k) tal que

$$x = (x_1, x_2, x_3, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i.$$

Observe que essa sequência é única, pois caso contrário existiria pelo menos um $j \in \mathbb{N}$ em que fosse possível trocar o x_j da sequência por um $y_j \neq x_j$, mas assim a j-ésima entrada de x seria diferente. Tendo isso, temos que (e_i) realmente determina uma base de Shauder para ℓ^p. Portanto, pelo exercício 3, ℓ^p é separável.

8. Prove que ℓ^∞ não é separável.

Solution: Suponha por absurdo que ℓ^∞ contenha uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ enumerável e densa. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevamos $x_n = (a_j^n)_{j=1}^\infty$. Seja $y = (b_j)_{j=1}^\infty$ a sequência definida por $b_j = 0$ se $|a_j^j| \geq 1$; e $b_j = a_j^j + 1$ se $|a_j^j| < 1$. Como $|b_j| < 2$ para todo j, temos que $y \in \ell^\infty$. Da densidade da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||y - x_n||_\infty < 1$. Mas

$$||y - x_n||_\infty = sup\{|b_1 - a_1^n|, |b_2 - a_2^n|, \dots, |b_n - a_n^n|, |b_{n+1} - a_{n+1}^n|, \dots\} \geq |b_n - a_n^n|$$

Como a norma $|b_n - a_n^n|$ é igual a $|0 - a_n^n|$ se $|a_n^n| \geq 1$ e igual a $|a_n^n + 1 - a_n^n|$ se $|a_n^n| < 1$, temos que $|b_n - a_n^n| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $||y - x_n||_\infty \geq 1$, uma contradição.

9. Use o Teorema de Stone-Weierstrass para mostrar que $C[a, b]$ é separável.

Solution:

Primeiro note que

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & C[0,1] & \to & C[a,b] \\ & & f & \mapsto & \tilde{f} \left(: \ [a,b] \ \ni \ t \ \longmapsto \ f\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right) \ \in \ \mathbb{R} \right) \end{array}$$

se trata de um isomorfismo linear entre os epaços vetoriais envolvidos e ainda, que

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\|_\infty &= \sup_{t \,\in\, [a,b]} |\tilde{f}(t)| \\ &= \sup_{t \,\in\, [a,b]} |f\left(\frac{t-a}{b-a}\right)| \\ &= \sup_{t \,\in\, [0,1]} |f(t)| \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

para toda $f \in C[0, 1]$. Usaremos este fato para montarmos nosso argumento sobre o intervalo unitário e ainda assim garantir sua validade para o caso geral.

Para toda $f \in C[0, 1]$ e todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente fixados pode-se encontrar $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo a se ter

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

sempre que $|x - y| \leqslant 1/n$ em $[0, 1]$ ('f contínua e $[0, 1]$ compacto $\implies$ f uniformemente contínua'). De posse da partição $P = \{k/n : k = 0, \dots, n\} \subset [0, 1]$ considere a função poligonal $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f\left(k/n\right) + n\left(t - \frac{k}{n}\right)\left(f\left((k+1)/n\right) - f\left(k/n\right)\right),$$

para todo $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, \ldots, n-1$. Tal função é obviamente contínua e satisfaz

$$|g(t) - f(t)| < \frac{2\epsilon}{3}$$

para todo $t \in [0,1]$. Daí segue que

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |g(t) - f(t)| \leqslant \frac{2\epsilon}{3}$$

e portanto, pela arbitrariedade dos elementos f e $\epsilon > 0$, o conjunto das funções poligonais é denso em $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Observe que o conjunto de tais poligonais é não enumerável. No entanto, uma pequena modificação na construção de g nos permite permanecer sobre um conjunto enumerável de funções poligonais que ainda é denso em $C[0,1]$. De fato, tome $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ numa construção exatamente análoga à de g porém, satisfazendo $h(k/n) \in \mathbb{Q} \cap (f(k/n) - \epsilon/6, f(k/n) + \epsilon/6)$, $k = 0, \ldots, n$. Segue que

$$\begin{aligned}
|h(t) - g(t)| &= |h(k/n) + n\,(t - k/n)\,(h((k+1)/n) - h(k/n)) - \\
&\quad (f(k/n) + n\,(t - k/n)\,(f((k+1)/n) - f(k/n)))\,| \\
&< \frac{\epsilon}{6} + n(t - k/n)\frac{2\epsilon}{6} \\
&< \frac{\epsilon}{6} + n\frac{1}{n}\frac{2\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$ de onde se conclui que $\|h - g\|_\infty \leqslant \epsilon/3$. Logo,

$$\|h - f\|_\infty \leqslant \|h - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \leqslant 3\epsilon/3 = \epsilon.$$

Como observação final, notamos apenas que o conjunto das poligonais com vértices racionais pode ser identificado a um subconjunto de

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n,$$

onde

$$\mathbb{Q} = \{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) : a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{Q}\}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Segue daí que $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço separável.