Análise Funcional - Lista 06 (Espaços Separáveis)

Marcos L. M. Carvalho - Turma de Doutorado 2016

15 de Maio de 2018

1. Seja E um espaço métrico separável e $F \subset E$. Prove que F é separável.
2. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Prove que E é separável.
3. (*) Sejam (E, d) um espaço normado e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequencia. Prove que $F :=\text{span}\langle x_1, x_2, ...\rangle$ é separável.
4. (*) Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado e $E \subset \mathcal{N}$. Prove que E é separável se, e somente se, $\text{span}\langle E\rangle$ é separável.
5. (*) Sejam E um métrico e $F \subset E$ separável. Prove que $\overline{F}^d$ é separável.
6. Defina base de Schauder de um espaço normado $\mathcal{N}$ e prove que todo espaço normado que possui base de Schauder é separável.
7. Use e Questão 6 para provar que ℓ^p, onde $1 \leq p < \infty$, é separável.
8. Prove que ℓ^∞ não é separável.
9. Use o Teorema de Stone-Weierstrass para mostrar que $(C[a, b], \|.\|_\infty)$ é separável.