Análise Funcional - Lista 05 (Topologia Fraca)

Marcos L. M. Carvalho - Turma de Doutorado 2018

17 de Abril de 2018

1. Seja X um conjunto, $\{(Y_i, \tau_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $\{\varphi_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ uma família de funções. Defina
$$\mathcal{F} := \left\{\varphi_i^{-1}(\omega_i) : \omega_i \in \tau_i,\ i \in I\right\}.$$
Prove que existe uma única e menor topologia τ_w em X tal que $\mathcal{F} \subseteq \tau_w$. Além disso, prove que
$$\tau_w = \left\{\varnothing, X, \bigcap_{fin} \varphi_i^{-1}(\omega_i), \bigcup_{qq}\bigcap_{fin} \varphi_i^{-1}(\omega_i)\right\}.$$

2. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Prove que a topologia $\sigma(E, E^*)$ coincide com a topologia gerada pela norma.

3. Sejam E, F espaços normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $(x_n) \subseteq E$ uma sequencia tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E. Prove que $Tx_n \rightharpoonup Tx$ em F.

4. Prove que $e_i \rightharpoonup 0$ em ℓ^p, $1 < p < \infty$, onde $e_i := (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$. Este é um exemplo de uma sequencia que converge fracamnete, mas não converge fortemente.

5. Suponha que $\psi_n \rightharpoonup \psi$ em $(C[a, b], \|.\|_\infty)$. Mostre que ψ_n converge pontualmente para ψ.

6. Sejam E um espaço reflexivo $(x_n) \subseteq E$ uma sequencia limitada. Prove que (x_n) possui subsequencia convergindo na topologia $\sigma(E, E^*)$.

7. **(*)** Sejam E um espaço vetorial e $f, f_1, ..., f_n \in E^*$. Existem escalares $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ de forma que $f = a_1 f_1 + ... + a_n f_n$ se, e somente se,
$$\bigcap_{j=1}^{n} Ker(f_j) \subset Ker(f).$$

8. Sejam E um espaço vetorial de dimensão infinita e $S := \{x \in E : \|x\| = 1\}$.
   (i) Prove que
   $$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\};$$
   (ii) Prove que qualquer aberto fraco de E contém uma reta;
   (iii) Prove que a topologia fraca não pode ser gerada por normas;
   (iv) Dê um exemplo de um aberto na topologia da norma (aberto forte) que não é aberto na topologia $\sigma(E, E^*)$ e justifique;
   (v) Dê um exemplo de um função que é contínua na topologia da norma, mas não é contínua na topologia $\sigma(E, E^*)$ e justifique;
   (vi) Se E for um espaço reflexivo, prove que existe uma sequencia que converge fracamente mais não converge fortemente;
   (*)(vii) Prove que a topologia $\sigma(E, E^*)$ não é metrizável. (Dica: Argumente por contradição e use o Exercício 7.)

9. **(*)** Seja X um espaço normado e $x_n \rightharpoonup x$ em X. Mostre que $x \in \overline{Y}^{\sigma(X,X')}$, onde Y $=$ span$\{x_n\}$ e o fecho de Y é com respeito a topologia fraca.

10. **(*)** Seja E uma espaço normado e seja $\Phi : E \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = \|x\|$. Mostre que Φ é convexa e semicontínua inferiormente. Conclua que Φ é fracamente semicontínua inferiormente.

11. **(*)** Seja E um espaço de Banach e seja $A \subset E$ tal que A é compacto na topologia fraca. Mostre que A é limitado.

12. Sejam $(x_n) \subseteq \ell^1$ e $x \in \ell^1$. Prove que $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $x_n \to x$.

13. Sejam $E := (C[0,1], \|.\|_\infty)$ e $f, f_n \in E^*$ definidas por

$$f(\psi) = \psi(0), \qquad f_n(\psi) = n\int_0^{1/n} \psi(t)dt,\ \psi \in E.$$

Prove que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e que $f_n \not\to f$.

14. Seja H um espaço de Hilbert. Prove a *Desigualdade do Paralelogramo* e que H é uniformemente convexo, e portanto, reflexivo.

15. Enuncie as *Desigualdades de Clarkson* e use-as para mostrar que $L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$, é uniformemente convexo, e portanto, reflexivo.

16. Seja E um espço vetorial normado.
    (i) Defina espaço estritamente convexo;
    (ii) Prove que os espaços $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty),\ (\mathbb{R}^2, \|.\|_1),\ \ell^1$ e (ℓ^∞) não são estritamente convexos;
    (iii) Prove que todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo.

17. **(*)** Mostre que todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo.

18. Seja E um espaço de Banach reflexivo. Prove que para cada $f \in E'$ existe $x_f \in E$ tal que $\|x_f\| = 1$ e $\|f\| = f(x_f)$.

19. Seja E um espaço de Banach. Em E' prove que $\sigma(E', E) \subseteq \sigma(E', E'')$. Além disso, se E é reflexivo, então $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.

20. Prove que um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, E^* é reflexivo.

21. Seja E um espaço vetorial normado. Se E' é separável, então E também o é. Dê um contra exemplo para o qual a recíproca não vale.