Análise Funcional - Marcos L. M. Carvalho

Exercícios - Lista 3

1. **(O cubo de Hilbert)** Defina o conjunto U de sequências de números complexos por,

$$U := \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{C}, |a_k| \leq \frac{1}{k}\}.$$

Mostre que:

(a) $U \subset \ell_2$;

(b) Toda sequencia $(\xi_n) \subset U$ possui subsequencia convergente em ℓ_2;

(c) Se $e_n := (\delta_{in})_{i=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, ...$, então toda subsequência da sequência $(a_n) \subset (e_n)$ diverge.

2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$, o espaço X pode ser coberto por uma união finita de bolas de raio ϵ. Tenha como verdadeiro o fato de que X é compacto se, e somente se, X é totalmente limitado. Seja

$$c_0 = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} y_n = 0\},$$

munido com a norma $\|y\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |y_n|$, onde $y = (y_n)$. Note que c_0 é um espaço de Banach. Tome $x = (x_n) \in c_0$ e considere o conjunto

$$S_x = \{(y_n) \in c_0 : |y_n| \leq |x_n|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que S_x é totalmente limitado e consequentemente compacto, com respeito a topologia forte.

3. Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, onde $1 < p < \infty$. Dado o funcional $f(x, y) = ax + by$, calcule a sua norma. (Sugestão: Use o método dos multiplicadores de Lagrange).

4. Dados números $p, q > 1$ satisfazendo $1/p + 1/q = 1$.

(i) Mostre que existe uma isometria linear de ℓ_q sobre ℓ_p^*. Neste caso escreve-se $\ell_q = \ell_p^*$. Neste caso escreve-se $\ell_q = \ell_p^*$.

(ii) Conclua que $\ell_p^{**} = \ell_p$.

(iii) Seja $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((\xi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n/2}}.$$

Calcule $\|f\|_{\ell^2}$.

5. Seja $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear e $\dim\mathcal{N}_1 < \infty$. Mostre que T é limitado.

6. Suponha que para todo operador linear $T : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ seja limitado. Prove que $\dim\mathcal{N} < \infty$.

7. Seja $T : \{(\xi_n) \in \ell^p : \sum_n |n^2\xi_n|^p < \infty\} \to \ell^p$, onde $1 \leq p < \infty$, definido por $T(\xi) := (n^2\xi_n)$. Prove que T n ao é um operador limitado.

8. Mostre que $\ell_1^* = \ell_\infty$.

9. Mostre que $c_0^* = \ell_1$. Conclua que $c_0^{**} = \ell_\infty$.

10. Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere o funcional $f_a : C[-1, 1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_a(\psi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)dt + a\psi(0).$$

Mostre que $f_a \in (C[-1, 1])^*$ e que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

11. **(Lema de Riesz)** Sejam $(\mathcal{N}, \|.\|)$ um espaço vetorial normado sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ e $\mathcal{M}$ um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{N}$. Prove que para cada $0 < \alpha < 1$ existe $\xi \in \mathcal{N}/\mathcal{M}$ com $\|\xi\| = 1$ e
$$\inf_{\eta \in \mathcal{M}} \|\xi - \eta\| \geq \alpha.$$
Dê um exemplo para justificar que a hipótese "$\mathcal{M}$ é fechado" não pode ser retirada.

12. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ e $T : \mathcal{N}1 \to \mathcal{N}_2$ um operador linear. São equivalentes:

    (i) $\sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| < \infty$;
    (ii) Exite $C > 0$ tal que $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$;
    (iii) T é uniformemente contínuo;
    (iv) T é contínuo;
    (v) T é contínuo em $\xi = 0$.

13. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Seja
$$\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) := \text{conjuntos dos operadores lineares limitados de } \mathcal{N}_1 \text{ a } \mathcal{N}_2.$$
Dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina
$$\|T\| := \sup_{\xi \in \mathcal{N}_1,\ \|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|.$$
Prove que:

    (i) $(\mathcal{L}(\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2), \|.\|)$ é um espaço normado;
    (ii) Se $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ também o é;
    (iii) $\|T\| = \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} = \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|}$;
    (iv) Dados $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1) := \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_1)$, então $TS \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ e $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.
    (v) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, então
    $$e^{tT} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j}{j!} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$$
    e $\|e^{tT}\| \leq e^{t\|T\|}$.
    (vi) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, com $\|T\| < 1$, então $S := \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ e $S = (I_d - T)^{-1}$, onde I_d é o operador identidade.
    (vii) Se $\mathcal{N}_1$ é um espaço de Banach e $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, com T inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, e $\|T - S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, enão S é inverível. Conclua que o conjunto dos operadores inversíveis em $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ é aberto (Sugestão: Use o item (vi)).

14. Seja $K \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ tal que $\|K\|_\infty < 1$. Mostre que para cada $f \in \mathcal{C}([0,1])$ existe uma única $u \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que
$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)u(s)ds + f(t),\ \forall t \in [0,1].$$
Prove ainda que
$$u(t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t,s)f(s) \right) ds,\ t \in [0,1],$$
onde
$$K_n(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & , \text{ se } n = 0; \\ \displaystyle\int_0^1 K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau & , \text{ se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
(Sugestão: use 6(vi)).

15. Dada $K : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} < 1$ mostre que a equação integral
$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + f(x),\ x \in \Omega$$
tem uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.