Análise Funcional - Marcos L. M. Carvalho

Exercícios - Lista 2

1.

2. Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$ (não necessariamente de dimensão finita). Dizemos que um conjunto um $\mathcal{B} \subset E$ é dita uma base de Hamel se $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente e span$\mathcal{B} = E$.

   (i) Use o Lema de Zorn para provar que todo espaço vetorial não trivial possui base de Hamel.

   (ii) Use o Teorema da Categoria de Baire para mostrar que se $E$ é um espaço de **Banach** e dim$E = \infty$, então $\mathcal{B}$ é não-enumerável.

   (iii) Prove que todas as bases de Hamel $E$ possuem a mesma cardinalidade.

   (iv) Dê um exemplo de espaço vetorial que não seja de Banach e que tenha base de Hamel enumerável.

3. Defina espaço de Hilbert e base ortonormal completa e mostre que todo espaço de Hilbert não trivial possui base ortonormal completa.

4. Enuncie e demonstre o Teorema de Hahn-Banach complexo.

5. (i) Mostre através de exemplo que a extensão dada pelo Teorema de Hahn-Banach pode não ser única.
   (ii) Seguindo a notação do Brézis, se $\overline{G} = E$, mostre que a extensão é única.

6. Sejam $G$ um subespaço do espaço vetorial $E$, e $p, f$ como no Teorema de Hahn Banach. Se existem duas extensões de Hahn-Banach $F_0, F_1 : E \to \mathbb{C}$ de $f$ então

$$F_s := sF_1 + (1-s)F_0, \ \ s \in [0,1]$$

   também é uma extensão Hahn-Banach.

7. Sejam $E$ um espaço vetorial normado e $G$ um subespaço de $E$. Mostre que $G$ é denso em $E$ se, e somente se, o único elemento de $E^*$ que se anula em $G$ é o funcional nulo.

8. Sejam $(\mathcal{N}_1, \|.\|_1), (\mathcal{N}_2, \|.\|_2)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Mostre que $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço de Banach se, e somente se, $\mathcal{N}_2$ é um espaço de Banach.

9. Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ espaços normados não-triviais. Prove que se qualquer operador linear limitado não-nulo $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é sobrejetor, então dim$\mathcal{N}_2$=1.

10. Mostre que todo funcional linear não nulo é sobrejetivo.

11. Seja $E$ um espaço normado real e $x \in E$. Mostre que

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \ f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

    Conclua que a aplicação $J : E \to E^{**}$ definida por $x \mapsto J(x) = J_x \in E^{**}$, onde

$$J_x(f) = \langle f, x \rangle, \ \ f \in E^*$$

    é uma isometria.

12. Seja $E$ um espaço normado, $M \subseteq E$ um subespaço fechado e $x_0 \in E \backslash M$. Se

$$d = dist(x_0, M),$$

    mostre que existe $f_0 \in E^*$ tal que $f_{0|M} = 0$, $f_0(x_0) = 1$ e $\|f_0\| = 1/d$.

13. Dados dois espaços normados $E, F$ e $T : E \to F$ linear, mostre que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dim$E < \infty$. Conclua que um funcional linear $f : E \to \mathbf{R}$ pertence a $E^*$ se dim$E < \infty$.

14. Sejam $E$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $M$ um subespaço de $E$. Considere

$$M^{\perp} := \{f \in E^* | \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M\}.$$

    Mostre que $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

15. Sejam $E$ espaço normado sobre $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A, B \subset E$ convexos disjuntos. Suponha que $A$ tenha pelo menos um ponto interior. Mostre que existem $f \in E^*, f \not\equiv 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $[f = \alpha]$ separa $A$ e $B$.