Lista 10 de Análise Funcional - Doutorado 2016

Professor Marcos Leandro

8 de Junho de 2018

1. Sejam E, F espaços de Banach. Prove que $\mathcal{K}(E,F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E,F)$, ou seja, todo operador limitada que é o limite uniforme de uma sequencia de operadores compactos, é compacto.

2. Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por
$$T(\xi_1, \xi_2, ...) = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, ...),$$
onde $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ é denso em $[0,1]$. Prove que $T \notin \mathcal{K}(\ell^2)$.

3. Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por
$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) := \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right).$$
Prove que T é auto adjunto e que $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} = \sigma(T)$.

4. Seja $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $T(\psi)(t) = t\psi(t)$. Prove que T é bem definido, limitado, auto-adjunto e $\mathrm{EV}(T) = \emptyset$ e $\sigma(T) = [0,1]$.

5. **[Exercício 6.18, Brézis]** Seja $S_e, S_d : \ell^2 \to \ell^2$ o operador definido por
$$S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (\xi_2, \xi_3, ...) \quad \text{e} \quad S_d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ...).$$
Prove que $\sigma(S_e) = \sigma(S_d) = [-1, 1]$.

6. Seja $D : (C^1[0,1], \|.\|_\infty) \to (C[0,1], \|.\|_\infty)$ definido por $D(\psi)(t) = \psi'(t)$. Prove que $\sigma(D) = \mathbb{R}$.

7. Seja $S : Dm(S) \subset C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $S(\psi)(t) = \psi'(t)$, onde
$$Dm(S) := \{\psi \in C^1[0,1] \mid \psi(0) = 0\}.$$
Prove que $\rho(S) = \mathbb{R}$.

8. Seja $T : (C[0,1], \|.\|_\infty) \to (C[0,1], \|.\|_\infty)$ definido por
$$T_K(\psi)(t) := \int_0^1 K(s,t)\psi(s)ds.$$
Calcule $\mathrm{EV}(T_K)$ e as auto-funções quando:
(a) $K(s,t) := s(1+t)$;
(b) $K(s,t) := t - s$;
(c) $K(s,t) := ts(1-ts)$;
(d) **(*)** $K(s,t) = \cos(s-t)$, quando o domínido de T for $C[0,\pi]$.

9. Seja $f \in (C[0,1], \|.\|_\infty)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, discuta sobre a existência de solução da equação integral
$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(s,t)u(s)ds, \tag{1}$$
onde K é dada pelos itens da Questão 8.

10. **(*)**Na questão 9 considere $K(s,t) = 2e^{s+t}$ e $f(t) = e^t$. Encontre os autovalores e auto vetores.