Análise Funcional - Marcos L. M. Carvalho

Exercícios - Lista 1

1. Se $E = (E, \|.\|)$ é um espaço normado real e $d(x, y) = \|x - y\|,\ x, y \in E$, mostre que d é uma métrica em E e portanto (E, d) é um espaço métrico.

2. Dados $p \in \mathbf{R}$, $1 \le p < \infty$ e $q > 0$ com $1/p + 1/q = 1$ valem:

   (i) para $a, b \ge 0$,
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \textbf{(Des. Young)}$$

   (ii) para $x_i, y_i \in \mathbf{R}$,
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\Big)^{1/q}, \qquad \textbf{(Des. Hölder)}\ ,$$

   (iii) para $x_i, y_i \in \mathbf{R}$,
$$\|x + y\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad \textbf{(Des. Minkowski)}\ .$$

3. Mostre que:

   (i) $\|.\|,\ \|.\|_S,\ \|.\|_M$ são normas equivalentes em $\mathbf{R}^N$;

   (iv) Se $N = 2$, então $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_M$;

   (v) Duas normas em um espaço de dimensão finita são equivalentes.

4. Dado $p \in [1, \infty)$ considere
$$\ell_p \ = \Big\{x = (x_1, x_2, \cdots)\ \mid\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\Big\},$$
$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

   (i) Mostre que $E = (\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço normado.

   (ii) Se $x \in \ell^p \cap \ell^q,\ 1 \le p \le q < \infty$, então $x \in \ell^r$, para todo $r \in [p, q]$. Além disso, prove que
$$\|x\|_r \le \|x\|_p^{\alpha} \|x\|_p^{1-\alpha},\ \text{one}\ \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

   (iii) Sejam $1 \le p \le q < \infty$ e $x \in \ell^p$. Mostre que $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

5. Considere
$$\ell_\infty \ = \Big\{x = (x_1, x_2, \cdots)\ \mid\ x_i \in \mathbf{R},\ (\mathbf{x_i})\ \text{é limitada}\Big\},$$
$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

   Mostre que $E = (\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ é um espaço normado.

6. Considere
$$c = \Big\{x = (x_1, x_2, \cdots)\ \mid\ x_i \in \mathbb{C},\ (x_i)\ \text{é convergente}\Big\},$$
$$c_0 = \Big\{x = (x_1, x_2, \cdots)\ \mid\ x_i \in \mathbb{C},\ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\Big\},$$
$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

   Mostre que $E = (c, \|.\|_\infty)$ e $E = (c_0, \|.\|_\infty)$ são espaços normados.

7. Defina
$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt, \; x \in C([0,1]).$$
Mostre que $E = (C([0,1]), \|.\|_1)$ é um espaço normado.

8. Dado um espaço normado $E = (E, \|.\|)$ mostre que:

   (i) $\Big| \|x\| - \|x\| \Big| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in E$;

   (ii) se $x_n \to x$ então $\|x_n\| \to \|x\|$. Portanto, a aplicação $\|.\| : E \to \mathbb{R}$;

   (iii) se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $x_n + y_n \to x + y$. Portanto, a aplicação $+ : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $+(x, y) = x + y$ é contínua.

   (iv) se $\alpha_n \in \mathbf{R}$ e $x_n \to x$ então $\alpha_n x_n \to \alpha x$. Portanto, as aplicação $. : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ definida por $.(\alpha, y) = \alpha y$ é contínua.

9. Prove que $E = (C([0,1], |.|_1)$ não é completo.

10. Dado um aberto limitado $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ mostre que $E = (C(\overline{\Omega}), |.|_\infty)$ é um espaço de Banach.

11. Prove que ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach.

12. Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado sobre um corpo de escalares $\mathbb{F}$. Prove que $\mathcal{N}$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série de elementos de $\mathcal{N}$ absolutamente convergente é convergente.

13. (a) Sejam (X, d) um espaço completo, $R \subset X$ um subconjunto fechado e $A : R \to R$ uma contração. Então A possui um único ponto fixo.
    (b) Use o resultado acima para demonstrar o Teorema de Picard.