Configurações Centrais: Um Panorama

Luis Fernando Mello

Seminário de Sistemas Dinâmicos, GSD/UFG

Instituto de Matemática e Computação – UNIFEI

e–mail:lfmelo@unifei.edu.br

23 de Março de 2021

Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. Solução homográfica e configuração central;
3. Principal problema em aberto;
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. Um artigo;
6. Problema em aberto.

Plano da palestra:

1. **Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;**
2. Solução homográfica e configuração central;
3. Principal problema em aberto;
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. Um artigo;
6. Problema em aberto.

1. Lei da Gravitação de Newton

Considere um corpo de massa m_1 localizado na posição r_1 e um corpo de massa m_2 localizado na posição r_2.

A lei da gravitação de Newton afirma que o corpo de massa m_1 exerce uma força sobre o corpo de massa m_2, sendo a magnitude dessa força

$$\frac{G\, m_1\, m_2}{|r_1 - r_2|^2},$$

sendo G a constante gravitacional e $|r_1 - r_2|$ a distância euclidiana entre os centros de gravidade dos corpos.

A direção da força é dada pela reta que une os dois corpos e o sentido da força sobre o corpo em r_2 é de r_2 para r_1.

1. Problema Newtoniano de 2 Corpos

O **problema Newtoniano de 2 corpos** consiste no estudo do movimento de 2 corpos de massas m_1 e m_2 localizados pelos vetores posições r_1 e r_2, respectivamente, interagindo entre eles através da força de atração gravitacional, de acordo com a Lei da Gravitação de Newton.

As **equações de movimento**, obtidas da segunda lei de Newton, são dadas por

$$m_1\ddot{r}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|r_2 - r_1|^2}\frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}, \quad m_2\ddot{r}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^2}\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}.$$

1. Problema Newtoniano de n corpos

O **Problema Newtoniano de n corpos** consiste no estudo do movimento de n corpos pontuais com massas positivas $m_1, \cdots, m_n$ interagindo entre eles através das forças de atrações gravitacionais, de acordo com a Lei de Gravitação de Newton.

1. Equações de movimento

Para $i = 1, 2, \ldots, n$, as **equações de movimento** são dadas por

$$m_i \ddot{r}_i = m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{G m_i m_j}{|r_i - r_j|^2} \frac{1}{|r_i - r_j|} (r_j - r_i).$$

A constante gravitacional G será considerada igual a 1;

$r_j \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, é o vetor posição do corpo j;

$r_{ij} = |r_i - r_j|$ é a distância euclidiana entre os corpos i e j.

1. Problema Newtoniano de n corpos

Assim, para $i = 1, 2, \ldots, n$, as equações de movimento são escritas da forma

$$\ddot{r}_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3}\,(r_j - r_i), \tag{1}$$

1. Centro de massa

O **centro de massa** do sistema é dado por

$$c = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j r_j,$$

sendo $M = m_1 + \cdots + m_n$ a massa total.

Sem perda de generalidade, consideramos o centro de massa na origem do sistema de coordenadas.

Um tal sistema é chamado **sistema inercial baricêntrico**.

1. Configurações

Uma **configuração** para os n corpos é um vetor

$$r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^{nd} \backslash \Delta,$$

sendo

$$\Delta = \{r_i = r_j, i \neq j\}$$

o conjunto das colisões.

Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. **Solução homográfica e configuração central;**
3. Principal problema em aberto;
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. Um artigo;
6. Problema em aberto.

2. Solução homográfica

Duas configurações para os n corpos

$$r = (r_1, \dots, r_n), \qquad \bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$$

são **similares** se é possível passar de uma delas para a outra por homotetias ou rotações de $\mathbb{R}^d$.

Uma **solução homográfica** do problema de n corpos é uma solução tal que a configuração dos n corpos no instante de tempo t permanece similar a ela própria quando t varia.

2. Solução homográfica de Euler

A primeira solução homográfica foi encontrada por Euler em 1767 no problema de 3 corpos.

Nessa solução, os 3 corpos são **colineares** em todo instante de tempo.

L. Euler, *De moto rectilineo trium corporum se mutuo attahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., **11** (1767), 144–151.

2. Solução homográfica de Euler

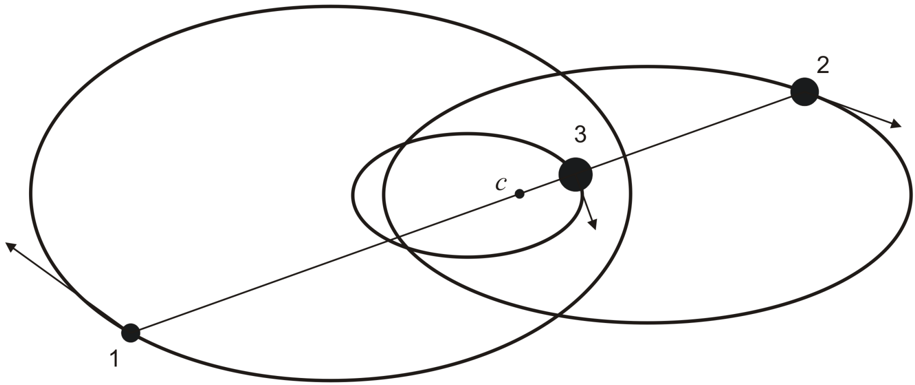


Figura 1: Solução homográfica de Euler.

2. Solução homográfica Lagrange

Em 1772 Lagrange encontrou uma outra solução homográfica para o problema de 3 corpos.

Nessa solução, os 3 corpos estão nos vértices de um **triângulo equilátero** em todo instante de tempo.

J.L. Lagrange, *Essai sur le problème de trois corps*, Œuvres, vol 6, Gauthier–Villars, Paris, 1873.

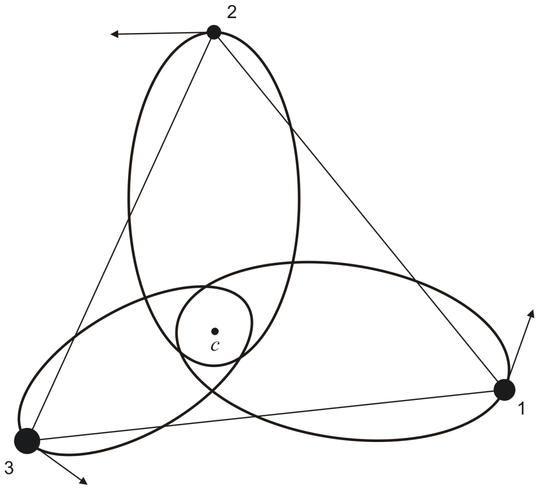


Figura 2: Solução homográfica de Lagrange.

2. Configuração central

Num instante $t = t_0$, a configuração dos n corpos é **central** se

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i, \qquad \lambda < 0, \tag{2}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Em outras palavras, o vetor aceleração de cada corpo está "apontando" para a origem (centro de massa) com magnitude (norma) proporcional à distância da origem.

Veja a figura a seguir.

2. Configuração central

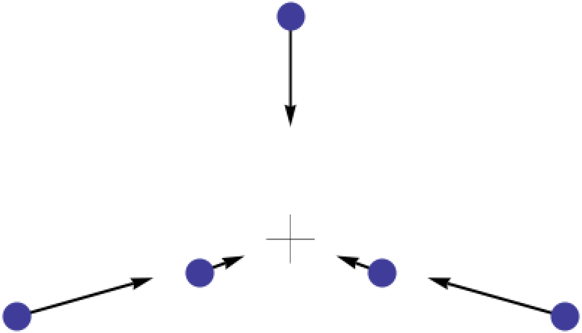


Figura 3: 4 corpos em configuração central.

www.scholarpedia.org/article/File:Centralconfigurations_cc5fig.gif

2. Configuração central

Pode ser provado que, neste caso,

$$\lambda = -\frac{U}{2I},$$

sendo

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

o potencial Newtoniano e

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{i<j} m_i m_j |r_i - r_j|^2,$$

momento de inércia do sistema.

2. Configuração central

A figura anterior sugere o que acontecerá com os corpos deixados numa configuração central com velocidades iniciais nulas.

Todos os corpos aceleram em direção à origem (centro de massa) de um modo que a configuração colapsa homoteticamente.

www.scholarpedia.org/article/File:Centralconfigurations_lagrangehomothetic.gif

2. Configuração central

Das equações (1) e (2), resulta que as **equações das configurações centrais** podem ser escritas como

$$\lambda r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3}(r_j - r_j), \tag{3}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Classes de configurações centrais

Qualquer homotetia ou qualquer rotação (centrada no centro de massa) de uma configuração central resulta em uma outra configuração central.

Duas configurações centrais estão **relacionadas** se é possível passar de uma para outra por homotetias ou por rotações.

Resulta desta definição uma relação de equivalência no conjunto das configurações centrais.

Assim, estudamos classes de configurações centrais definidas por esta relação de equivalência.

2. Teorema de Laplace

Teorema 1 (Laplace)

A configuração dos n corpos em uma solução homográfica é central em qualquer instante de tempo.

A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, 1941.

2. Recíproca do Teorema de Laplace

Existe uma recíproca para o Teorema de Laplace.

Teorema 2

Considere uma configuração central. É possível escolher velocidades para os corpos a fim de construir um solução homográfica para o problema de n corpos.

C. Vidal, G. Renildo, *Homographic solutions in the n–body problem*, Cubo, **6** (2004), 185–207.

2. Recíproca do Teorema de Laplace

Por exemplo, se os corpos numa configuração central planar são munidos com velocidades iniciais adequadas, então cada corpo descreverá uma órbita elíptica em torno do centro de massa do sistema como no problema de Kepler.

`www.scholarpedia.org/article/File:Centralconfigurations_crookedman.gif`

2. Configurações centrais planares

No restante desta apresentação, estaremos interessados nas

configurações centrais planares,

isto é, $d = 2$.

Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. Solução homográfica e configuração central;
3. **Principal problema em aberto;**
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. Um artigo;
6. Problema em aberto.

3. Principal problema em aberto

O principal problema em aberto para configurações centrais planares é devido a Wintner e Smale:

Problema 1 (Wintner/Smale)

O número de (classes de) configurações centrais planares é finito para quaisquer escolhas de massas positivas $m_1, \ldots, m_n$*?*

S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer, **20** (1998), 7–15.

A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, 1941.

3. Problema de Wintner/Smale

É fácil provar que existem exatamente 5 (classes de) configurações centrais no problema de 3 corpos, sendo 3 devidas a Euler e 2 devidas a Lagrange.

M. Hampton e R. Moeckel deram uma resposta afirmativa para o problema de Wintner/Smale quando $n = 4$ corpos.

M. Hampton, R. Moeckel, *Finiteness of relative equilibria of the four–body problem*, Invent. Math., **163** (2006), 289–312.

3. Problema de Wintner/Smale

Alternativamente, A. Albouy e V. Kaloshin provaram a finitude para $n = 4$ e, para $n = 5$, provaram que o número é finito exceto, talvez, para o caso em que as massas pertencem a uma subvariedade do espaço das massas positivas.

A. Albouy, V. Kaloshin, *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane*, Ann. of Math., **176** (2012), 535–588.

O problema de Wintner/Smale permanece em aberto para $n > 5$.

Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. Solução homográfica e configuração central;
3. Principal problema em aberto;
4. **Equações de Andoyer e alguns resultados;**
5. Um artigo;
6. Problema em aberto.

4. Equações de Andoyer

Para $1 \leq i < j \leq n$, considere as **equações de Andoyer**

$$f_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} m_k \left(R_{ik} - R_{jk}\right) \Delta_{ijk} = 0, \qquad (4)$$

sendo $R_{ij} = 1/r_{ij}^3$ e $\Delta_{ijk} = (r_i - r_j) \wedge (r_i - r_k)$.

Note que Δ_{ijk} é o dobro da área orientada do triângulo formado pelos corpos em r_i, r_j e r_k.

Existem $n(n-1)/2$ equações em (4).

4. Equações de Andoyer

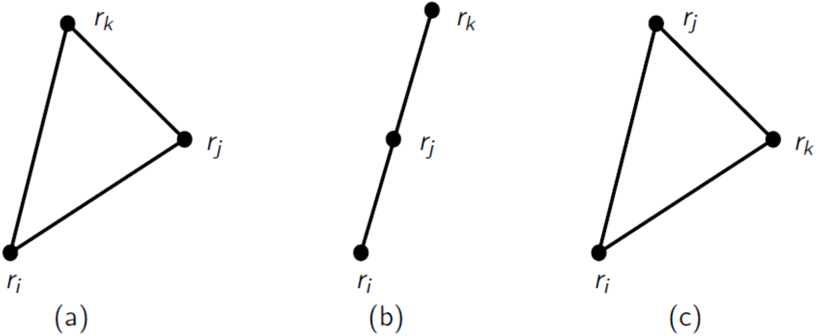


Figura 4: $\Delta_{ijk} > 0$ em (a), $\Delta_{ijk} = 0$ em (b) e $\Delta_{ijk} < 0$ em (c).

4. Equações de Andoyer

O seguinte lema estabelece uma equivalência das equações das configurações centrais e as equações de Andoyer. Uma prova do lema pode ser encontrada em

L.F. Mello, F.E. Chaves, A.C. Fernandes, *Configurações centrais planares do tipo pipa*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 31 (2009), 1302–1307.

4. Equações de Andoyer

Lema 1

Considere n corpos com massas positivas $m_1, m_2, \cdots, m_n$ e vetores posições $r_1, r_2, \cdots, r_n$ em uma configuração planar não colinear. Então,

$$\lambda r_i = \sum_{j \neq i} m_j R_{ij} \, (r_j - r_i),$$

para $1 \leq i \leq n$, é equivalente a

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0,$$

para $1 \leq i < j \leq n$.

4. Algumas aplicações: 1. Lagrange

Considere 3 corpos com massas positivas e não colineares.

As 3 equações de Andoyer podem ser escritas como

$$f_{12} = m_3\,(R_{13} - R_{23})\,\Delta_{123} = 0,$$

$$f_{13} = m_2\,(R_{12} - R_{23})\,\Delta_{132} = 0,$$

$$f_{23} = m_1\,(R_{12} - R_{13})\,\Delta_{123} = 0.$$

Como $m_i > 0$ e $\Delta_{ijk} \neq 0$ (os corpos são não colineares), segue que $R_{12} = R_{13} = R_{23}$. Isto implica que $r_{12} = r_{13} = r_{23}$.

Em outras palavras, os corpos estão nos vértices de um triângulo equilátero **para quaisquer valores das massas**.

4. Algumas aplicações: 1. Lagrange

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3 (Lagrange)

Considere 3 *corpos não colineares com massas positivas. Esses corpos estão em configuração central se, e somente se, eles estão nos vértices de um triângulo equilátero.*

4. Algumas aplicações: 2. Roberts

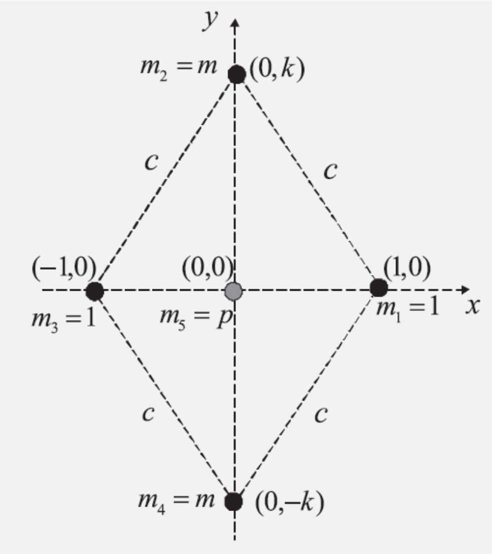
Considere 5 corpos com as seguintes massas e posições

$$m_1 = m_3 = 1, \quad m_2 = m_4 = m, \quad m_5 = p,$$

$$r_1 = (1, 0), \quad r_3 = (-1, 0), \quad r_2 = (0, k), \quad r_4 = (0, -k), \quad r_5 = (0, 0),$$

de acordo com a figura a seguir.

4. Algumas aplicações: 2. Roberts



4. Algumas aplicações: 2. Roberts

As 10 equações de Andoyer são trivialmente satisfeitas ou são equivalentes à equação

$$f_{12} = 0,$$

a qual é escrita como

$$(R_{13} - R_{23})\Delta_{123} + m(R_{14} - R_{24})\Delta_{124} + p(R_{15} - R_{25})\Delta_{125} = 0,$$

ou equivalentemente como

$$m\left(\frac{2}{c^3} - \frac{1}{4k^3}\right) + p\left(1 - \frac{1}{k^3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{c^3}\right) = 0.$$

Se $m = 1$ e $p = -1/4$, a equação acima é satisfeita para todo $k \in \mathbb{R}^+$. Temos o seguinte teorema.

4. Algumas aplicações: 2. Roberts

Teorema 4 (Roberts)

No problema de 5 *corpos com massas* $(1, 1, 1, 1, -1/4)$*, existe uma família a* 1 *parâmetro de configurações centrais onde os* 4 *corpos com massas iguais estão nos vértices de um losango com o outro corpo localizado no centro desse losango.*

Corolário 1

O número de (classes de) configurações centrais no problema de 5 *corpos com massas* $(1, 1, 1, 1, -1/4)$ *não é finito.*

G.E. Roberts, *A continuum of relative equilibria in the five–body problem*, Physica D, **127** (1999), 141–145.

4. Algumas aplicações: 2. Roberts

Observação 1

O Teorema de Roberts não dá uma resposta negativa ao Problema de Wintner/Smale.

Note que no Problema de Wintner/Smale devemos ter massas **positivas**.

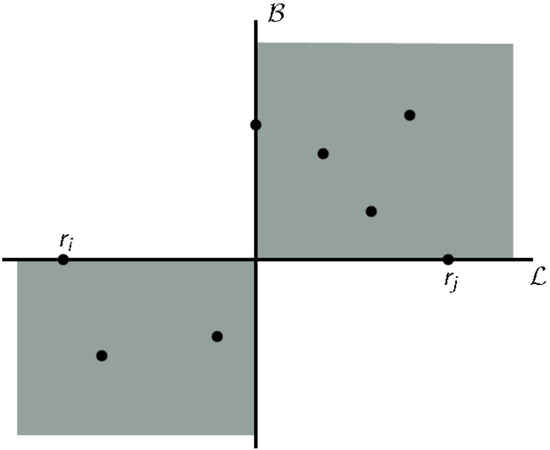
Mas, o Teorema de Roberts mostra que as equações algébricas que definem as configurações centrais admitem uma espécie de **degenerescência**.

Teorema 5 (Teorema da Mediatriz)

Considere $r = (r_1, \ldots, r_n)$ *uma configuração central planar e tome* r_i *e* r_j, $i \neq j$, *quaisquer duas de suas posições. Se um dos dois cones abertos determinados pela reta* $\mathcal{L}$ *definida por* r_i *e* r_j *e sua mediatriz* $\mathcal{B}$ *contém pontos da configuração, então, o outro cone aberto também deverá conter. Veja a figura a seguir.*

R. Moeckel, *On central configurations*, Math. Z. **205** (1990), 499–517.

4. Algumas aplicações: 3. Teorema da Mediatriz



A reta $\mathcal{L}$ definida por r_i e r_j e sua mediatriz $\mathcal{B}$. Esta configuração <u>não</u> pode ser central porque os corpos estão num mesmo cone aberto.

Seguem os seguintes corolários do Teorema da Mediatriz.

Corolário 2

Não existe uma configuração central planar para o problema de n corpos com exatamente $n-1$ corpos colineares, para $n > 3$.

Assim, uma configuração central não colinear com 4 corpos é estritamente convexa ou côncava (um corpo está estritamente no interior do triângulo formado pelos outros 3 corpos).

Corolário 3

Considere uma configuração côncava com 4 corpos cujo triângulo tem um ângulo maior que $\pi/2$. Então, esta configuração não é uma configuração central.

Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. Solução homográfica e configuração central;
3. Principal problema em aberto;
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. **Um artigo;**
6. Problema em aberto.

5. Um artigo

O principal resultado no estudo das configurações centrais convexas no problema planar de 4 corpos é o seguinte.

Teorema 6

Para quaisquer valores positivos de m_1, m_2, m_3 e m_4, existe uma configuração central planar convexa para o problema de 4 corpos com essas massas.

W.D. MacMillan, W. Bartky, *Permanent configurations in the problem of four bodies*, Trans. Amer. Math. Soc., **34** (1932), 838–875.

5. Um artigo

A partir deste ponto, consideraremos configurações centrais planares com 4 corpos satisfazendo:

1. A configuração é convexa;
2. A configuração possui dois pares de corpos com massas iguais;
3. Os corpos estão numerados numa ordem cíclica: $1, 2, 3, 4$.

5. Um artigo

Peréz–Chavela e Santoprete estudaram o caso com massas iguais opostas.

Teorema 7

Considere $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ *uma configuração central planar convexa com massas iguais opostas:* $m_1 = m_3$ *e* $m_2 = m_4$*. Então, os corpos estão nos vértices de um losango.*

E. Peréz–Chavela, M. Santoprete, *Convex four–body central configurations with some equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal., **185** (2007), 481–494.

5. Um artigo

A seguinte conjectura pode ser encontrada em

A. Albouy, Y. Fu, S. Sun, *Symmetry of planar four–body convex central configurations*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **464** (2008), 1355–1365.

Conjectura 1

Existe uma única configuração central planar convexa tendo dois pares de corpos com massas iguais localizados nos vértices adjacentes da configuração e esta configuração é um trapézio isósceles.

5. Um artigo

Usando as equações de Andoyer e vários resultados técnicos, provamos que a Conjectura 1 é verdadeira.

Teorema 8 (Fernandes, Llibre e Mello)

Considere uma configuração convexa com 4 corpos, com vetores posições r_1, r_2, r_3, r_4 e massas m_1, m_2, m_3, m_4. Suponha que $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$, r_1, r_2, r_3 e r_4 estão dispostos no sentido anti–horário nos vértices de um quadrilátero convexo. Então, a única configuração central possível formada por esses corpos é o trapézio isósceles.

5. Um artigo

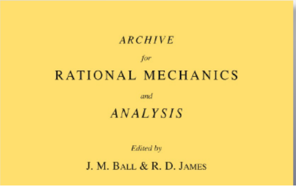
Convex Central Configurations of the 4-Body Problem with Two Pairs of Equal Adjacent Masses

Antonio Carlos Fernandes, Jaume Llibre & Luis Fernando Mello

Archive for Rational Mechanics and Analysis

ISSN 0003-9527
Volume 226
Number 1

Arch Rational Mech Anal (2017)
226:303-320
DOI 10.1007/s00205-017-1134-z



Plano da palestra:

1. Introdução: Problema Newtoniano de n corpos;
2. Solução homográfica e configuração central;
3. Principal problema em aberto;
4. Equações de Andoyer e alguns resultados;
5. Um artigo;
6. **Problema em aberto.**

6. Problema em aberto

Considere $n \geq 3$ corpos em um plano.

Problema 2 (Configurações centrais co–circulares)

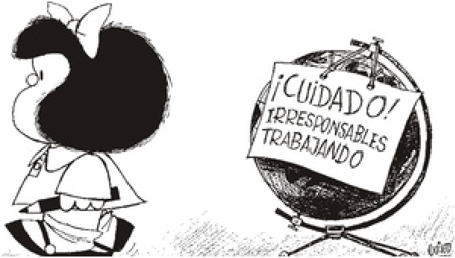
Considere o problema planar de n corpos. Prove que os corpos nos vértices de um n–ágono regular e com massas iguais é a **única** *configuração central onde todos os corpos estão sobre um mesmo círculo e com centro de massa no centro do círculo.*

6. Problema em aberto

M. Hamptom, *Co–circular central configurations in the four–body problem*, in: Dumortier, F., Henk, B. et al. (eds.) Equadiff 2003, Proceedings of the International Conference on Differential Equations, pp. 993–998. World Scientific Publishing Co., Singapore (2005).

J. Llibre, C. Valls, *The co–circular central configurations of the 5–body problem*, J. Dynam. Differential Equations, **27** (2015), 55–67.

Dedicado ao professor Jorge Sotomayor no seu aniversário de 79 anos.



Obrigado pela atenção.