Policiclos em Sistemas de Filippov Planares

Discente: Alessandra Carlos de Souza
Orientador: Otávio Marçal Leandro Gomide

Introdução

A formalização matemática da Teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves ainda é um tópico recente, que se desenvolveu principalmente após o trabalho de Filippov em 1988[10] e dos trabalhos de Teixeira e Sotomayor em 1995 [18]. Na prática, existem diversos fenômenos da natureza que são modelados por sistemas não suaves, como pode ser conferido em [7, 4, 13] e assim o estudo de sistemas dinâmicos descontínuos têm se tornado um tópico de pesquisa muito promissor por estabelecer uma fronteira comum entre a matemática, a física e a engenharia.

Na Teoria de Sistemas Dinâmicos Não-Suaves, a noção de solução de um sistema suave por partes

$$Z(p) = \begin{cases} X(p), f(p) > 0, \\ Y(p), f(p) < 0, \end{cases}$$

com variedade de descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$, é dada através da convenção de Filippov (veja [10] para mais detalhes). Neste caso, o sistema de Filippov é denotado por $Z = (X, Y)$. Neste contexto, além das singularidades dos campos X e Y, temos o surgimento de novos tipos de singularidades pertencentes a variedade Σ, e que são conhecidas como Σ-singularidades. O estudo destas novas singularidades é de extrema importância para o entendimento da dinâmica de um sistema de Filippov. Além disso, algumas Σ-singularidades apresentam variedades invariantes locais, e com isso, tais singularidades admitem conexões globais que não aparecem no contexto suave e que possuem um alto grau de complexidade.

Em 1882, o conceito de ciclo limite foi introduzido por Henri Poincaré e, desde então, a detecção destes objetos tornou-se um dos problemas mais interessantes (e complicados) da Teoria Qualitativa de Sistemas Dinâmicos. Com o passar dos anos, outras conex˜oes globais passaram a ser estudadas e com isso surgiu o conceito de policiclo.

De maneira geral, um policiclo é uma curva simples e fechada que é composta por uma coleç˜ao de singularidades e órbitas regulares do sistema, de maneira que exista um mapa de primeiro retorno associado á curva. Tais objetos têm sido frequentemente estudados na literatura, como por exemplo, no famoso Problema de Dulac.

Desta maneira, quando consideramos o conceito de policiclo para campos suaves e levamos em conta a existência de Σ-singularidades para sistemas de Filippov, podemos estender de maneira natural o conceito de policiclo para este mundo de sistemas não-suaves. Com isso, o estudo de policiclos em sistemas de Filippov passou a ser considerado cada vez mais pela comunidade científica e tornou-se uma atrativa área de pesquisa (veja [8, 9, 15, 16, 17], por exemplo). Mais especificamente policiclos que formam uma conexão do tipo homoclínica com base em uma Σ-singularidade em sistemas planares foram estudadas em [14], [12], [11], [5, 1]. Outros exemplos de policiclos que passam por Σ-singularidades também podem ser encontrados em [3, 8, 9, 15, 16, 17, 2]. Vale ressaltar que policiclos através de Σ-singularidades aparecem naturalmente em aplicações físicas, como pode ser conferido em [3, 2].

Referências Bibliográficas

[1] K. d. S. Andrade. On degenerate cycles in discontinuous vector fields and the Dulac's problem. Thesis (Unicamp), 2016.

[2] K. d. S. Andrade, M. R. Jeffrey, R. M. Martins, and M. A. Teixeira. Homoclinic boundary-saddle bifurcations in nonsmooth vector fields. arXiv preprint arXiv:1701.05857, pages 1–39, 2017.

[3] L. Benadero, E. Ponce, A. El Aroudi, and F. Torres. Limit cycle bifurcations in resonant lc power inverters under zero current switching strategy. Nonlinear Dynamics, 91(2):1145–1161, 2018.

[4] B. Brogliato. Nonsmooth mechanics. Springer, 1999.

[5] C. A. Buzzi, T. Carvalho, and M. A. Teixeira. On three-parameter families of filippov systems- the fold-saddle singularity. International Journal of Bifurcation and Chaos, 22(12):1250291, 2012.

[6] K. da S.Andrade, O. M. L. Gomide, and D. D. Novaes. Qualitative analysis of polycycles in filippov systems. arXiv preprint:1905.11950, 2019.

[7] M. Di Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications, volume 163. Springer Science Business Media, 2008.

[8] M. Di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, and M. E. Homer. Local analysis of c-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena, 11(10):1881–1908, 1999.

[9] M. I. Feigin. On the structure of c-bifurcation boundaries of piecewise-continuous systems. Journal of Applied mathematics and Mechanics, 42(5):885–895, 1978.

[10] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems, volume 18. Springer Science Business Media, 1988.

[11] E. Freire, E. Ponce, and F. Torres. On the critical crossing cycle bifurcation in planar filippov systems. Journal of Differential Equations, 259(12):7086–7107, 2015.

[12] M. Guardia, T. M. Seara, and M. A. Teixeira. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. Journal of Differential Equations, 250(4):1967–2023, 2011.

[13] T. S. J. L. Gouze. A class of piecewise-linear differential equations arising in biological models. Dynam. Syst.,17:229–316, 2003.

[14] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar filippov systems. International Journal of Bifurcation and chaos, 13(08):2157–2188, 2003.

[15] F. Liang and M. Han. The stability of some kinds of generalized homoclinic loops in planar piecewise smooth systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23(02):1350027, 2013.

[16] F. Liang and D. Wang. Limit cycle bifurcations near a piecewise smooth generalized homoclinic loop with a saddle-fold point. International Journal of Bifurcation and Chaos, 27(05):1750071, 2017.

[17] Y. Liu and V. G. Romanovski. Limit cycle bifurcations in a class of piecewise smooth systems with a double homoclinic loop. Applied Mathematics and Computation, 248:235–245, 2014.

[18] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. International Conference on Differential Equations, Lisboa, Equadiff, pages 207–223, 1995.