Condições de Cauchy–Riemann e Analiticidade

Material auxiliar da aula ministrada por Paulo Ricardo da Silva (IBILCE-UNESP-SJRP). Este texto reproduz parte das principais ideias do artigo [4].

1. Introdução e enunciado do Teorema de Looman-Menchoff

Seja $f = u + iv$ definida num domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. f é **derivável** em $z_0 \in D$ se existir

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

f é **holomorfa** em D se existir $f'(z)$ em todo $z \in D$. A Teoria de Cauchy nos diz que toda função holomorfa também é **analítica** e

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall |z - z_0| < R,$$

onde $R \geq 0$ ou $R = \infty$ é o maior valor tal que $D(z_0, R) \subseteq D$.

Toda função analítica num domínio D satisfaz as equações de Cauchy–Riemann em D:

$$(CR) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Para ver isso basta calcular o limite $f'(z_0)$ fazendo $z \to z_0 = x_0 + iy_0$ pelos caminhos

$$z(t) = t + y_0 i \quad \text{e} \quad z(t) = x_0 + ti.$$

A pergunta que fazemos aqui é: quais são as condições mínimas para que a recíproca seja verdadeira? O exemplo a seguir mostra que somente CR não é suficiente para garantir analiticidade.

Exemplo.

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) \quad , & z \neq 0 \\ 0 \quad , & z = 0 \end{cases}.$$

Vale CR em 0 mas $f(z)/z \to \infty$ se consideramos $z \to 0, \theta = \pi/4$.

Teorema 1.1. *(Looman Menchoff) Seja $f = u + iv$ contínua no domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. Se existem u_x, u_y, v_x, v_y em D e se elas satisfazem (CR) em D então f é analítica em D.*

Observação. A versão local não é verdadeira. Considere

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4 \quad , & z \neq 0 \\ 0 \quad , & z = 0 \end{cases}.$$

f é contínua em 0, vale CR em 0 e f não é derivável em $z = 0$.

Teorema 1.2. *(Green, [3].) Seja ∂R uma curva simples, fechada, continua por partes, orientada positivamente, delimitando uma região R. Se P e Q tem derivadas de primeira ordem contínuas numa região aberta D contendo R então*

$$\int_{\partial R} P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dA.$$

Teorema 1.3. *(Morera, [3].) Seja $f = u + iv$ contínua no domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. Se*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

para qualquer retângulo $R \subseteq D$ com lados paralelos aos eixos então f é analítica em D.

Teorema 1.4. *(Goursat) Seja $f = u + iv$ definida no domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. Se u_x, u_y, v_x, v_y existem, são contínuas e satisfazem (CR) em D então f é analítica em D.*

Prova. Considere um retângulo $R \subseteq D$. Temos que

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R} udx - vdy + i\left(\int_{\partial R} vdx + udy\right) = *$$

e aplicando o Teorema de Green obtemos

$$* = \iint_R (-v_x - u_y)dA + i\left(\iint_R (u_x - v_y)dA\right) = 0.$$

Daí, pelo Teorema de Morera, f é analítica. ∎

Antes de apresentarmos a prova do Teorema de Looman-Menchoff faremos um breve relato a respeito dos resultados obtidos nesta direção.

(1913) Montel [7] enunciou que existência das parciais em D, validade das equações de CR em D e limitação da f em D são suficientes para garantir analiticidade de f em D. Montel apresentou o resultado como uma nota no Comptes Rendus. No entanto, não apresentou prova.

(1923) Looman [5] enunciou o que é conhecido hoje como Teorema de Looman-Menchoff. No entanto, sua demonstração apresentava lacunas.

(1935) Menchoff [6] provou o Teorema de Looman-Menchoff. Esta é a prova que reproduziremos aqui.

(1941) Tolstoff [10] provou o Teorema de Montel.

Em 1960 Cohen [1] melhorou o Teorema de Green provando que continuidade de u, v, existência das parciais u_x, u_y, v_x, v_y e $v_x - u_y$ ser integrável são condições suficientes para termos

$$\int_{\partial R} udx + vdy = \iint_R (v_x - u_y)dA.$$

Note que isso torna possivel provar o Teorema de Looman-Menchoff de maneira trivial, assim como o Teorema de Goursat.

Curiosidade. Cohen ganhou a medalha fields ao provar a não equivalência entre a hipótese do continuum e o axioma da escolha.

2. Prova do Teorema de Looman-Menchoff.

Começamos enunciando dois lemas que serão utilizados na demonstração do teorema.

Lemma 2.1. *(See* [8]*.) Sejam R um retângulo fechado e $\phi : R \to R$ satisfazendo que ϕ_x, ϕ_y existem em R. Sejam $N > 0$ e $E \subseteq R$ um subconjunto fechado não vazio satisfazendo que:*

$$|\phi(\xi, y) - \phi(x, y)| \leq N|\xi - x|, \quad |\phi(x, \eta) - \phi(x, y)| \leq N|\eta - y|$$

para todo $(x, y) \in E, (\xi, y) \in R, (x, \eta) \in R$. Se $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ é o menor retângulo em R contendo E então

$$\left| \int_a^b (\phi(x, \beta) - \phi(x, \alpha))dx - \iint_E \frac{\partial \phi}{\partial y} dxdy \right| \leq 5Nm(R - E),$$

$$\left| \int_\alpha^\beta (\phi(b, y) - \phi(a, y))dy - \iint_E \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdy \right| \leq 5Nm(R - E),$$

onde m denota a medida de Lebesgue.

Lemma 2.2. *(See* [8]*.) Seja λ uma medida de Borel complexa no aberto $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Então*

(i) $\dfrac{d\lambda}{dm}$ *existe q.t.p. em K e pertence a $L^1(K)$.*

Se λ for absolutamente continua com relação a medida de Lebesgue m então

(ii) $\lambda(B) = \displaystyle\int_B \frac{d\lambda}{dm}(z)dm(z)$ *para cada conjunto de Borel B, e*

(iii) $\dfrac{d\lambda}{dm}$ *coincides q.t.p. com a derivada de Radon-Nikodym de λ com respeito a m.*

2.1. **Prova do Teorema.** Seja $E \subseteq D$ o conjunto dos pontos onde f não é analítica. Suponhamos que $E \neq \emptyset$. Sabemos que E é fechado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o conjunto $E_n \subset D$

$$E_n = \{z : \frac{|f(z + h) - f(z)|}{|h|} \leq n, \quad \frac{|f(z + ih) - f(z)|}{|h|} \leq n, \quad 0 < |h| \leq \frac{1}{n}.\}$$

A continuidade de f implica que os conjuntos E_n são fechados e existência das derivadas parciais implicam que os conjuntos E_n cobrem D.

Como D é completo e E é fechado segue que E também é completo.

$$E = \bigcup (E_n \cap E), \quad E_n \cap E \text{ fechados.}$$

Como estamos supondo que E é não vazio, pelo Teorema de Baire sabemos que $\exists N$ tal que

$$int(E_n \cap E) \neq \emptyset.$$

Considerando em E a topologia induzida de D temos que existe um retângulo K com fecho contido em D satisfazendo que

$$\emptyset \neq E \cap K \subset E_N.$$

Definimos λ em retângulos fechados $R \subseteq K$ por

$$\lambda(R) = \int_{\partial R} f(z)dz$$

Estendemos λ como uma medida de Borel complexa em K.

Vamos inicialmente provar o seguinte:

(a) λ é absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue m.

(b) $\dfrac{d\lambda}{dm} = 0$, p.q.t. $z \in K$.

Assim

$$\lambda(R) = \int_{\partial R} f(z)dz = \int_R \frac{d\lambda}{dm}(z)dm(z) = 0$$

e isto contradiz o fato de f não ser analítica em K.

2.1.1. *Prova da afirmação (a).* Seja $R \subset K$ um retângulo interseccionando E e com lados $\leq \dfrac{1}{N}$.

Seja J o menor retângulo contendo $R \cap E$.Temos:

$$|\lambda(J)| = |\int_{\partial J}(u+iv)dz| = |\int_{\partial J}(udx - vdy) + i\int_{\partial J}(vdx + udy)| =$$

$$= |\int_a^b (u(x,\alpha) - u(x,\beta))dx - \int_\alpha^\beta (v(a,y) - v(b,y))dy - \iint_E (u_y + v_x)dxdy| + |...|$$
$$\leq 4.5Nm(R-E) = 20Nm(R-E).$$

Se R é um retângulo que não intersecciona E então $\lambda(R) = 0$.

Seja $F \subseteq K$ um subconjunto de medida zero. Dado $\varepsilon > 0$ existe R_n sequencia de retângulos em K cobrindo F e tal que

$$\sum_n m(R_n) < \frac{\varepsilon}{20N}.$$

Sem perda de generalidade assumimos que os lados de R_n são menores ou iguais que $\dfrac{1}{N}$ e que R_n intersecciona E. Assim

$$|\lambda(F)| \leq \sum_n |\lambda(R_n)| \leq 20N\sum_n m(R_n - E) \leq 20\sum_n m(R_n) < \varepsilon.$$

Logo $\lambda(F) = 0$ e (a) está provado.

2.1.2. *Prova da Afirmação (b).* Se $z \in K - E$ então tomando retângulos suficientemente pequenos na definição de derivada de λ e usando Cauchy-Riemann obtemos que

$$\frac{d\lambda}{dm}(z) = 0$$

pois f é analítica em z.

Para $z \in K \cap E$, se $R \subseteq K$ é retângulo contendo z, interseccionando E e de lado menor ou igual a $\dfrac{1}{N}$ temos

$$\frac{|\lambda(R)|}{m(R)} \leq 20N\frac{m(R-E)}{m(R)} = 20N\frac{m(CE \cap R)}{m(R)}$$

onde CE indica o complemento de E em K.

$$m_{CE}(B) = m(CE \cap B) = \int_B \chi_{CE}(z) dxdy$$

m_{CE} é a restrição de m a CE. Assim

$$\frac{dm_{CE}}{dm}(z) = \chi_{CE}(z), \quad \text{p.q.t} \quad z \in k.$$

Seja R_n uma sequência de retângulos convergindo para z. Para quase todo $z \in E$ temos

$$0 = \frac{dm_{CE}}{dm}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{CE}(R_n)}{m(R_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(CE \cap R_n)}{m(R_n)}.$$

Daí

$$\frac{|\lambda(R_n)|}{m(R_n)} \to 0$$

e portanto

$$\frac{d\lambda}{dm}(z) = 0, \quad \text{p.q.t} \quad z \in E.$$

$\blacksquare$

3. Algumas generalizações.

A existência das parciais u_x, u_y, v_x, v_y em q.t.p $z \in D$ junto com validade das equações de Cauchy-Riemann em q.t.p $z \in D$ e com a continuidade da f em D não implica a analiticidade da f. Um contra exemplo foi obtido po Urysohn [11], envolvendo conjunto de Cantor (tem medida zero mas não é enumerável).

Exemplo. Consideremos o quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$. Começamos removendo o conjunto $([0,1] \times (1/3, 2/3)) \cup (1/3, 2/3) \times [0,1]$ e assim obtendo um conjunto K consistindo de quatro quadrados. Continuamos deletando da forma usual de tal forma que na $n-$ésima etapa temos um conjunto K_n consistindo de 4^n quadrados fechados cujos centros denotamos por $z_{n,k}, (k = 1, 2, ..., 4^n)$. Então obtemos que

$$K = \bigcap_n K_n$$

é um conjunto planar totalmente desconexo e com medida zero.

Considere a função

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{4^n} \frac{1}{z - z_{n,k}}.$$

A função assim construída é contínua, analítica fora de K mas não prolonga-se analiticamente até K

O Lema 1 vale se assumirmos que as derivadas parciais existem somente no complementar de um conjunto enumerável e portanto a prova que apresentamos na verdade demonstra o seguinte Teorema:

Teorema 3.1. *(Veja* [9]*) Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, onde D é um domínio. Se*

- *u_x, u_y, v_x, v_y existem em q.t.p $z \in D$ exceto num conjunto enumerável,*
- *vale Cauchy-Riemann em q.t.p. $z \in D$,*
- *f é contínua em D, então*

f é analítica em D.

Teorema 3.2. *(Veja [2].) Seja $f = u + iv$ definida num domínio D e satisfazendo que*

- *u_x, u_y, v_x, v_y existem em quase todos os pontos de D exceto numa união enumerável de conjuntos de 1-medida de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ finita;*
- *u, v satisfazem CR em quase todos os pontos de D;*
- *f é localmente limitada em D;*
- *f é separadamente contínua em D.*

Então f é analítica em D.

$$\mathcal{H}^1(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_1^\infty \operatorname{diam}(E_n) : E = \bigcup_1^\infty E_n, \operatorname{diam}(E_n) < \varepsilon \right\}.$$

4. Questões em aberto

Estavam em aberto até 1978.

4.1. **Questão 1.** Seja $f = u + iv$ definida num domínio D e satisfazendo que

- u_x, u_y, v_x, v_y existem em D;
- u, v satisfazem CR em D;
- f é localmente integrável em D.

f é analítica em D?

4.2. **Questão 2.** Seja $f = u + iv$ definida num domínio D e satisfazendo CR em todos os pontos de D. Qual é a estrutura do conjunto de pontos onde f não é analítica? Sabe-se que E é fechado e totalmente desconexo (isto é os únicos subconjuntos conexos são aqueles formados por um único elemento). Assim f é analítica num conjunto aberto e denso de D.

References

[1] Cohen, P.J. (1959). On Green's Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *10*, 109–112.

[2] Cafiero, F. (1954) Sulle condizioni sufficienti per l'olomorfia di una funzione. *Richerche Mat. 2*, 58–77.

[3] Conway, J.B. (1995) Functions of one complex variable. *Graduate Texts in Mathematics, 159.*

[4] Gray, J.D. and Morris, S.A. (1978) When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?, *The American Mathematical Monthly, 55(4)*, 246–256.

[5] Looman,H. (1923) Uber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, 97–108.

[6] Menchoff, D. (1935) Sur la generalisation des conditions de Cauchy-Riemann, *Fundamenta Math., 25*, 59-97.

[7] Montel, P. (1913) Sur les differentielles totales et les fonctions monogenes, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 156*, 1820-1821.

[8] Rudin, W. (1974) Real and complex analysis. *McGraw–Hill, New York.*

[9] Saks, S. (1964) Theory of the Integral. *Dover, New York.*

[10] Tolstoff, G. (1942) Sur les fonctions bornees verifiant les conditions de Cauchy-Riemann, *Mat. Sbornik, 52* , 79-85

[11] Zalcman, L. (1968) Null sets for a class of analytic functions, *The American Mathematical Monthly 75-5*, 462-470.