

Dinâmica Global para uma Classe de Sistemas de Filippov

trabalho em conjunto com Silva, P. L. Freire, I. L.

UFABC, Santo Andre, Brazil

Seminário do Grupo de Sistemas Dinâmicos do IME/UFG

Goiânia, 01 de junho 2021

Introdução

Vamos considerar nessa palestra o seguinte sistema de equações diferenciais parciais (PDS)

$$\begin{cases} m_t = v^b m_x, \\ n_t = u^b n_x, \end{cases} \quad (1)$$

onde $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, $m = u - u_{xx}$, $n = v - v_{xx}$, e b é um inteiro positivo.

Esse PDS é inspirado em uma família de equações usualmente conhecida por *equações de Holm-Stanley*. Até onde sabemos essa família é a primeira família de PDS a admitir uma classes de soluções conhecidas na literatura como *peakon solutions* e *kinks solutions*.

O caso particular de quando $u = v$ reduz o sistema (1) à equação

$$m_t = u^b m_x. \quad (2)$$

A existência de soluções do tipo "peakon" e "multi-peakon" para (2) com $b = 1$ é relatada em [1], [2] e [3]. Por outro lado, soluções do tipo "kinks" e "multi-kinks" é objeto de estudo em [2], [3] e [1].

Nosso objetivo aqui é estudar a existências dessas soluções para o PDS (1).

As soluções do tipo peakon ou multipeakon têm a forma dada por

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i e^{-|x-q_i|}, \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^M P_i e^{-|x-Q_i|}, \quad (3)$$

para certas funções p_i , q_i , $1 \leq i \leq N$ e Q_j , P_j , $1 \leq j \leq M$.

Por outro lado, as soluções do tipo kinks são dadas por

$$u = \sum_{i=1}^N c_i \operatorname{sign}(x - p_i)(e^{-|x-p_i|} - 1), \quad v = \sum_{i=1}^M \tilde{c}_i \operatorname{sign}(x - q_i)(e^{-|x-q_i|} - 1), \quad (4)$$

onde c_j , $1 \leq i \leq N$, e \tilde{c}_j , $1 \leq j \leq M$ são constantes reais.

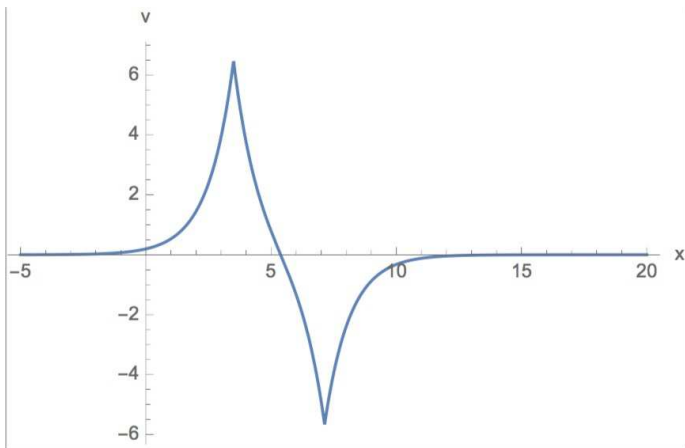


Figure: 1. Formato de uma solução multi-peakon típica

Assumindo que o PDS (1) admite soluções do tipo (3) and (4) obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}
 p'_i &= bp_i \left(\sum_{j=1}^M P_j e^{-|q_i - Q_j|} \right)^{b-1} \left(\sum_{j=1}^M P_j \text{sign}(q_i - Q_j) e^{-|q_i - Q_j|} \right) \\
 q'_i &= - \left(\sum_{j=1}^M P_j e^{-|q_i - Q_j|} \right)^b, \\
 P'_j &= bP_j \left(\sum_{i=1}^N p_i e^{-|q_i - Q_j|} \right)^{b-1} \left(\sum_{i=1}^N p_i \text{sign}(Q_j - q_i) e^{-|q_i - Q_j|} \right), \\
 Q'_j &= - \left(\sum_{i=1}^N p_i e^{-|q_i - Q_j|} \right)^b,
 \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$p'_i = - \left(\sum_{j=1}^M \tilde{c}_j \operatorname{sign}(p_i - q_j) (e^{-|p_i - q_j|} - 1) \right)^b, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$q'_i = - \left(\sum_{j=1}^N c_j \operatorname{sign}(q_i - p_j) (e^{-|q_i - p_j|} - 1) \right)^b, \quad i = 1, \dots, M.$$

onde $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$ e $b \in \mathbb{N}$.

Nosso principal objetivo aqui será estudar a dinâmica global das soluções dos sistemas de equações diferenciais suaves por partes (PWS) (5) e (6) para $N = M = 1$ e para $N = b = 1$, $M = 2$.

Soluções Peakon - Caso 4-dimensional

Nessa seção analisaremos as soluções do tipo peakon para (1). Essas soluções equivalem às soluções (3) com $N = M = 1$.

Escrevendo p, P, q, Q ao invés de p_1, P_1, q_1, Q_1 temos, associado a essas soluções, o seguinte PWS

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = b \operatorname{sign}(q - Q) p P^b e^{-b|q-Q|}, \\ P' = b \operatorname{sign}(Q - q) P p^b e^{-b|q-Q|}, \\ q' = -P^b e^{-b|q-Q|}, \\ Q' = -p^b e^{-b|q-Q|}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Observe que o PWS (6) é um sistema de equações diferenciais suaves por partes com duas zonas com variedade de descontinuidade dada por

$$\Sigma = h^{-1}(0) = \{(p, P, q, Q) \in \mathbb{R}^4; q = Q\} \quad (7)$$

onde $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tem a forma $h(p, P, q, Q) = q - Q$.

Propriedades do PWS (6)

Proposição: O PWS (6) admite três integrais primeiras $H_i : D_i \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$, onde

$$H_1(p, P, q, Q) = p^b + P^b,$$

$$H_2(p, P, q, Q) = \ln |p| + b \operatorname{sign}(q - Q) q,$$

e

$$H_3(p, P, q, Q) = \ln |P| - b \operatorname{sign}(q - Q) Q.$$

Além disso, H_1 é integral primeira suave definida em todo o espaço de fase \mathbb{R}^4 , enquanto H_2 e H_3 são integrais primeiras suaves por partes definidas nos pontos de $\mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$ que satisfazem $p, P \neq 0$, onde $\Sigma = h^{-1}(0)$ é a variedade de descontinuidade de (6).

A

Ideia da Prova: Para obter a integral primeira H_1 dividimos a segunda equação de (6) pela primeira obtendo

$$\frac{dP}{dp} = -\frac{p^{b-1}}{P^{b-1}}.$$

Resolvendo essa equações tem-se H_1 .

Para as outras integrais basta realizar o mesmo raciocínio tomando agora a primeira e terceira equações para obter H_2 e a segunda e quarta equações para obter H_3 .

Para estabelecer o próximo resultado observamos que a primeira e segunda derivadas de Lie de h com respeito a X_{\pm} são dadas por:

$$X_{\pm}h = p^b - P^b$$

e

$$(X_{\pm})^2 h(p, P, q, q) = \langle X_{\pm}(p, P, q, q), \nabla X_{\pm}h(p, P, q, q) \rangle = \pm 2b^2 p^b P^b.$$

Com esse fato temos a seguinte proposição:

Proposição: Seja (p, P, q, Q) um ponto de Σ onde $\Sigma = h^{-1}(0)$ com $h(p, P, q, Q) = q - Q$. Então:

- 1 os pontos $(p, P, q, Q) \in \Sigma$ que satisfazem $p^b - P^b \neq 0$ são pontos de costura. Além disso, se $(p, P, q, Q) \in \Sigma$ é tal que $p^b - P^b > 0$ (resp. $p^b - P^b < 0$) então a órbita de (6) por (p, P, q, Q) cruza Σ de Σ^- para Σ^+ (resp. de Σ^+ para Σ^-).
- 2 os pontos $(p, P, q, Q) \in \Sigma$ com $p^b - P^b = 0$ e $p \neq 0$ são dobras visíveis.

Comportamento assintótico das soluções de (6)

Para estudar o comportamento assintótico das soluções de (6) vamos considerar as soluções restritas aos níveis $H_1^{-1}(c)$ com $c \in \mathbb{R}$.

Note que, restrito a $H_1^{-1}(c)$, a primeira e segunda equações de (6) são topologicamente equivalentes a:

$$\dot{p} = b \operatorname{sign}(q - Q)p(c - p^b), \quad \dot{P} = -b \operatorname{sign}(q - Q)P(c - P^b). \quad (8)$$

As figuras a seguir descrevem os comportamentos qualitativos das soluções dessas equações dentro das regiões abertas Σ^\pm .

b

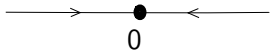
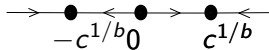
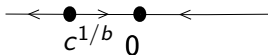
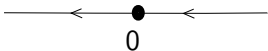
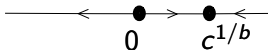
1. ($c \leq 0$ e b par)2. ($c > 0$ e b par)3. ($c < 0$ e b ímpar)4. ($c = 0$ e b ímpar)5. ($c > 0$ e b ímpar)

Figura 2: Comportamento qualitativo de \dot{p} e $-\dot{P}$ em (8) na região Σ^+ . Esse comportamento coincide com o comportamento qualitativo de $-\dot{p}$ e \dot{P} na região Σ^- .

Com as informações precedentes estamos em condições de estabelecer o seguinte resultado:

Proposição: Seja $\varphi(t, x_0)$ solução de (6) com $\varphi(t_0, x_0) = x_0$. Então a interseção de $\varphi(t, x_0)$ com Σ ou é vazia ou é um único ponto.

Ideia da Prova: Vamos considerar aqui o caso em que $x_0 = (p_0, P_0, q_0, Q_0) \in \Sigma$, com $H_1(x_0) = c > 0$ e $p_0, P_0 \in (0, c^{1/b})$. Além disso, suponha que a solução $\varphi(t, x_0)$ entra na região aberta Σ^+ para $t > 0$.

Nesse caso temos $X_{\pm} h(p_0, P_0, q_0, Q_0) = p_0^b - P_0^b \geq 0$ e como $H_1(x_0) = p_0^b + P_0^b = c > 0$ segue que $p_0 \geq \sqrt[b]{c}/2$ e $P_0 \leq \sqrt[b]{c}/2$.

Agora, da Figura 2.5 acima tem-se $p(t) > \sqrt[b]{c}/2$ e $P(t) < \sqrt[b]{c}/2$ para $t > t_0$. Desta forma,

$$\dot{q} - \dot{Q} = p^b - P^b > 0,$$

o que implica $q(t) - Q(t)$ uma função crescente. Em particular, a solução $\varphi(t, x_0)$ permanece em Σ^+ para $t > t_0$.

Dinâmica do sistema (6) em $H_1^{-1}(c)$ com $c \in \mathbb{R}$.

Os dois próximos resultados fornecem o comportamento das soluções de (6) restritas aos níveis de energia $H_1^{-1}(c)$ com $c \in \mathbb{R}$.

Teorema: Seja $x_0 := (p_0, P_0, q_0, Q_0)$ e $\varphi(t, x_0)$ uma solução de (6) satisfazendo $H_1(\varphi(t, x_0)) = c > 0$, para todo $t \in I(t_0, x_0)$.

- a) Se $p_0, P_0 \in (0, c^{1/b})$, então $p(t), P(t) \in (0, c^{1/b})$, para todo $t \in I(t_0, x_0)$. Além disso:
- a.1) se existir $t_1 \in I(t_0, x_0)$ tal que $\varphi(t_1, x_0) = (p_1, P_1, q_1, Q_1)$ com $p_1 = P_1$ e $q_1 < Q_1$ (resp. $q_1 > Q_1$), então a solução $\varphi(t, x_0)$ permanece em Σ^- (resp. Σ^+) para todo $t \in I(t_0, x_0)$.
 - a.2) se existir $t_1 \in I(t_0, x_0)$ tal que $\varphi(t_1, x_0) = (p_1, P_1, q_1, Q_1) := x_1$, com $p_1 = P_1$, $q_1 = Q_1$ e $q_0 > Q_0$ (resp. $q_0 < Q_0$), então a solução é tangente a Σ em x_1 . Nesse caso, $\varphi(t_0, x_0)$ permanece em Σ^+ (resp. Σ^-) para todo $t \in I(t_0, x_0)$, ou entra na região aberta Σ^- (resp. Σ^+) para $t > t_1$.

- a.3) se não existir $t_1 \in I(t_0, x_0)$ satisfazendo $\varphi(t_1, x_0) = (p_1, P_1, q_1, Q_1)$, com $p_1 = P_1$, e $q_0 > Q_0$ (resp. $q_0 < Q_0$), então a solução cruza Σ de Σ^+ para Σ^- (resp. de Σ^- para Σ^+).
- b) se $p \in (c^{1/b}, \infty)$ e $P \in (-\infty, 0)$ então b é necessariamente ímpar e a solução $\varphi(t, x_0)$ cruza Σ de Σ^- para Σ^+ .
- c) se $p \in (-\infty, 0)$ e $P \in (c^{1/b}, \infty)$ então b é necessariamente ímpar e a solução $\varphi(t, x_0)$ cruza Σ de Σ^+ para Σ^- .

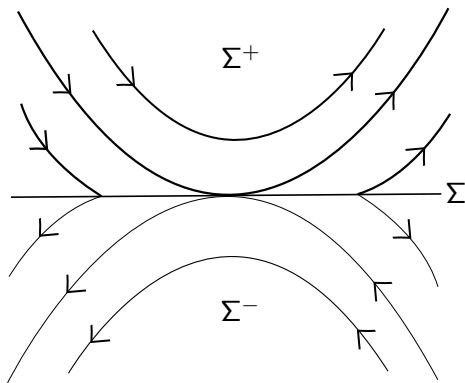


Figure: Comportamento das soluções do PWS (6) próximas a pontos de dobra.

Observação: Um resultado similar ao anterior também se verifica quando o nível de energia é negativo, ou seja, quando $c < 0$. Observe que, nesse caso, devemos ter b ímpar. De fato, $H_1(x) = p^b + P^b$.

Agora, para o caso $c = 0$, o sistema 4-dimensional é topologicamente equivalente a

$$\dot{p} = -b \operatorname{sign}(q - Q)p^b, \quad \dot{P} = b \operatorname{sign}(q - Q)P^b, \quad \dot{q} = -P^b, \quad \dot{Q} = P^b. \quad (9)$$

Se b for um número par tem-se $p = P = 0$ o que fornece como solução a solução constante $\varphi(t, x_0) = (0, 0, q_0, Q_0)$.

Por outro lado, se b for ímpar temos que $p = -P$ e como

$$X_+ h = X_- h = \dot{q} - \dot{Q} = p^b - P^b = 2p^b,$$

segue que a solução cruza Σ de Σ^- para Σ^+ (resp. de Σ^+ para Σ^-) se $p > 0$ (resp. $p < 0$).

Em resumo temos o seguinte resultado:

Teorema: Sejam $x_0 := (p_0, P_0, q_0, Q_0)$ e $\varphi(t, x_0)$ uma solução de (6) satisfazendo $H_1(\varphi(t, x_0)) = 0$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$.

- ① se b é par então $\varphi(t, x_0)$ é a solução constante $\varphi(t, x_0) = (0, 0, q_0, Q_0)$.
- ② se b é ímpar e $p > 0$, então $\varphi(t, x_0)$ cruza Σ de Σ^- para Σ^+ .
- ③ se b é ímpar e $p < 0$, então $\varphi(t, x_0)$ cruza Σ de Σ^+ para Σ^- .

Soluções Peakon - Caso 6-dimensional

Nessa seção analisaremos as soluções do tipo multi-peakon para (1) do tipo (3) com $N = 1$ e $M = 2$. Além disso, vamos restringir nossa análise ao caso $b = 1$. Nesse caso, o sistema em questão resulta ser o PWS dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = p (P_1 \operatorname{sign}(q - Q_1)e^{-|q-Q_1|} + P_2 \operatorname{sign}(q - Q_2)e^{-|q-Q_2|}), \\ \dot{P}_1 = p P_1 \operatorname{sign}(q - Q_1)e^{-|q-Q_1|}, \\ \dot{P}_2 = p P_2 \operatorname{sign}(q - Q_2)e^{-|q-Q_2|}, \\ \dot{q} = -P_1 e^{-|q-Q_1|} - P_2 e^{-|q-Q_2|}, \\ \dot{Q}_1 = -p e^{-|q-Q_1|}, \\ \dot{Q}_2 = -p e^{-|q-Q_2|}, \end{array} \right. \quad (10)$$

onde $x = (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^6$ e $\text{sign}(\cdot)$ denota, como antes, a função sinal.

Tomando as funções reais $h_i : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$h_i(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = q - Q_i \quad \text{para } i = 1, 2$$

podemos observar que o PWS (10) tem dois conjuntos de descontinuidade

$$\Sigma_i = h_i^{-1}(0) = \{(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^6; q = Q_i\},$$

ou seja, podemos escrever (10) na forma

$$\dot{x} = \begin{cases} X_{++}(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2), & (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+, \\ X_{+-}(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2), & (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-, \\ X_{-+}(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2), & (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+, \\ X_{--}(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2), & (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-, \end{cases}$$

onde $\Sigma_i^\pm = \{(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^6; \pm h_i(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) > 0\}$ e

$$X_{\alpha\beta}(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} p (\alpha P_1 e^{-|q-Q_1|} + \beta P_2 e^{-|q-Q_2|}) \\ -\alpha p P_1 e^{-|q-Q_1|} \\ -\beta p P_2 e^{-|q-Q_2|} \\ -P_1 e^{-|q-Q_1|} - P_2 e^{-|q-Q_2|} \\ -p e^{-|q-Q_1|} \\ -p e^{-|q-Q_2|} \end{pmatrix}$$

para $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Propriedades do PWS (10)

Relativo ao sistema (10) podemos afirmar que:

1. ele admite três integrais primeiras $H_i : D_i \subset \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ onde

$$H_i(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = \ln |P_i| - \text{sign}(q - Q_i)Q_i$$

para $i = 1, 2$ e

$$H_3(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = p + P_1 + P_2.$$

Além disso, H_3 é integral primeira suave definida em todo o espaço de fase \mathbb{R}^6 e H_i com $i = 1, 2$ são integrais primeiras suaves por partes definidas nos pontos de $\mathbb{R}^6 \setminus \Sigma_i$ satisfazendo $p, P_i \neq 0$, onde $\Sigma_i = h_i^{-1}(0)$ são as variedades de descontinuidade do PWS (10).

2. ele admite uma superfície algébrica invariante dada por $f^{-1}(0)$ onde $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = Q_1 - Q_2$.

Observação: Note que, restrito à superfície invariante $f^{-1}(0)$, (i.e., $Q_1 = Q_2 = Q$) e considerando $P = P_1 + P_2$ como uma nova variável, o PWS (10) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{p} &= \text{sign}(q - Q)pPe^{-|q-Q|}, \\ \dot{P} &= -\text{sign}(q - Q)Ppe^{-|q-Q|}, \\ \dot{q} &= -Pe^{-|q-Q|}, \\ \dot{Q} &= -pe^{-|q-Q|}. \end{cases}$$

Esse PWS resulta ser o sistema estudado na seção anterior com $b = 1$.

Proposição: Relativo ao PWS (10) temos:

- a) As derivadas de Lie de h_i , para $i = 1, 2$ com respeito a $X_{\alpha\beta}$ para $\alpha, \beta \in \{+, -\}$ são dadas por

$$X_{\alpha\beta} h_i(p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) = p e^{-|q-Q_i|} - \left(P_1 e^{-|q-Q_1|} + P_2 e^{-|q-Q_2|} \right).$$

- 1 Os pontos de Σ_i para $i = 1, 2$ satisfazendo

$$p, P_i \neq 0 \quad e \quad \text{sign}(P_1) = \text{sign}(P_2) = -\text{sign}(p), \quad (11)$$

são pontos de costura. Além disso, se $x = (p, P_1, P_2, q, Q_1, Q_2) \in \Sigma_i$ satisfaz a condição (11) com $p > 0$ (resp $p < 0$) então a solução $\varphi(t, x)$ cruza Σ_i de Σ_i^- para Σ_i^+ (resp. de Σ_i^+ para Σ_i^-).

Antes de estabelecer os resultados dessa seção observe que, como consequência da proposição anterior, segue que se $x_0 \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$ (resp., $x_0 \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$) onde $x_0 = (p_0, P_{1,0}, P_{2,0}, q_0, Q_{1,0}, Q_{2,0})$ satisfaz $P_{1,0}, P_{2,0} < 0$ e $p_0 > 0$ então:

se a solução do PWS (10) por x_0 deixa a região aberta $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$ (resp., $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$) para algum tempo $t > t_0$, então a solução entra na região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ no instante \bar{t} e permanece nela para todo $t > \bar{t}$.

Em particular, sob essas condições, a região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ é positivamente invariante.

Dinâmica do sistema (10) para condições iniciais $x_0 \in \mathbb{R}^6$ satisfazendo as condições (11)

Teorema: Seja $x_0 \in \mathbb{R}^6$ satisfazendo as condições (11) com $p_0 > 0$ (resp. $p_0 < 0$). Se $\varphi(t, x_0)$ é uma solução do PWS (10) com intervalo maximal de definição $I(t_0, x_0)$ com $\varphi(t_0, x_0) = x_0$ então existem $\tilde{t}, \bar{t} \in I(t_0, x_0)$ com $\tilde{t} < \bar{t}$ tais que $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ (resp. $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$) para todo $t < \tilde{t}$ e $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ (resp. $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$) para todo $t > \bar{t}$.

Ideia da Prova: Daremos uma ideia da prova para o caso em que $p_0 > 0$.

Tomando $x_0 \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ temos $x_0 \in H_1^{-1}(\hat{c}_1) \cap H_2^{-1}(\hat{c}_2) \cap H_3^{-1}(c)$ e $\ln|P_i(t)| + Q_i(t) = \hat{c}_i$. Desta forma $P_i(t)e^{Q_i(t)} = c_i < 0$ para $i = 1, 2$. Além disso, $q_0 - Q_{1,0}, q_0 - Q_{2,0} < 0$.

Por observação anterior podemos considerar $q_0 - Q_{1,0} \neq q_0 - Q_{2,0}$. De fato, o caso $q_0 - Q_{1,0} = q_0 - Q_{2,0}$ se restringe ao caso 4-dimensional estudado anteriormente.

Suponha, então, $q_0 - Q_{1,0} < q_0 - Q_{2,0} < 0$ (ou seja, x_0 está mais próximo de Σ_2 do que de Σ_1). Sob essas condições, a solução $\varphi(t, x_0)$ não pode entrar na região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$. (tal fato não é possível pois, caso contrário, em algum instante $t_1 \in I(t_0, x_0)$ teríamos $Q_1(t_1) = Q_2(t_1)$ o que não pode ocorrer.

Considerando o PWS (10) restrito a $H_1^{-1}(\hat{c}_1) \cap H_2^{-1}(\hat{c}_2) \cap H_3^{-1}(c)$ e por uma reparametrização do tempo $\tau = \frac{c_1 c_2}{e^q} t$ obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais polinomial topologicamente equivalente a (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -p(c_2 P_1^2 + c_1 P_2^2), \\ \dot{P}_1 = c_2 p P_1^2, \\ \dot{P}_2 = c_1 p P_2^2, \\ \dot{q} = -(c_2 P_1^2 + c_1 P_2^2), \\ \dot{Q}_1 = -c_2 p P_1, \\ \dot{Q}_2 = -c_1 p P_2. \end{array} \right.$$

Um cálculo imediato fornece $\dot{q} - \dot{Q}_2 = c_1 p P_2 - c_2 P_1^2 - c_1 P_2^2 > 0$.

Como $p(t) > 0$ é uma função crescente e $P_i(t) < 0$ com $i = 1, 2$ são decrescentes temos que existe $\tilde{t} \in I(t_0, x_0)$ tal que $\varphi(\tilde{t}, x_0) \in \Sigma_2$ e, portanto, a solução $\varphi(t, x_0)$ entra na região aberta $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$.

Agora, na região $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$, a solução está nos conjuntos de nível $H_1^{-1}(\hat{d}_1) \cap H_2^{-1}(\hat{d}_2) \cap H_3^{-1}(c)$, ou seja, $P_1(t)e^{-Q_1(t)} = d_1$, $P_2(t)e^{Q_2(t)} = d_2$ e $p(t) + P_1(t) + P_2(t) = c$, onde $d_i < 0$ para $i = 1, 2$.

De modo similar, considerando no PWS (10) a mudança de coordenadas $u = e^q$ e reparametrização do tempo $\tau = d_1 d_2 u(t) t$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = p(-d_2 P_1^2 u^2 - d_1 P_2^2), \\ \dot{P}_1 = d_2 p P_1^2 u^2, \\ \dot{P}_2 = -d_1 p P_2^2, \\ \dot{u} = -u(d_2 P_1^2 u^2 + d_1 P_2^2), \\ \dot{Q}_1 = -d_2 p P_1 u^2, \\ \dot{Q}_2 = -d_1 p P_2. \end{array} \right.$$

Aqui $\dot{q} - \dot{Q}_1 = \frac{\dot{u}}{u} - \dot{Q}_2 = d_2 p P_1 u^2 - d_2 P_1^2 u^2 - d_1 P_2^2 > 0$ que, por argumento similar ao anterior, garante a existência de $\bar{t} > \tilde{t}$ satisfazendo $\varphi(\bar{t}, x_0) \in \Sigma_1^+$.

Portanto, a solução $\varphi(t, x_0)$ entra na região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ e daí $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ para todo $t > \bar{t}$ o que conclui a prova do Teorema.

Em resumo: se $p_0 > 0$ e a condição inicial é tal que $x_0 = (p_0, P_{1,0}, P_{2,0}, q_0, Q_{1,0}, Q_{2,0}) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ e ele está mais próximo de Σ_2 então a órbita por x_0 cumpre o seguinte itinerário:

$$\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \longrightarrow \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+ \longrightarrow \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$$

Por outro lado, se estiver mais próximo de Σ_1 então a órbita por x_0 cumpre o itinerário:

$$\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \longrightarrow \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^- \longrightarrow \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$$

Soluções Kinks - Caso 3-dimensional

Aqui abordaremos as soluções do tipo kinks para o problema (1). Como vimos, essas soluções estão associadas ao PWS (6). Nosso interesse estará restrito ao caso em que $N = 2$ e $M = b = 1$. Desta forma, o problema pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{p} &= c_1 \text{sign}(p - q_1)(1 - e^{-|p - q_1|}) + c_2 \text{sign}(p - q_2)(1 - e^{-|p - q_2|}), \\ \dot{q}_1 &= -d \text{sign}(p - q_1)(1 - e^{-|p - q_1|}), \\ \dot{q}_2 &= -d \text{sign}(p - q_2)(1 - e^{-|p - q_2|}). \end{cases} \quad (12)$$

Aqui, considerando

$$g_i(p, q_1, q_2) := p - q_i, \quad \Sigma_i := g_i^{-1}(0), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

é possível observar que (12) é um PWS com variedades de descontinuidade Σ_i , $i = 1, 2$.

Com as mesmas notações fixadas anteriormente, os campos de vetores se escrevem na forma

$$X_{\alpha\beta}(p, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \alpha c_1(1 - e^{-|p-q_1|}) + \beta c_2(1 - e^{-|p-q_2|}) \\ -\alpha d(1 - e^{-|p-q_1|}) \\ -\beta d(1 - e^{-|p-q_2|}) \end{pmatrix},$$

onde $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

No que se refere aos campos acima descritos temos os seguintes resultados:

Proposição: Sejam $a_i := c_i/d$, $i = 1, 2$, e $G(p, q_1, q_2) := p + a_1 q_1 + a_2 q_2$. Então $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ é uma integral primeira global para o PSW (12).

Proposição: Sejam g_1, g_2, Σ_1 e Σ_2 como dadas em (13). As derivadas de Lie de g_1 e g_2 com respeito aos campos vetoriais $X_{\alpha\beta}$ são

$$X_{\alpha\beta}g_1(p, q_1, q_2) = \alpha(c_1 + d)(1 - e^{-\alpha(p-q_1)}) + \beta c_2(1 - e^{-\beta(p-q_2)}),$$

$$X_{\alpha\beta}g_2(p, q_1, p) = \alpha c_1(1 - e^{-\alpha(p-q_1)}) + \beta(c_2 + d)(1 - e^{-\beta(p-q_2)}),$$

$$\alpha, \beta = \pm 1.$$

Em particular, se $i \neq j$, então todo ponto em $\Sigma_i \setminus \Sigma_j$ é ponto de costura. Além disso, os pontos em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ são pontos de equilíbrio dos campos vetoriais $X_{\alpha\beta}$.

Dinâmica Global do sistema (12)

Teorema: Sejam $x_0 = (p_0, q_{10}, q_{20})$ e $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ integral primeira de (12) e $\varphi(t, x_0)$ uma solução do PWS (12) com intervalo maximal de definição $I(t_0, x_0)$ e $\varphi(t_0, x_0) = x_0$.

- se $x_0 \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ então $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$ com $t > t_0$. Nesse caso, a dinâmica para $t > t_0$ dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ com $h \in \mathbb{R}$ é descrita na região (I) da Figura 4 com $q_i = \ln(\omega_i)$, $i = 1, 2$.
- se $x_0 \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ então $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$ com $t > t_0$. Nesse caso, a dinâmica para $t > t_0$ dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ com $h \in \mathbb{R}$ é descrita na região (IV) da Figura 4 com $q_i = \ln(\omega_i)$, $i = 1, 2$.

- c) se $x_0 \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$ (resp. $x_0 \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$) então existem três possíveis comportamentos para a solução $\varphi(t, x_0)$ com $t > t_0$:
- c.1) existe $t_+ > t_0$ tal que $\varphi(t_+, x_0) \in \Sigma_2$ (resp. $\varphi(t_+, x_0) \in \Sigma_1$). Nesse caso, $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ para todo $t > t_+$. Além disso, a dinâmica para $t > t_+$ dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ com $h \in \mathbb{R}$ é descrita na região (I) da Figura 4 com $q_i = \ln(\omega_i)$, $i = 1, 2$.
 - c.2) existe $t_- > t_0$ tal que $\varphi(t_-, x_0) \in \Sigma_1$ (resp. $\varphi(t_-, x_0) \in \Sigma_2$). Nesse caso, $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ para todo $t > t_-$. Além disso, a dinâmica para $t > t_-$ dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ com $h \in \mathbb{R}$ é descrita na região (IV) da Figura 4 com $q_i = \ln(\omega_i)$, $i = 1, 2$.
 - c.3) $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$ (resp. $\varphi(t, x_0) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^+$) para todo $t > t_0$. Nesse caso, a dinâmica para $t > t_0$ dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ com $h \in \mathbb{R}$ é descrita na região (II) (resp. região (III)) da Figura 4 com $q_i = \ln(\omega_i)$, $i = 1, 2$.

Além disso, todas as soluções dentro do conjunto de nível $G^{-1}(h)$ têm como α -limite o ponto de equilíbrio

$$x^* = \left(\frac{h}{a_1 + a_2 + 1}, \frac{h}{a_1 + a_2 + 1}, \frac{h}{a_1 + a_2 + 1} \right) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

Ideia da Prova: Se $x_0 = (p_0, q_{10}, q_{20}) \in \mathbb{R}^3$ é tal que existe $\bar{t} \in I(t_0, x_0)$ com $\varphi(\bar{t}, x_0) \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ então $p(\bar{t}) - q_i(\bar{t}) < 0$, $i = 1, 2$. Nesse caso, segue da equação (12) que

$$\begin{aligned}\dot{p} - \dot{q}_1 &= -(c_1 + d) (1 - e^{-|p-q_1|}) - c_2 (1 - e^{-|p-q_2|}) < 0, \\ \dot{p} - \dot{q}_2 &= -c_1 (1 - e^{-|p-q_1|}) - (c_2 + d) (1 - e^{-|p-q_2|}) < 0.\end{aligned}$$

Desta forma, $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ é positivamente invariante e as solução $\varphi(t_0, x_0)$ permanece em $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$ para todo $t \geq \bar{t}$.

Argumento similar garante que $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ é também positivamente invariante, o que conclui as afirmações (a) e (b).

Em $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$ temos $p - q_2 < 0 < p - q_1$. Além disso,

$$\begin{aligned}\dot{p} - \dot{q}_1 &= (c_1 + d)(1 - e^{-|p - q_1|}) - c_2(1 - e^{-|p - q_2|}), \\ \dot{p} - \dot{q}_2 &= c_1(1 - e^{-|p - q_1|}) - (c_2 + d)(1 - e^{-|p - q_2|}).\end{aligned}$$

Se a solução encontra Σ_2 (resp. Σ_1) então temos que

$\dot{p} - \dot{q}_2 = c_1(1 - e^{-|p - q_1|}) > 0$ (resp. $\dot{p} - \dot{q}_1 = -c_2(1 - e^{-|p - q_2|}) < 0$) e a solução entra na região aberta positivamente invariante $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ (resp. $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$).

Agora observe que o PWS (12) em $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$ se escreve como

$$\begin{aligned}\dot{p} &= c_1(1 - e^{-p+q_1}) - c_2(1 - e^{p-q_2}), \\ \dot{q}_1 &= -d(1 - e^{-p+q_1}), \quad \dot{q}_2 = d(1 - e^{p-q_2}).\end{aligned}\tag{14}$$

onde $\dot{q}_1 < 0$ e $\dot{q}_2 > 0$.

Restrito ao conjunto de nível $G^{-1}(h)$ temos $p = h - a_1q_1 - a_2q_2$.
Substituindo em (14) tem-se

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -d(1 - e^{-h}e^{(a_1+1)q_1}e^{a_2q_2}) < 0, \\ \dot{q}_2 &= d(1 - e^he^{-a_1q_1}e^{-(a_2+1)q_2}) > 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Note que $\dot{q}_1 = 0$ (resp. $\dot{q}_2 = 0$) é equivalente a $p - q_1 = 0$ (resp. $p - q_2 = 0$), o que significa que a solução encontra Σ_1 (resp. Σ_2).

Considere agora a mudança de coordenadas dada por

$$\omega_1 = e^{q_1}, \quad \omega_2 = e^{q_2}. \quad (16)$$

Escrevendo o PWS (15) nas coordenadas (ω_1, ω_2) , e considerando a reparametrização do tempo $t = e^h \omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2+1} \tau$ obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -d\omega_1^{a_1+1} \omega_2^{a_2+1} \left(e^h - \omega_1^{a_1+1} \omega_2^{a_2} \right), \\ \dot{\omega}_2 &= -de^h \omega_2 \left(e^h - \omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2+1} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

onde, para os pontos em $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$, temos

$$e^h - \omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2+1} < 0 < e^h - \omega_1^{a_1+1} \omega_2^{a_2}.$$

Das desigualdades $\dot{\omega}_1 < 0$ e $\dot{\omega}_2 > 0$ tem-se

$$\omega_2 < \frac{e^{\frac{h}{a_2}}}{\omega_1^{\frac{a_1+1}{a_2}}} = f_2(\omega_1) \quad \text{and} \quad \omega_2 > \frac{e^{\frac{h}{a_2+1}}}{\omega_1^{\frac{a_1}{a_2+1}}} = f_1(\omega_1).$$

Os pontos que satisfazem ambas as desigualdades são os pontos dentro da região aberta (II) da figura abaixo.

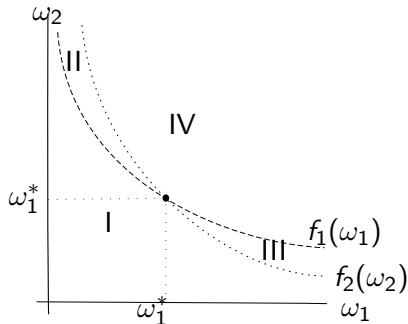


Figure: 3. Posições relativas entre $\omega_2 = f_1(\omega_1)$ e $\omega_2 = f_2(\omega_1)$.

Para entender a dinâmica do sistema de equações diferenciais (17) para $\omega_i > 0$, $i = 1, 2$ observe inicialmente que ele tem um contínuo de pontos de equilíbrio dados por $(\omega_1, 0)$ e um equilíbrio isolado em $\omega^* = (\omega_1^*, \omega_1^*)$, onde $\omega_1^* = e^{\frac{h}{a_1+a_2+1}}$.

Além disso, restrito à reta invariante $\omega_2 = 0$ tem-se

$$\dot{\omega}_2 = -de^{2h}\omega_2 < 0.$$

Agora, as curvas $\omega_2 = f_1(\omega_1)$ e $\omega_2 = f_2(\omega_1)$ se interceptam no ponto de equilíbrio ω^* (veja Figura 3 acima).

A linearização do sistema (17) em ω^* tem matriz Jacobiana

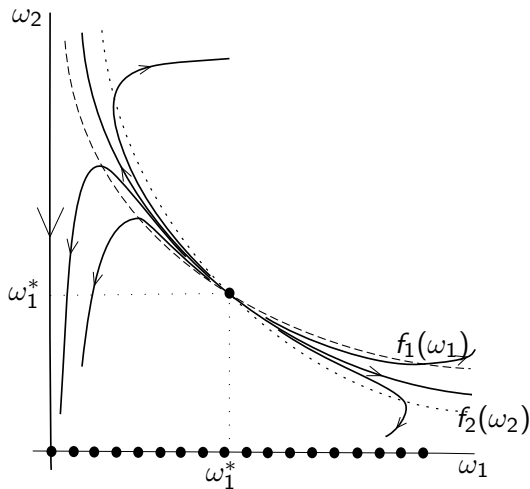
$$A = e^{2h} \begin{pmatrix} (a_1 + 1)d & a_2d \\ a_1d & (a_2 + 1)d \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são $\lambda_1 = de^{2h} > 0$ e $\lambda_2 = de^{2h}(1 + a_1 + a_2) > 0$ e, portanto, ω^* é um nó instável.




Na região (II) temos $\dot{\omega}_1 < 0$ and $\dot{\omega}_2 > 0$. Assim, para as soluções nessa região, temos três possibilidades:

- a solução encontra o gráfico da função real f_1 (onde $\dot{\omega}_2 = 0$.) Nesse caso, a solução entra na região aberta positivamente invariante (I). Para nosso PWS (12) isso implica que a solução entra na região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$;
- a solução encontra o gráfico da função real f_2 (onde $\dot{\omega}_1 = 0$.) Nesse caso, a solução entra na região aberta positivamente invariante (IV). Para nosso PWS (12) isso implica que a solução entra na região aberta $\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^-$;
- a solução permanece entre os gráficos de f_1 e f_2 . Os pontos com esse comportamento são os pontos da curva separatriz do nó instável $u^* = (\omega_1^*, \omega_1^*)$ dentro da região (II). Esses pontos correspondem aos pontos no PWS (12) cuja solução permanece na região aberta $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$.

Na região (III) temos $\dot{\omega}_1 > 0$ and $\dot{\omega}_2 < 0$. Pode-se verificar que a dinâmica nessa região é similar à dinâmica na região aberta (II). A figure abaixo descreve o comportamento global das soluções de (17).



References

-  A. DEGASPERIS, D. D. HOLM AND A. N. W. HONE. *A new integrable equation with peakon solutions*. Theor. Math. Phys., vol. 133, 1463?1474, (2002), DOI:10.1016/S0031-8914(53)80099- 6.
-  D. D. HOLM AND M. F. STALEY. *Wave structure and nonlinear balances in a family of evolutionary PDEs*. Siam. J. Appl. Dyn. Sys., vol. 2, 323?380, (2003).
-  D. HOLM AND M. STALEY. *Nonlinear balance and exchange of stability in dynamics of solitons, peakons, ramp/cliffs and leftons in 1+1 nonlinear evolutionary PDE*. Phys. Lett. A, vol. 308, 437?444, (2003).
- B. Xia, Z. Qiao, *The n-kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b- family equation in the case of b=0*, Phys. Lett. A, vol. 377, 2340?2342, (2013), DOI:10.1016/j.physleta.2013.07.017.

References



B. XIA, Z. QIAO. *The n -kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b - family equation in the case of $b=0$.* Phys. Lett. A, vol. 377, 2340-2342, (2013), DOI:10.1016/j.physleta.2013.07.017.