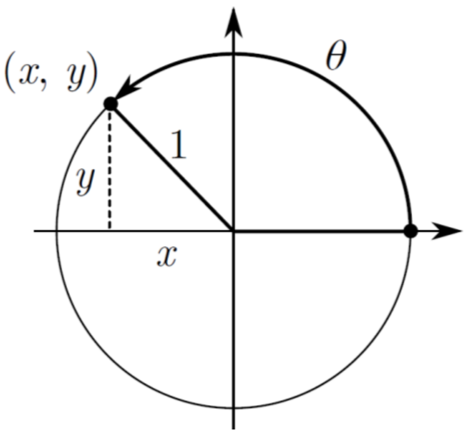
Ciclo de Oficinas:

Revisão de Cálculo 1

O cálculo é a matéria mais importante para o estudante de engenharia. A base de toda a matemática é aprendida nesta matéria. Em Cálculo 1 é estudado as funções, suas tendências e variações, ou seja, é aprendido funções, limites, derivadas e integrais.

Funções Trigonométricas



$$\operatorname{sen}\theta = y \qquad \csc\theta = \frac{1}{y}$$

$$\cos\theta = x \qquad \sec\theta = \frac{1}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Identidades Recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

Identidades Pitagóricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \sec^2\theta - \tan^2\theta &= 1 \\ \csc^2\theta - \cot^2\theta &= 1 \end{aligned}$$

Limites

Propriedades algébricas

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, onde L e M são números reais. Seja c uma constante real.

1. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = cL$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = L \cdot M$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, se $M \neq 0$.
5. $\lim_{x\to a}[f(x)]^c = L^c$.
   Obs.: se $c < 0$, é preciso que $L > 0$.
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[c]{f(x)} = \sqrt[c]{L}$.
   Obs.: se c é par, é preciso que $L \geq 0$.

Limites Fundamentais

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
5. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} = 2,71828\ldots$
6. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
7. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
8. Se $c > 0$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^c} = 0$
9. Se $c > 0$ e x^c real para x negativo, então $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^c} = 0$
10. $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
11. $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ e
    $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
12. Se c par, $\lim_{x\to \pm\infty} x^c = +\infty$
13. Se c ímpar, $\lim_{x\to \pm\infty} x^c = \pm\infty$

Técnicas de avaliação de limites

- **Fatoração e Cancelamento de fatores**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

- **Multiplicação e Divisão pelo conjugado**

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}\,\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{(x^2-81)(3+\sqrt{x})}=$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})}=\frac{-1}{(9+9)(3+\sqrt{9})}=-\frac{1}{108}$$

Derivadas

Definição

Seja f uma função real. A sua derivada é denotada f' e é definida por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Se $y=f(x)$, então todas estas notações para a derivada são equivalentes:

$$f'(x)=y'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$$

Se $y=f(x)$, então todas estas notações para a derivada avaliada em $x=a$ são equivalentes:

$$f'(a)=[y']_{x=a}=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$$

Interpretações para derivadas

Se $y=f(x)$ então:

1. $m=f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico $y=f(x)$ no ponto $\big(a,f(a)\big)$, e a equação da reta tangente para $x=a$ é dada por $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.
2. $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $f(x)$ quando $x=a$.
3. Se $f(x)$ é a posição de um objeto no instante x, então $f'(a)$ é a velocidade do objeto no instante $x=a$.

Propriedades algébricas

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis (a derivada existe).

1. $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$, c constante.
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$
5. Regra da cadeia:
   $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\,g'(x)$

Integrais

Definição

Integral definida. Dada f definida em $[a,b]$, dividida $[a,b]$ em n intervalos menores de comprimento $\Delta x = (b\text{-}a)/n$ e escolha um x_j em cada intervalo. Então:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$

Antiderivada. Uma antiderivada de f é uma função de F tal que $F'(x) = f(x)$.

Integral indefinida. $\int f(x)dx = F(x) + c$, onde F é uma antiderivada de f.

Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1. Seja f contínua em $[a,b]$ e considere $g(x) = \int_a^b f(t)dt$. Então, g é contínua em $[a,b]$ e g é uma antiderivada de f.

Parte 2. Seja f contínua em $[a,b]$ e F uma derivada de f. Então

$$\int_a^b f(t)dx = F(b) - F(a).$$

Notação: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriedades

$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

Seja c uma constante:

$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$

Técnicas de Integração

- **Fórmula de Integração por substituição**

Para calcular $\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx$, faça $u = g(x)$ e substitua:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

- **Fórmula de Integração por Partes**

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \left[u\,v\right]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

TABELA: Derivadas, Integrais e Identidades Trigonométricas

• *Derivadas*

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = n\, u^{n-1} u'$.
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u (\ln a)\; u',\; (a > 0,\; a \neq 1)$.
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$.
7. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$.
8. $y = u^v \Rightarrow y' = v\; u^{v-1}\; u' + u^v (\ln u)\; v'$.
9. $y = \text{sen } u \Rightarrow y' = u' \cos\; u$.
10. $y = \cos\; u \Rightarrow y' = -u' \text{sen } u$.
11. $y = \text{tg } u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$.
12. $y = \text{cotg } u \Rightarrow y' = -u' \text{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec\; u \Rightarrow y' = u' \sec\; u \text{ tg } u$.
14. $y = \text{cosec } u \Rightarrow y' = -u' \text{cosec } u \text{ cotg } u$.
15. $y = arc \text{ sen } u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\; \cos\; u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc \text{ tg } u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\; \cot g\; u \Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$.
19. $y = arc\; \sec\; u,\; |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.
20. $y = arc \text{ cosec } u,\; |u| \geqslant 1$
    $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

• *Identidades Trigonométricas*

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$.
4. $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos\; 2x}{2}$.
5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos\; 2x}{2}$.
6. $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x\; \cos\; x$.
7. $2 \text{ sen } x\; \cos\; y = \text{sen}\,(x - y) + sen\,(x + y)$.
8. $2 \text{ sen } x \text{ sen } y = \cos\,(x - y) - \cos\,(x + y)$.
9. $2\; \cos\; x\; \cos\; y = \cos\,(x - y) + \cos\,(x + y)$.
10. $1 \pm \text{sen } x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

• *Integrais*

1. $\int du = u + c$.
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\; n \neq -1$.
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$.
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln\; a} + c,\; a > 0,\; a \neq 1$.
5. $\int e^u du = e^u + c$.
6. $\int \text{sen } u\; du = -\cos\; u + c$.
7. $\int \cos\; u\; du = \text{sen } u + c$.
8. $\int \text{tg } u\; du = \ln|\sec\; u| + c$.
9. $\int \text{cotg } u\; du = \ln|\text{sen } u| + c$.
10. $\int \sec\; u\; du = \ln|\sec\; u + \text{tg } u| + c$.
11. $\int \text{cosec } u\; du = \ln|\text{cosec } u - \text{cotg } u| + c$.
12. $\int \sec\; u \text{ tg } u\; du = \sec\; u + c$.
13. $\int \text{cosec } u \text{ cotg } u\; du = -\text{cosec } u + c$.
14. $\int \sec^2 u\; du = \text{tg } u + c$.
15. $\int \text{cosec}^2 u\; du = -\text{cotg } u + c$.
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc \text{ tg} \frac{u}{a} + c$.
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c,\; u^2 > a^2$.
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$.
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$.
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc \text{ sen} \frac{u}{a} + c,\; u^2 < a^2$.
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\; \sec\left|\frac{u}{a}\right| + c$.

• *Fórmulas de Recorrência*

1. $\int sen^n au\; du = -\frac{sen^{n-1} au\; \cos\; au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int sen^{n-2} au\; du$.

2. $\int \cos^n au\; du = \frac{sen\; au\; \cos^{n-1} au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int \cos^{n-2} au\; du$.

3. $\int tg^n au\; du = \frac{tg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int tg^{n-2} au\; du$.

4. $\int cotg^n au\; du = -\frac{cotg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int cotg^{n-2} au\; du$.

5. $\int \sec^n au\; du = \frac{\sec^{n-2} au\; tg\; au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int \sec^{n-2} au\; du$.

6. $\int cosec^n au\; du = -\frac{cosec^{n-2} au\; cotg\; au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int cosec^{n-2} au\; du$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Passei Direto. **O que estuda o Cálculo 1**. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/44869688/o-que-estuda-o-calculo-1>. Acesso em: 09 mar. 2021.

Paul Dawkins. **Resumão de** Cálculo. 2005. Disponível em: <http://tutorial.math.lamar.edu>. Versão brasileira por Rodrigo Hausen.

TABELA: Derivadas, Integrais e Identidades Trigonométricas. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponivel em: <https://www.if.ufrgs.br/tex/fisica-4/tab-integrais.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2021.