

**Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física**

**Engenharia, Transporte
e Propriedades Estatísticas
Dinâmicas de Estados Coerentes
Comprimidos em Eletrodinâmica
Quântica de Cavidades Supercon-
dutoras**

José de Souza Sales

**Instituto de Física
Goiânia – 2012**

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

**Engenharia, Teletransporte
e Propriedades Estatísticas
Dinâmicas de Estados Coerentes
Comprimidos em Eletrodinâmica
Quântica de Cavidades Supercon-
dutoras**

José de Souza Sales

Trabalho apresentado ao Instituto de
Física da Universidade Federal de
Goiás para obtenção do **Título para
o Doutorado em Física.**

Orientador: Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida

Instituto de Física
Goiânia – 2012

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

S163e Sales, José de Souza.
Engenharia, teletransporte e propriedades estatísticas dinâmicas de estados coerentes comprimidos em eletrodinâmica quântica de cavidades supercondutoras / José de Souza Sales. - 2012.

95 f. : figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Noton Gomes de Almeida.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Física, 2012.
Bibliografia.

1. Eletrodinâmica quântica.

CDU: 537.8

Dedico a minha mãe
NILZA e ao meu pai FRANCISCO

Agradecimentos

- Agradeço a minha esposa, M. Terezinha, pela paciência, entusiasmo e incentivo tanto na tristeza, como nos momentos de alegria e até mesmo de euforia. E, aos meus queridos filhos que sempre suportaram e entenderam mais do que eu o meu mau humor, meu cansaço e as minhas dificuldades de estar aos seus lados nos momentos que eles mais queriam.

- O meu especial agradecimento à Prof.^a Célia M. A. Dantas que foi diretamente responsável pelo início desta vitória.

- A todos os colegas da pós-graduação, não conseguindo lembrar todos os fatos, então somente pelo fato de vê-los estudar me incentiva muito.

- Aos amigos Anderson, Agnaldo não na hora ajuda material, mas principalmente pela boa companhia.

- Ao irmão Guilherme Colherinhas, pela ajuda direta na confecção desse trabalho, bem como na parte computacional, pois sem tal ajuda talvez este trabalho não fosse concluído.

- Aos Professores da pós-graduação Marcos Antônio de Castro, José Nicodemos e Basílio Baseia pelos esclarecimentos dos conteúdos em Física, e a todos os professores do Instituto de Física.

- Aos Professores Ardiley, Wesley Cardoso e Luciano F. Silva que se comportaram mais como amigos do que professores nas discussões em Óptica Quântica.

- A todos os colegas da Graduação que alguns anos atrás começamos juntos os primeiros passos nesta maravilhosa área.

- Aos Funcionários do Instituto de Física pela colaboração e amizade.

- Aos professores, funcionários da UEG bem como ao incentivo da direção para a realização desse trabalho.

- Aos meus compadres Claudinho e Edna (Tonton), Jaci e Rosimar, por sempre me acolher na hora de alegria, divertimento, descanso e tristeza, e não poderia esquecer do "Seu" Clemente, tio João, tia Tereza e Dona Joaquina.

- Aos meus grandes amigos Rogério e Karine; Lurdinha, Guimar, Weverton e

Ludmila; Rafael (Uel) e Meire, Glaydson e Elizângela, Cláudio e Gorethe, Daniel e Belinha, Hebin e Nara, pois sem vocês não teria sentido esta vitória e nem minha vida e se esqueci alguém não me perdoe, pois com certeza foram muito importantes.

- Ao Professor Norton Gomes de Almeida, pela paciência na orientação desse trabalho me fez contrair uma dívida impagável com seus conhecimentos e principalmente pelo seu belo caráter afirmado pelas pessoas que já conhecia desde os tempos do nosso convívio no ensino médio passando pela graduação. E que às vezes esquecia os próprios problemas pessoais para escutar os desabafos relativos aos meus problemas... Sendo mais do que um orientador de Física... Então, só posso dizer agora e sempre, muito emocionado,... OBRIGADO... Pois não tenho outra palavra.

- A minha querida família, em especial a minha mãe NILZA, meu pai FRANCISCO e aos meus irmãos Carlindo, Tereza, Nivalda, Arnaldo, Edson, Nelson, Ana e Cristina, e aos meus também irmãos Nivaldo, Lurdinha, Euripedes, Fernanda, Marcelo, Edma, Jacira, Juraci (Negão), Edberg, Luíz, a todos os meus sobrinhos Karinna, Aniela, Vanessa, Amanda, Luis Paulo, Gabriela, Jaqueline, Fernando Augusto, Alessandra, Cauã, Grenda, Fábio, Carlos, Denise, Matheus, Lorayne, Peterson e aos meus tios que sempre de alguma forma acreditaram e torceram por mim.

Conteúdo

Abstract	vi
1 Introdução	1
1.1 Teoria semi-clássica da interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético dentro de uma cavidade	4
1.2 Teoria quântica da interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético dentro de uma cavidade	6
1.2.1 Interação ressonante	6
1.2.2 Interação não ressonante	8
1.2.3 Hamiltoniano de compressão	10
1.3 Contextualização e objetivos desta tese	14
2 Preparação do campo na superposição de estados coerentes comprimidos	17
2.1 Engenharia da preparação do SECC	17
2.1.1 Função característica $C(\eta, t)$ do campo preparado na SECC	22
2.1.2 Função P de Glauber-Sudarshan do campo preparado na SECC	26
2.1.3 Função de Wigner $W(\gamma, t)$ do campo preparado na SECC	27
2.1.4 Fidelidade do campo preparado na SECC	32
3 Teletransporte do campo na superposição de estados coerentes comprimidos	37
4 Propriedades estatísticas dinâmicas	44
4.1 Propriedades estatísticas	44
4.2 Evolução temporal das propriedades estatísticas	46
4.2.1 Número médio de fótons	46
4.2.2 Parâmetro Q de Mandel	49
4.2.3 Compressão das quadraturas	51
4.3 Inversão atômica	54
4.3.1 Inversão atômica para o campo preparado no estado coerente comprimido e preparado na superposição de estados coerentes comprimidos sem perda	55
4.3.2 Inversão atômica para o campo na superposição de estados coerentes comprimidos com perdas	58
4.4 Entropia Linear	64
4.4.1 Entropia linear da superposição de estados	64
4.4.2 Estado coerente ortogonal e coerente comprimido Ortogonal	65
4.4.3 Estado QBIT	67
5 Conclusão	73
Apêndice A	77

Apêndice B	77
Apêndice C	80
Bibliografia	81

Lista de Figuras

1.1	Configuração dos campos de radiação necessária para obter o operador de compressão de um modo da cavidade.	11
2.1	Esquema de geração do campo na SECC em uma cavidade de alto fator de qualidade.	18
2.2	Função de Wigner sem dissipação e à temperatura nula para o campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$	28
2.3	Função de Wigner com dissipação e à temperatura nula para o campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$ e $\Gamma t = 0.4$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$ e $\Gamma t = 0.4$; c) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$ e $\Gamma t = 1.0$; d) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$ e $\Gamma t = 1.0$	30
2.4	Função de Wigner com temperatura não nula e dissipação para campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$, $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 1.0$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$, $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 1.0$	31
2.5	Função de Wigner para o campo na SECC $\alpha = 1.5$, $\xi = 1.0$, $\Gamma t = 0.4$ a) $\bar{n}_\omega = 0.0$; b) $\bar{n}_\omega = 0.1$ e c) $\bar{n}_\omega = 0.4$	31
2.6	Função de Wigner do campo na SECC com $\alpha = 2.0$, $\xi = 0.5$ e $\bar{n}_\omega = 0.1$ para: a) $\Gamma t = 0.2$; b) $\Gamma t = 0.5$ e c) $\Gamma t = 1.5$	32
2.7	Fidelidade para o campo na SECC à temperatura nula com a) $\xi = 0.5$; b) $\xi = 1.0$	35
2.8	Fidelidade para campo na SECC com temperatura e $\xi = 0.5$, $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1.0$ (linha tracejada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada)	35
3.1	Esquema de teletransporte do campo na SECC de uma cavidade para outra cavidade de alto fator de qualidade.	38
3.2	Fidelidade do campo preparado na SECC e teletransportado com a) $\xi = 1.0$ e $\alpha = 0.5$ (tracejada), $\alpha = 1.0$ (pontilhada), $\alpha = 1.5$ (sólida); b) $\alpha = 1.0$ e $\xi = 0.5$ (tracejada), $\xi = 1.0$ (pontilhada), $\xi = 1.5$ (sólida)	43
4.1	Evolução do número médio de fótons com $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\alpha = 1.0$ (sólida), $\alpha = 1.5$ (tracejada), $\alpha = 2.0$ (asterístico) com $\bar{n}_\omega = 1.0$ e $\alpha = 1.0$ (pontilhada), $\alpha = 1.5$ (tracejada e pontilhada), $\alpha = 2.0$ (quadrada); a) para o campo na SEC $\xi = 0.0$ e b) para o campo na SECC $\xi = 1.0$	48
4.2	Parâmetro Q de Mandel em função de α e ξ para o campo na SECC.	50
4.3	Fixando $\alpha = 2.5$ e $\xi = 0.5$ para o campo na SECC sendo $\bar{n}_\omega = 0.0$ (sólida), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (pontilhada) e $\bar{n}_\omega = 1.0$ (tracejada) para parâmetro Q(t) de Mandel.	50
4.4	Parâmetro de compressão nas quadraturas $q_j(t)$ em função de α e ξ do campo na SECC para: a) quadratura X_1 e b) quadratura X_2	52
4.5	Compressão nas quadraturas do campo na SECC com $\alpha = 1.0$ e $\xi = 1.0$ para X_1 com $\bar{n}_\omega = 0.0$ (sólida), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (tracejada), $\bar{n}_\omega = 1.0$ (pontilhada) e para X_2 com $\bar{n}_\omega = 1.0$ (quadrado), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (asterístico), $\bar{n}_\omega = 0.0$ (cruz).	53
4.6	Evolução da relação de incerteza em função α e ξ do campo na SECC: a) $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\Gamma t = 0.0$; b) $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\Gamma t = 0.4$; c) $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 0.4$	54

4.7	Inversão atômica com temperatura nula e sem dissipação para o campo no: a) EC $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.0$; b) ECC $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.5$; c) ECC $\alpha = 5.0$, $\xi = 1.0$	56
4.8	Inversão atômica sem perda para o campo na:: a) SEC $\alpha = 5.0$ e $\xi = 0.0$; b) SECC $\alpha = 5.0$ e $\xi=0.5$; a) SEC $\alpha = 5.0$ e $\xi = 1.0$	58
4.9	Inversão atômica para o campo na SECC com $\Gamma/g = 10^{-4}$, $\bar{n}_\omega = 0.2$; a) $\alpha = 1.5$, $\xi = 0.5$; b) $\alpha = 1.5$, $\xi = 1.0$; c) $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.5$; e d) $\alpha = 5.0$, $\xi = 1.0$	63
4.10	Entropia linear com temperatura nula e não nula para SEC, ECO, SECC e ECCO. Os parâmetros α e ξ foram escolhidos para que todos os estados tenham o mesmo número médio de fótons igual a 0.8	70
4.11	Entropia linear com temperatura nula para ECCO e SEC com $\alpha = 1$, com diferente amplitudes de probabilidades para SEC. Para ECCO, $B/A = 7.3891$ (sólida) e para SEC, $b/a = 7.4$ (pontilhada e tracejada), $b/a = 10$ (tracejada) e $b/a = 20$ (pontilhada).	71
4.12	Entropia linear, considerando o reservatório com um número médio de ocupação $\bar{n}_\omega = 1.0$ para o campo na SEC igualmente pesado (pontilhada) e para o campo na SEC com $b/a = 7.4$ (tracejada) e ECCO com $B/A = 7.389$ (sólida). Todos com $\alpha = 1.0$	72
4.13	Entropia linear com temperatura nula e não nula o campo na SECC, SEC, e QBIT. Os parâmetros α e ξ foram escolhidos para que todos os estados tenham o mesmo número médio de fótons igual a 0.5 e igualmente pesados.	72

Resumo

No contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades, propomos a geração de uma superposição de estados coerentes comprimidos para o campo em uma cavidade e um esquema de teletransporte deste estado para outra cavidade. Este esquema de teletransporte por nós proposto inclui dissipação a temperatura zero e finita. Obtemos analiticamente as expressões para a função P de Glauber-Sudarshan, função de Wigner, fidelidade, bem como a evolução temporal de algumas de suas propriedades estatísticas, tais como: número médio de fótons, compressão nas quadraturas, estatística de fótons, inversão atômica e entropia linear, mostrando que este estado apresenta vários efeitos quânticos para alguns parâmetros como, por exemplo, o número médio de fótons do campo, o parâmetro de compressão, a constante de acoplamento entre átomo e campo e a constante de dissipação.

Abstract

In the context of cavity quantum electrodynamics, we propose the generation of the squeezed coherent state superposition for the field into a cavity and a scheme to teleport this state to another cavity. Our scheme for teleportation includes dissipation at zero and finite temperature. We obtain analytically the expressions for the Glauber-Sudarshan P function, Wigner function, Fidelity, and the temporal evolution of some of its statistical properties, such as average number photons, compression in quadratures, statistics of photons, linear entropy and atomic inversion, showing that this state has several quantum effects for some parameters, as for example, the average number of photons of the field, compression parameter, the coupling constant between atom and field and damping constant.

Capítulo 1

Introdução

A maioria dos experimentos de interação entre a matéria e a luz envolve uma grande quantidade de átomos e fótons, porém situações mais simples envolvem o estudo e o controle da interação de um único átomo com vários fótons. O modelo mais simples em óptica quântica lida com a interação de um único modo do campo de radiação com um único átomo de dois níveis [1], chamados de átomos de Rydberg, no qual elétrons de valência de um alcalino, promovidos a um nível com um grande número quântico principal N , são fortemente acoplados com o campo dentro de uma cavidade no regime de microondas. Em particular os átomos de Rydberg têm uma vida útil extremamente longa (30 ms para $N = 50$) [2] e podem ser detectados de forma seletiva e sensível por ionização por meio de um campo.

Em poucas palavras, o átomo de Rydberg é uma denominação genérica para indicar qualquer átomo que possua um elétron num estado quântico elevado. Sabemos que elétrons somente podem orbitar em átomos se possuírem determinados valores de energia. Por exemplo, para um átomo de hidrogênio somente teremos órbitas eletrônicas estáveis para valores da energia dados por $E_n = -(13,6 \text{ eV})/n^2$. Desde que o elétron excitado esteja longe do núcleo, sua dinâmica será a mesma de um átomo de hidrogênio. Portanto, a física dos átomos de Rydberg é a mesma física do átomo de hidrogênio. Quando um elétron de um átomo é excitado numa órbita com número quântico principal elevado e conseqüentemente longe do núcleo, dimensões do átomo serão grandes, cujo diâmetro se aproxima de centésimos de milímetros, o que é 100.000 vezes maior que o diâmetro do mesmo átomo no estado fundamental. Um átomo excitado de poucos elétrons geralmente retorna ao estado fundamental em menos de um décimo de milionésimo de segundo, os átomos de Rydberg ficam excitados aproximadamente de milésimos de segundo

até um segundo, e por serem imensos se rompem ou são facilmente distorcidos e destruídos até mesmo por campos elétricos fracos.

Como os átomos são grandes e têm um tempo de vida longo, podemos aproximá-los por um dipolo elétrico. Isto faz com que o acoplamento entre os estados do átomo e o campo de radiação seja extremamente forte. Além disso, transições entre níveis dos átomos de Rydberg caem no intervalo de ondas milimétricas. Dentre vários efeitos interessantes com o uso de átomos de Rydberg interagindo com um campo eletromagnético que tornam-se mais facilmente evidentes, destacamos os seguintes: i) modificação da taxa de emissão espontânea de um único átomo colocado numa cavidade ressonante, ii) troca oscilatória de energia entre um átomo e um modo de uma cavidade e iii) surgimento de propriedades quânticas, como o colapso e o ressurgimento na inversão da população de um nível do átomo para outro nível.

Átomos de Rydberg dentro de cavidades são bastante apropriados para se observar esses efeitos. Das propriedades mencionadas para os átomos em questão, é importante o fato de que, baixando as transições para a faixa de ondas milimétricas, é possível construir cavidades para oscilações em pequenos modos que sejam suficientemente grandes (alguns cm) para assegurar tempos de interações longos.

Eles são, então, ferramentas ideais para manipulações de campos dentro da cavidade. A radiação do átomo pode ser modificada variando as condições de contorno do campo eletromagnético dentro da cavidade e com isto as experiências em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) evoluíram para acoplamentos átomo-campo mais elevados, tempos de armazenamento de fótons relativamente grande e a maioria das experiências está agora no chamado regime de acoplamento forte, em que o tempo de interação de um único átomo com um fóton armazenado em uma cavidade de alta qualidade é muito elevado.

Situações de manipulações para atingir o regime de acoplamento forte são implementadas em experiências em EQC usando cavidades no regime de microondas ou cavidades ópticas como caixas de fótons.

No domínio de microondas, há uma relação do acoplamento forte entre o átomo e o campo e tempo de vida de interação longa do átomo (de 1 ms à 1 s) com o campo com ondas de frequência em torno de algumas dezenas de GHz , com o comprimento próximo ao tamanho da

cavidade, dissipação muito baixa, e o ritmo do processo de entrelaçamento de átomo-campo lento. No domínio óptico, tais cavidades, atualmente, possuem um alto fator de qualidade e são utilizadas para o confinamento de campos estacionários. O fator de qualidade das cavidades (Q) corresponde a uma propriedade da montagem da cavidade e é definido de modo que o tempo de vida do campo aprisionado na cavidade seja o maior possível. Este tempo de vida é obtido através da razão entre o fator de qualidade da cavidade e a frequência do campo presente. Assim, exemplificamos ressaltando as cavidades produzidas de Nióbio (Nb), que em certas temperaturas próximas do zero absoluto ($0.8 K$) [3] possuem um fator de qualidade da ordem de 10^8 , para campos aprisionados com frequência de ordem $10^{10} Hz$, portanto um tempo de vida (t_v) da ordem de $10^{-2} s$ [2]. A primeira observação de emissão espontânea atômica em uma cavidade de ressonância foi publicada por Goy e colaboradores [4]. Este experimento foi realizado com átomos de Rydberg de sódio excitado no estado $23 s$ em uma cavidade de Nióbio supercondutor ressonante à $340 GHz$ (A cavidade com dois espelhos esféricos de Nióbio com diâmetro de $20 mm$ e raio de curvatura de $26 mm$) que dá um fator de qualidade para a cavidade em torno de $Q = 10^6$. Em 1996, M. Brune e colaboradores [2] publicaram experiências, à temperatura de $0.8 K$, com átomos de Rubídio (número quântico principal 51) em teste direto da quantização do campo estudando a oscilação de Rabi em cavidade de Nióbio supercondutor (diâmetro $5cm$, raio de curvatura $4 cm$, separação dos espelhos de $2.75 cm$), sendo o fator de qualidade $Q = 7 \times 10^7$ que dá o tempo de vida dos fótons próximo à $220 \mu s$.

Atualmente experimentos com temperaturas próximas à $0.5K$, que corresponde a um número médio de fótons térmico dentro da cavidade $n_\omega = 0.1$, permitem o estudo do acoplamento forte entre átomos e um único modo de uma cavidade ressonante que possui um fator de qualidade da ordem de $Q = 4 \times 10^{10}$ [5]. Estes campos aprisionados possuem frequência de ordem $21.456 GHz$ e $21.50658 GHz$, o que leva a um tempo de vida do fótons (t_v) $\tau_v = Q/\omega_c \sim 0.3 s$, que é um tempo muito maior que o tempo de interação entre o campo e o átomo ($\sim 30 - 130 \mu s$) [2], e como consequência deste forte acoplamento entre átomo e campo o sistema fornece importantes ingredientes necessários para estudos de processamento da informação quântica.

Átomos em baixos níveis atômicos que interagem com cavidades resultam em interações muito mais rápida, tanto quanto a dissipação. Entretanto, fótons ópticos podem ser acoplados

com eficiência dentro ou fora da cavidade e então pode-se fazer o armazenamento de informação quântica e a transmissão de informação quântica.

Na tentativa de explicar e observar uma grande quantidade de fenômenos ópticos quânticos, como por exemplo, emissão espontânea e revelar a existência das oscilações de Rabi na inversão atômica para átomos que interagem com campos com número de fótons definidos ou não, uma teoria quântica faz-se necessária, mesmo no sistema mais simples que consiste na interação de um único modo do campo com um único átomo de dois níveis (átomos de Rydberg), embora exista uma boa explicação para vários fenômenos, como, por exemplo, a preparação do estado de um átomo de dois níveis numa superposição de seus dois estados, feito por uma teoria semi-clássica. A seguir, faremos uma breve revisão das teorias semi-clássica e quântica de interação átomo-campo e de uma engenharia de construção do hamiltoniano não linear associado à compressão de um modo da cavidade.

1.1 Teoria semi-clássica da interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético dentro de uma cavidade

A teoria semi-clássica para a interação átomo-campo dentro de uma cavidade, trata o átomo como um sistema quântico e o campo classicamente. Obteremos a expressão do hamiltoniano que descreve este tipo de interação, com algumas aproximações.

Vamos considerar um único modo do campo eletromagnético de frequência w interagindo com átomo quântico de dois níveis. Representaremos $|g\rangle$ como o estado do átomo com o nível de energia mais baixo (fundamental) e $|e\rangle$ o estado do átomo com o nível de energia mais alto (excitado).

Quando o comprimento de onda do campo é muito maior que o tamanho do átomo, como dissemos anteriormente, podemos considerar o átomo sendo visto pelo campo com um dipolo, sendo esta aproximação chamada de aproximação de dipolo.

Com esta aproximação, o átomo interage com o dipolo via momento de dipolo elétrico, sendo o hamiltoniano de interação átomo-campo dado por [6]:

$$H_{AC} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(t), \quad (1.1)$$

sendo $\vec{d} = q\vec{r}$ o momento dipolo, q a carga elétrica, r a distância entre as cargas e $\vec{E}(t)$ o campo elétrico oscilante dentro da cavidade.

Utilizando a relação de completeza dos estados atômicos, que para um átomo de dois níveis é dada por:

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = |g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e| = \hat{I}, \quad (1.2)$$

o hamiltoniano de interação da Eq. (1.1) átomo-campo pode ser escrito como

$$H_{AC} = -q (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \vec{r} (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \cdot \vec{E}(t) \quad (1.3)$$

onde $q \langle i| \vec{r} |j\rangle$ ($i, j = \{g, e\}$) são os elementos da matriz de transição do momento de dipolo, que representam médias relacionadas com a transição de um nível de um átomo para outro, logo temos $q \langle i| \vec{r} |i\rangle = 0$.

Definindo os elementos de transição $\vec{\wp}_{ij} = q \langle i| \vec{r} |j\rangle$ e substituindo na Eq.(1.3), obtemos

$$H_{AC} = - \left(\vec{\wp}_{ge} |g\rangle \langle e| + \vec{\wp}_{eg} |e\rangle \langle g| \right) \cdot \vec{E}(t). \quad (1.4)$$

Escrevendo os elementos de transição como $\vec{\wp}_{ge} = \left| \vec{\wp}_{ge} \right| e^{iw_0t}$ e $\vec{\wp}_{eg} = \left| \vec{\wp}_{eg} \right| e^{-iw_0t} = \vec{\wp}_{ge}^*$, pois $\left| \vec{\wp}_{ge} \right| = \left| \vec{\wp}_{eg} \right|$, sendo w_0 a frequência de transição atômica e t o tempo de transição e considerando o campo linearmente polarizado ao longo de um eixo fixo, podemos escrevê-lo como

$$E(t) = \varepsilon \cos(wt - \phi), \quad (1.5)$$

sendo ε a amplitude, w a frequência e ϕ a fase do campo elétrico. Escrevendo $\cos(wt - \phi)$ na forma exponencial e definindo $\Omega_R = \left| \vec{\wp}_{ge} \right| \varepsilon / \hbar$ como a frequência de Rabi, teremos

$$\begin{aligned} H_{AC} &= -\hbar\Omega_R \left[(e^{-iw_0t} |e\rangle \langle g| + e^{iw_0t} |g\rangle \langle e|) \frac{e^{-i(wt-\phi)} + e^{i(wt-\phi)}}{2} \right] \\ &= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left\{ [e^{-i(w_0-w)t+\phi} + e^{-i(w_0+w)t-\phi}] |e\rangle \langle g| + (e^{i(w_0+w)t-\phi} + e^{i(w_0-w)t+\phi}) |g\rangle \langle e| \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Os termos $e^{\pm i(w_0+w)t \mp \phi}$ que aparecem na Eq. (1.6) são chamados de termos contra-girantes, eles representam oscilações muito rápidas com média temporal tendendo a zero [6]. Desprezar estes termos consiste na chamada aproximação de onda girante. Se considerarmos, também a

aproximação ressonante, ou seja, a frequência do campo igual a frequência de transição atômica, $w \simeq w_0$, teremos a Eq. (1.6) dada por:

$$H_{AC} = -\hbar \frac{\Omega_R}{2} [(e^{-i\phi} |e\rangle \langle g| + e^{i\phi} |g\rangle \langle e|)], \quad (1.7)$$

o que descreve o hamiltoniano de interação átomo-campo dentro de uma cavidade, chamada de zona de Ramsey, descrito pela teoria semi-clássica. Como afirmamos anteriormente, sabe-se que uma interação descrita pela Eq. (1.7) é capaz de preparar o estado do átomo de dois níveis numa superposição de seus dois estados possíveis.

1.2 Teoria quântica da interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético dentro de uma cavidade

O hamiltoniano que descreve o sistema átomo-campo quântico dentro de uma cavidade pode ser dado por:

$$H = H_A + H_C + H_{int}, \quad (1.8)$$

onde $H_A = \hbar w_0 \sigma_z / 2$ é o hamiltoniano do átomo, $H_C = \hbar w a^\dagger a$ é o hamiltoniano do campo e a^\dagger (a) o operador de criação (aniquilação) de fótons e H_{int} o hamiltoniano de interação entre o átomo de dois níveis com um único modo do campo dentro da cavidade, onde o átomo e o campo são tratados quanticamente. A interação do átomo-campo pode ser ressonante, quando a frequência ω do campo for muito próxima a frequência de transição atômica w_0 , ou não ressonante quando $\omega \neq w_0$. Vamos considerá-las portanto, separadamente.

1.2.1 Interação ressonante

Consideremos a interação de um único átomo de dois níveis com um único modo do campo, onde a frequência de transição atômica é igual à frequência do campo, ou seja, $w_0 \simeq w$. O operador do campo elétrico para um único modo é dado por [6]:

$$\vec{E} = \epsilon \hat{\varepsilon} (a + a^\dagger), \quad (1.9)$$

sendo $\varepsilon = \left(\frac{\hbar \omega}{2 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}$ o campo efetivo por fóton, e $\hat{\varepsilon}$ o vetor unitário de polarização do campo.

Usando a Eq. (1.4) e a Eq. (1.9) a Eq. (1.1) fica:

$$H_{int} = - \left(\vec{\wp}_{eg} \sigma_{eg} + \vec{\wp}_{ge} \sigma_{ge} \right) \cdot \hat{\epsilon} \hat{\mathcal{E}} (a + a^\dagger),$$

onde

$$\sigma_{ij} \equiv |i\rangle \langle j| \text{ para } i \neq j, \quad (1.10)$$

são os operadores de Pauli que descrevem as transições entre os estados atômicos.

Definindo a constante de acoplamento entre átomo e o campo por

$$g^{ij} = - \frac{\vec{\wp}_{ij} \cdot \hat{\epsilon} \mathcal{E}}{\hbar} \text{ para } i \neq j, \quad (1.11)$$

o hamiltoniano de interação pode ser escrito como

$$H_{int} = \hbar \sum_{ij(i \neq j)} g^{ij} \sigma_{ij} (a + a^\dagger). \quad (1.12)$$

Para simplificar consideremos um único átomo de dois níveis onde $g = g^{ge} = g^{eg}$ e \wp_{ij} é real, isto é sem fase. Com isto o hamiltoniano de interação pode ser escrito como

$$H_{int} = \hbar g (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (a + a^\dagger). \quad (1.13)$$

Usando as notações:

$$\sigma_+ = \sigma_{eg} \equiv |e\rangle \langle g| \quad (1.14)$$

e

$$\sigma_- = \sigma_{ge} \equiv |g\rangle \langle e|, \quad (1.15)$$

temos que os operadores σ_\pm atuam nos níveis atômicos, sendo que o operador σ_- leva o átomo de nível mais elevado para um mais baixo, enquanto σ_+ faz a operação inversa, ou seja, leva o átomo de um nível mais baixo para um mais alto.

O hamiltoniano de interação em termos dos operadores atômicos σ_+ e σ_- , de levantamento e abaixamento, respectivamente, é dado de acordo com as Eqs. (1.13), (1.14) e (1.15) por:

$$H_{int} = \hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger), \quad (1.16)$$

ou ainda,

$$H_{int} = \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a + \sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a^\dagger). \quad (1.17)$$

O termo $\sigma_- a^\dagger$ descreve o processo em que abaixa-se o nível do átomo enquanto um fóton é criado no campo na cavidade e o termo $\sigma_+ a$ o processo inverso. Os demais termos ($\sigma_- a + \sigma_+ a^\dagger$) são chamados de termos anti-ressonantes, ou termos contra-girantes, e podemos desprezá-los na aproximação de onda girante [6]. Teremos assim, o hamiltoniano para a interação átomo-campo expresso por:

$$H_{int} = \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (1.18)$$

Portanto, o hamiltoniano total de interação ressonante átomo-campo descrito pela teoria quântica é dado, de acordo com a Eq. (1.8), por

$$H = \frac{1}{2} \hbar w_0 \sigma_z + \hbar w a^\dagger a + \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (1.19)$$

Esta expressão descreve a interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo e é muita vezes o ponto de partida para diversas investigações em óptica quântica.

1.2.2 Interação não ressonante

Na interação não ressonante, quando um átomo de dois níveis interage com um campo eletromagnético cuja frequência do campo é diferente da frequência de transição atômica, chamada de interação dispersiva, não há troca de fótons, porém há uma mudança de fase do campo gerando novos estado do campo, conforme será mostrado na Seção 2.1.

O hamiltoniano para um sistema que consiste de um átomo de dois níveis interagindo com um modo da cavidade pode ser dado por:

$$H = \hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_{ie} \sigma_z^{ie} + \hbar g (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger), \quad (1.20)$$

sendo

$$\sigma^+ = \sigma_{ie} \equiv |i\rangle \langle e|, \quad (1.21)$$

$$\sigma^- = \sigma_{ei} \equiv |e\rangle \langle i| \quad (1.22)$$

e

$$\sigma_z^{ie} = |i\rangle \langle i| - |e\rangle \langle e|. \quad (1.23)$$

Na representação de interação, este hamiltoniano é escrito na forma

$$H_{AC}(t) = e^{i \frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_{ie} \sigma_z^{ie}}{\hbar} t} \hbar g (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger) e^{-i \frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_{ie} \sigma_z^{ie}}{\hbar} t} - \left(\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_{ie} \sigma_z^{ie} \right). \quad (1p)$$

O hamiltoniano de interação na representação de interação será

$$H_I(t) = \hbar g \left\{ e^{iwa^\dagger at} a^\dagger e^{-iwa^\dagger at} e^{\frac{i}{2}w_{ie}\sigma_z^{ie}t} \sigma^- e^{-\frac{i}{2}w_{ie}\sigma_z^{ie}t} + e^{iwa^\dagger at} a e^{-iwa^\dagger at} e^{\frac{i}{2}w_{ie}\sigma_z^{ie}t} \sigma^+ e^{-\frac{i}{2}w_{ie}\sigma_z^{ie}t} \right\}, \quad (1.24)$$

pois os operadores a^\dagger e a só atuam nos estados do campo e os operadores σ^- e σ^+ só atuam nos estados do átomo.

Usando a identidade da pág. 40 da referência [6]

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (1.25)$$

na Eq. (1.24), obtemos

$$H_I(t) = \hbar g \left\{ \sigma^- a^\dagger e^{-i\delta t} + \sigma^+ a e^{i\delta t} \right\} \quad (1.26)$$

para o hamiltoniano de interação na representação de interação, onde $\delta = w_{ie} - \omega$ a diferença de frequência do campo e a frequência do elementos de transição do átomo, chamada de dessintonia.

Para encontrar o hamiltoniano $H_I(t)$ que contém somente termos altamente oscilantes, podemos utilizarmos o hamiltoniano efetivo por meio da expressão $\frac{H_I(t)}{i\hbar} \int_0^t H_I(t') dt' = H_{eff}$, o qual demonstraremos no Apêndice A.

Integrando $H_{AC}(t)$ temos

$$\int^t H_I(t) dt = \hbar g \sigma^+ a \frac{e^{i\delta t}}{i\delta} + \hbar g \sigma^- a^\dagger \frac{e^{-i\delta t}}{-i\delta}. \quad (1.27)$$

Escrevendo o hamiltoniano efetivo dada pela Eq. (A5) no Apêndice A por:

$$H_{eff} = \frac{1}{i\hbar} H_{AC}(t) \int^t H_{AC}(t') dt'. \quad (1.28)$$

Logo,

$$H_{eff} = \frac{\hbar g^2}{\delta} (\sigma^- \sigma^+ a^\dagger a - \sigma^+ \sigma^- a a^\dagger), \quad (1.29)$$

usando $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ e das Eq. (1.21) e (1.22) podemos escrever

$$H_{eff} = \frac{\hbar g^2}{\delta} a^\dagger a (|e\rangle \langle e| - |i\rangle \langle i|) - \frac{\hbar g^2}{\delta} |i\rangle \langle i|. \quad (1.30)$$

Fazendo o processo inverso, ou seja, voltando a representação de Schrödinger, temos

$$\begin{aligned} H_S = & e^{-i\frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar w_{ie}\sigma_z^{ie}}{\hbar}t} \left[\frac{\hbar g^2}{\delta} (|e\rangle \langle e| - |i\rangle \langle i|) a^\dagger a - \frac{\hbar g^2}{\delta} |i\rangle \langle i| \right] e^{i\frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar w_{ie}\sigma_z^{ie}}{\hbar}t} \\ & + e^{-i\frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar w_{ie}\sigma_z^{ie}}{\hbar}t} \left(\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar w_{ie}\sigma_z^{ie} \right) e^{i\frac{\hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar w_{ie}\sigma_z^{ie}}{\hbar}t}, \end{aligned} \quad (1y)$$

como $|i\rangle\langle i|$ comuta com $\sigma_z^{ie} = |i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|$ temos que:

$$H_S = \hbar w a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_{ie} \sigma_z^{ie} + \frac{\hbar g^2}{\delta} (|e\rangle\langle e| - |i\rangle\langle i|) - \frac{\hbar g^2}{\delta} |i\rangle\langle i|. \quad (1.31)$$

Supondo o átomo de dois níveis preparado no estado excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$, podemos ignorar o nível $|i\rangle$ e assim escrever o hamiltoniano efetivo:

$$H_S = \hbar \chi |e\rangle\langle e|, \quad (1.32)$$

onde $\chi = \frac{g^2}{\delta}$ é o parâmetro efetivo da interação dispersiva.

A evolução da interação átomo-campo utilizando o hamiltoniano da Eq. (1.32) mostrará a inversão na fase do estado do campo preparado numa cavidade interagindo com um átomo no estado excitado $|e\rangle$ e a manutenção da fase do estado do campo quando este interage com o átomo no estado fundamental $|g\rangle$, como veremos na Seção 2.1 do Capítulo 2.

1.2.3 Hamiltoniano de compressão

Estados comprimidos tem sidos extensivamente estudados na literatura [8-12]. Eles são importantes para as investigações fundamentais na física.

Nesta Seção apresentaremos uma engenharia de construção do hamiltoniano não-linear associado à compressão de um único modo campo da cavidade (Os resultados desta Seção foram baseados na referência [7]).

A Figura 1.1 representa um sistema atômico de dois níveis eletrônicos, onde $|g\rangle$ é o estado fundamental e $|e\rangle$ o estado excitado, que se acoplam por intermédio de campos de radiação quânticos e clássicos. O modo do campo de microondas da cavidade, com frequência w_a , interage com o sistema atômico via processo de um fóton mediante transição de dipolo $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constante de acoplamento dado por λ_a . O modo do campo quântico não é ressonante com a transição de dipolo, isto é, estão presentes dessintonias entre a frequência do modo do campo quânticos da cavidade e a frequência da transição atômica w_0 . O átomo é excitado por dois campos clássicos de frequências w_1 e w_2 promovendo transições de dipolo entre os estados atômicos com constante de acoplamento associada ao primeiro campo definida como $\Omega_1 = |\Omega_1| e^{i\phi_1 t}$ e com constante de acoplamento associada ao segundo campo como $\Omega_2 = |\Omega_2| e^{i\phi_2 t}$, sendo ϕ_1 e ϕ_2 as fases relativas dos respectivos campos clássicos.

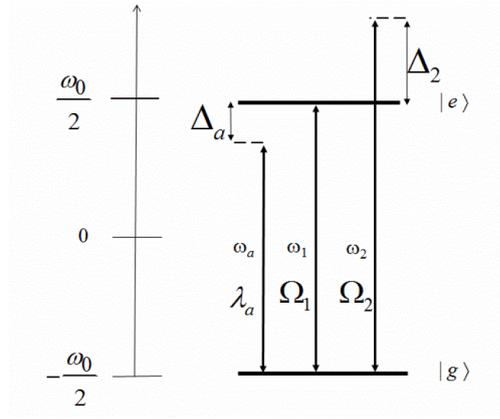


Figura 1.1: Configuração dos campos de radiação necessária para obter o operador de compressão de um modo da cavidade.

Podemos representar este sistema pelo hamiltoniano

$$H = w_a a^\dagger a + \frac{w_0}{2} \sigma_z + [\lambda_a a \sigma_{eg} + \Omega_1 e^{i\omega_1 t} \sigma_{eg} + \Omega_2 e^{i\omega_2 t} \sigma_{eg} + h.c.], \quad (1.33)$$

com $\hbar \equiv 1$, onde $a^\dagger(a)$ é o operador de criação (aniquilação) de fótons do modo da cavidade e $\sigma_{kl} = |k\rangle \langle l|$ ($k, l = \{g, e\}$) os operadores de Pauli dado pela Eq. (1.10). Os dois primeiros termos do hamiltoniano acima descrevem as energias dos modos da cavidade e dos níveis atômicos, respectivamente. Os termos $\lambda_a a \sigma_{eg}$ (juntamente com seus respectivos hermitianos conjugados (h. c.)) descrevem a interação átomo-campo da cavidade na aproximação de Jaynes-Cummings e os termos $\Omega_1 e^{i\omega_1 t} \sigma_{eg}$ e $\Omega_2 e^{i\omega_2 t} \sigma_{eg}$ (com seus respectivos hermitianos conjugados) descrevem a ação dos dois campos clássicos sobre os dois níveis atômicos.

Segue da Eq. (1.33) que o hamiltoniano do sistema pode ser escrito por:

$$H = H_0 + H', \quad (1.34)$$

sendo

$$H_0 = w_a a^\dagger a + \frac{w_0}{2} \sigma_z \quad (1.35)$$

e

$$H' = \lambda_a a \sigma_{eg} + \Omega_1 e^{i\omega_1 t} \sigma_{eg} + \Omega_2 e^{i\omega_2 t} \sigma_{eg} + h.c. \quad (1.36)$$

Com o primeiro campo clássico sendo ajustado ressonantemente em relação à transição

atômica, o hamiltoniano na representação de interação, é dado por:

$$H_{int} = e^{\frac{iH_0}{\hbar}t} H' e^{-\frac{iH_0}{\hbar}t}, \quad (1.37)$$

usando a relação dada pela Eq. (1.25), o hamiltoniano na representação de interação reduz-se à

$$H_{int} = \lambda_a a \sigma_{eg} e^{-i\Delta_a t} + \Omega_1 \sigma_{eg} + \Omega_2 e^{-i\Delta_2 t} \sigma_{eg} + h.c., \quad (1.38)$$

sendo $\Delta_a = w_a - w_0$ e $\Delta_2 = w_2 - w_0$ as dessintonias entre a frequência transição atômica e as frequências dos campos clássicos.

Considerando que a intensidade do primeiro campo clássico é o maior parâmetro do sistema, juntamente com a dessintonia Δ_2 , ou seja $\Omega_1 \sim \Delta_2 \gg \Omega_2, \Delta_a$, e mudando convenientemente o hamiltoniano de interação H_{int} para um referencial girante, cuja frequência é w_1 , dado pela transformação unitária $U_1^\dagger H_{int} U_1 = (\Omega_1 \sigma_{eg} + h.c)$ com $U_1 = e^{-i(\Omega_1 \sigma_{eg} + h.c)t}$, o hamiltoniano de interação dado pela Eq.(1.38) torna-se:

$$H_1(t) = \left(\frac{\lambda_a}{2} e^{-i\Delta_a t} a + \frac{\Omega_2}{2} e^{-i\Delta_2 t} \sigma_{eg} \right) [(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|) - e^{i2|\Omega_1|t} |+\rangle \langle -| + e^{-i2|\Omega_1|t} |-\rangle \langle +|] e^{-i\phi_1 t} + h.c., \quad (1.39)$$

onde fizemos a mudança de base $|+\rangle = (|e\rangle + e^{-i\phi_1 t} |g\rangle) / \sqrt{2}$ e $|-\rangle = (|e\rangle - e^{-i\phi_1 t} |g\rangle) / \sqrt{2}$. Agora, se impusermos a condição ressonante de $\Delta_2 + 2|\Omega_1| = 0$, o hamiltoniano de interação dado pela Eq. (1.39) torna-se

$$\tilde{H}_1(t) = \left(\frac{\lambda_a}{2} e^{-i(\Delta_a + \phi_1)t} a + \frac{\lambda_a^*}{2} e^{i(\Delta_a + \phi_1)t} a^\dagger \right) [(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|) - \frac{\Omega_2}{2} e^{-i\phi_1 t} |-\rangle \langle +| + h.c.]. \quad (1.40)$$

Considerando a intensidade do segundo campo clássico $|\Omega_2| \gg \Delta_a, \lambda_a$, e fazendo a mudança do hamiltoniano de interação $\tilde{H}_1(t)$ para um referencial girante, cuja frequência é w_2 , dado pela transformação unitária $U_2^\dagger \tilde{H}_1 U_2 = (\frac{\Omega_2}{2} e^{-i\phi_1 t} |-\rangle \langle +| + h.c)$ com $U_2 = e^{-i(\frac{\Omega_2}{2} e^{-i\phi_1 t} |-\rangle \langle +| + h.c)t}$, o hamiltoniano de interação dado pela Eq. (1.40) torna-se

$$H_2(t) = \left(\frac{\lambda_a}{2} e^{-i(\Delta_a + \phi_1)t} a + \frac{\lambda_a^*}{2} e^{i(\Delta_a + \phi_1)t} a^\dagger \right) (e^{-i|\Omega_2|t} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| - e^{i|\Omega_2|t} |\downarrow\rangle \langle \downarrow|), \quad (1.41)$$

onde definimos uma nova base $|\uparrow\rangle = (|+\rangle + e^{i(\phi_2 - \phi_1)t} |-\rangle) / \sqrt{2}$ e $|\downarrow\rangle = (|+\rangle - e^{i(\phi_2 - \phi_1)t} |-\rangle) / \sqrt{2}$.

Para encontrar o hamiltoniano $H_2(t)$ tivemos que fazer $|\Omega_2| \gg \Delta_a, \lambda_a$ e isto quer dizer que o hamiltoniano $H_2(t)$ contém somente termos altamente oscilantes, o que permite utilizarmos o hamiltoniano efetivo por meio da expressão dada pela Eq. (A5) do Apêndice A.

Como o hamiltoniano $H_2(t)$ contém somente termos altamente oscilantes, então o hamiltoniano efetivo é dado por:

$$H_{eff} = \frac{H_2(t)}{i\hbar} \int_0^t H_2(t') dt'. \quad (1.42)$$

Substituindo a Eq. (1.41) na Eq. (1.42) e usando que $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} H_{eff} = & -\frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} (2a^\dagger a + 1) (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) \\ & -\frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} (e^{-2i(\phi_1 + \Delta_a t)} a^2 + e^{2i(\phi_1 + \Delta_a t)} a^{\dagger 2}) (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|), \end{aligned} \quad (1.43)$$

veja que podemos escrever a Eq. (1.43) como

$$H_{eff} = H_I + H_{II}, \quad (1.44)$$

sendo $H_I = -\frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} (2a^\dagger a + 1) (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|)$ o hamiltoniano livre na base $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ e $H_{II} = -\frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} (e^{-2i(\phi_1 + \Delta_a t)} a^2 + e^{2i(\phi_1 + \Delta_a t)} a^{\dagger 2}) (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|)$ hamiltoniano de interação na base $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Fazendo uma última transformação unitária $\tilde{H}_{eff} = U^\dagger H_{II} U - H_I$ com o operador de evolução $U = \exp \left[i \frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} (2a^\dagger a + 1) (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) t \right]$ para eliminar o termo livre H_I ficamos com

$$\tilde{H}_{eff} = - \left\{ \frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} e^{-2i\phi_1} a^2 \exp \left[-2i \left(\Delta_a + \frac{\lambda_a^2}{2|\Omega_2|} (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) \right) t \right] + h.c. \right\} (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|). \quad (1.45)$$

Assumindo que a fase do primeiro campo clássico seja igual a fase do segundo campo clássico, implica que o estado $|\uparrow\rangle$ se torne o estado $|e\rangle$ e o estado $|\downarrow\rangle$ se torne o estado $|g\rangle$. Ajustando $\Delta_a + \frac{\lambda_a^2}{2|\Omega_2|} = 0$, a dinâmica na cavidade será dada pelo hamiltoniano de compressão

$$H_{sq} = \pm (\chi a^2 + \chi^* a^{\dagger 2}), \quad (1.46)$$

sendo que $\chi = \frac{\lambda_a^2}{4|\Omega_2|} e^{-2i\phi_1}$ é o fator de compressão e os sinais \pm referem-se a preparação dos átomos nos estados $|g\rangle$ ou $|e\rangle$, respectivamente.

Portanto, o hamiltoniano dado pela Eq. (1.46) pode ser utilizado para comprimir um estado quântico previamente preparado na cavidade, isto é, realizar a operação de troca de

dois fótons do campo preparado em meio não-linear. Propriedades estatísticas dos estados comprimidos do campo da luz têm sido amplamente estudadas, por exemplo, para obter uma visão mais profunda sobre fenômenos físicos fundamentais, tais como estatísticas de fótons sub-Poissoniana revelando características inequívocas da natureza quântica da luz [10, 11] e visando aplicações tecnológicas, como por exemplo, melhorar a relação sinal-ruído na comunicação óptica, reduzindo as flutuações quânticas em uma componente da quadratura do campo à custa de flutuações amplificadas na quadratura conjugada [12, 13].

Além do estudo dos estados comprimidos a superposição de estados é uma propriedade importante na mecânica quântica (a qual exploraremos a partir do Capítulo 2) e encontra várias aplicações tecnológicas, como por exemplo em informação quântica e na computação quântica. Superposição de estados é também uma propriedade fundamental de um qubit necessária para executar transformada de Fourier Quântica, estimativa de fase quântica, busca quântica, algoritmo de Deutsch, criptografia quântica e codificação densa [14].

1.3 Contextualização e objetivos desta tese

Desde a descoberta do fenômeno de teletransporte [15], com o uso do efeito da não localidade demonstrado experimentalmente por A. Aspect e colaboradores [16], uma série de protocolos foram sugeridos para a sua implementação em vários contextos, como por exemplos, em ondas viajantes [17, 18] e em EQC [19, 20]. Experimentalmente, teletransporte foi demonstrado para variáveis discretas [21] e para um único modo do campo eletromagnético com variáveis contínuas [22, 23]. Mais recentemente, teletransporte de matéria e a luz foi anunciado [24], onde luz e matéria são tratadas como, respectivamente, ondas estacionárias e ondas viajantes.

No domínio da EQC, esquemas de teletransportes de estados atômicos emaranhados de duas partículas [25], estados atômicos emaranhados de multi-partículas e estados de campo emaranhados dentro das cavidades de alto fator de qualidade [25-30] têm sido propostos, uma vez que uma cavidade de alto fator de qualidade é, sem dúvida, um cenário importante para testes de fundamentos da mecânica quântica [27], bem como para demonstrar o processamento de informação quântica [32] e para a realização de experiências com teletransporte [33].

Os estados de um sistema na maioria das vezes são descritos como estados isolados, isto

é, sem levar em conta o meio ambiente em que estão inseridos. Entretanto, efeitos quânticos, como superposição de estados, são sensíveis a interações com o ambiente. Esses efeitos quânticos tendem a desaparecer por causa do acoplamento entre o sistema e o ambiente. O efeito mais importante que ocorre durante a interação de sistemas quânticos e o meio ambiente é a decoerência. A decoerência decorre do emaranhamento entre o ambiente e o sistema. Esse efeito se reflete diretamente na sustentação das superposições dos estados quânticos, como será visto no estudo da função de Wigner, na fidelidade no capítulo 2, na inversão atômica e na entropia linear no Capítulo 4.

Qualquer processamento de informação, quântica ou clássica, terá maior dificuldade de realização se estiver num sistema aberto. A geração e posterior teletransporte de estados em sistema aberto levam inevitavelmente a erros e perda de informação. Entretanto, nenhum sistema na natureza é de fato isolado. Assim, ruídos, dissipações e erros são inevitáveis para qualquer procedimento que manipule informação em qualquer ambiente. No nosso caso, estudaremos a geração do campo na superposição de estados coerentes comprimidos (SECC) bem como o teletransporte deste estado de uma cavidade para outra, incluindo os efeitos de dissipação e temperatura.

Nosso objetivo neste trabalho, portanto, consiste em: i) apresentar uma engenharia de preparação do estado do campo na SECC em uma cavidade de alto fator de qualidade ii) caracterizar este campo preparado dentro da cavidade estudando a função de Wigner e a fidelidade; iii) propor um esquema para teletransportar o estado preparado numa cavidade para outra e iv) estudar algumas propriedades estatísticas do estado evoluído sob influência do reservatório.

A primeira parte deste trabalho, desenvolvida no Capítulo 2, será o método de preparação do campo no estado coerente comprimido (ECC) e na SECC dentro de uma cavidade e sua caracterização usando o formalismo de Glauber, método este que permite o estudo da perda de energia do estado para o meio ambiente. No Capítulo 3 apresentaremos a engenharia do teletransporte do campo preparado na SECC de uma cavidade para outra. No Capítulo 4 estudaremos as propriedades estatísticas dinâmicas e a perda de pureza, através da entropia linear, considerando o estado do campo, preparado na cavidade, na SECC e comparando com outros estados como, por exemplo, com o estado de QBIT na base computacional, o estado

térmico, o estado coerente (EC), o ECC, com um novo estado do campo que propomos, chamado de estado coerente comprimido ortogonal (ECCO) [34] e o com o caso particular do ECCO conhecido como estado coerente ortogonal (ECO) que aparece na literatura [35]. E por fim, no Capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões.

Capítulo 2

Preparação do campo na superposição de estados coerentes comprimidos

Neste capítulo, mostraremos uma proposta de engenharia para a preparação do campo na SECC numa cavidade [36]. Um esquema para isto é mostrado na Figura 2.1. Um átomo inicialmente preparado no estado excitado $|e\rangle$ atravessa uma zona de Ramsey (ZR), que o leva para a superposição dos seus estados excitado e fundamental. Esta interação com um campo clássico está demonstrado na Sessão 1.1, ou seja, pelo ajuste da fase e amplitude do campo elétrico, atinge-se a rotação desejada. Fazendo o átomo interagir com o campo no estado coerente dentro de uma cavidade e passando por uma nova ZR, se átomo for detectado no estado fundamental ou no estado excitado, o campo dentro da cavidade estará preparado na SECC, como iremos mostrar.

2.1 Engenharia da preparação do SECC

Para modelar o nosso sistema vamos considerar o seguinte hamiltoniano, que inclui a interação dispersiva entre um átomo e o campo eletromagnético numa cavidade dissipativa:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \hbar \left(\lambda_k a^\dagger b_k + \lambda_k^* a b_k^\dagger \right) + \hbar\chi a^\dagger a |e\rangle \langle e| \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1) $\hbar\omega a^\dagger a$ é hamiltoniano do campo aprisionado, $\sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k$ o hamiltoniano do reservatório representado pelas paredes da cavidade e modelado como sendo um conjunto de átomos representados por osciladores harmônicos, $\sum_k \hbar \left(\lambda_k a^\dagger b_k + \lambda_k^* a b_k^\dagger \right)$ é o hamiltoniano da interação entre o campo e o reservatório, e $\hbar\chi a^\dagger a |e\rangle \langle e|$ é o hamiltoniano de interação dispersiva entre o átomo e o campo dentro da cavidade - ver Seção 1.2; a^\dagger e a são os usuais operadores

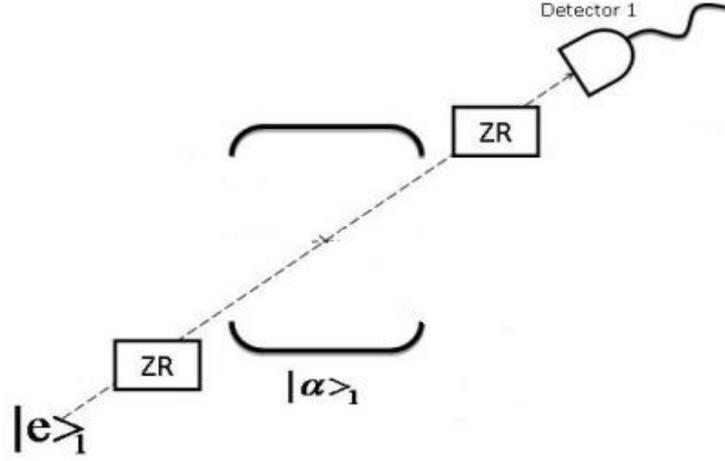


Figura 2.1: Esquema de geração do campo na SECC em uma cavidade de alto fator de qualidade.

de criação e de aniquilação de fótons no modo do campo, b_k^\dagger e b_k são os operadores de criação e de aniquilação de fótons no modo w_k do reservatório, λ_k é a constante de acoplamento entre o campo na cavidade e o k -ésimo modo do reservatório e χ é o parâmetro efetivo da interação dispersiva.

A Figura 2.1 representa o esquema de preparação do estado do campo eletromagnético na SECC, composto por um átomo preparado inicialmente no estado excitado $|e\rangle$, de duas ZR, uma cavidade com alto fator de qualidade preparada no estado coerente $|\alpha\rangle$ e um detector de estado do átomo. Passando uma corrente clássica na cavidade que se encontra inicialmente no estado de vácuo $|0\rangle$, obtém-se o estado coerente (EC) $|\alpha\rangle$ [6]. Essa ação física pode ser representada pela aplicação do operador de Glauber $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ [37] no estado de vácuo $|0\rangle$, isto é:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (2.2)$$

O chamado operador de compressão $S(\xi)$ é dado por [38]:

$$S(\xi) = \exp(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}), \quad (2.3)$$

sendo $\xi = r e^{i\theta}$ o parâmetro de compressão, onde r é a intensidade da compressão e θ sua direção.

Atuando o operador $S(\xi)$ no estado coerente $|\alpha\rangle$ teremos o estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$ [38] dado por:

$$S(\xi) |\alpha\rangle = |\xi, \alpha\rangle, \quad (2.4)$$

supondo um tempo muito pequeno para a preparação de forma que podemos desprezar o efeito do reservatório.

Vejamos como o esquema mostrado na Figura (2.1) pode gerar o campo na SECC inicialmente preparado no ECC dado pela Eq. (2.4).

Passando um átomo 1 inicialmente no estado excitado $|e\rangle$ numa ZR [42], esta coloca o átomo 1 na superposição dos seus estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$, ou seja,

$$|g\rangle \longrightarrow c_1 |g\rangle - c_2 |e\rangle \quad (2.5)$$

e

$$|e\rangle \longrightarrow c_1 |e\rangle + c_2 |g\rangle, \quad (2.6)$$

conforme mostrado na sessão (1.1). Se após passar pela ZR, o átomo 1 passar pela cavidade 1, teremos uma interação dispersiva átomo-campo que causa a seguinte evolução do estado inicial do sistema átomo-campo

$$(c_1 |e\rangle + c_2 |g\rangle) |\xi, \alpha\rangle \rightarrow c_1 |e\rangle |\xi, -\alpha\rangle + c_2 |g\rangle |\xi, \alpha\rangle.$$

A evolução da interação dispersiva do sistema átomo-campo, na representação de interação, é feita através do operador

$$U_{AC} = \exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|), \quad (2.7)$$

sendo $\Phi = \chi t$, demonstrado a seguir.

Atuando o operador de evolução da interação de dispersão dado pela Eq. (2.7) no estado do sistema átomo-campo obtemos

$$\begin{aligned} U_{AC} (|e\rangle |\xi, \alpha\rangle + |g\rangle |\xi, \alpha\rangle) &= \exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) (|e\rangle |\xi, \alpha\rangle + |g\rangle |\xi, \alpha\rangle) \\ &= \exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle \\ &\quad + \exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |g\rangle |\xi, \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O primeiro termo da Eq. (2.8) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle &= \exp(-i\Phi a^\dagger a) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle \\
&= \exp(-i\Phi a^\dagger a) S(\xi) |e\rangle |\alpha\rangle \\
&= \exp(-i\Phi a^\dagger a) S(\xi) \exp(i\Phi a^\dagger a) \\
&\quad \times \exp(-i\Phi a^\dagger a) |e\rangle |\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando a identidade [41, 43]

$$e^{KA} F(B) e^{-KA} = F(e^{KA} B e^{-KA}), \tag{2.10}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\exp(-i\Phi a^\dagger a) S(\xi) \exp(i\Phi a^\dagger a) &= \exp(-i\Phi a^\dagger a) \exp(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}) \exp(i\Phi a^\dagger a) \\
&= \exp[\exp(-i\Phi a^\dagger a) \xi^* a^2 \exp(i\Phi a^\dagger a)] \\
&\quad \times \exp[-\exp(-i\Phi a^\dagger a) \xi a^{\dagger 2} \exp(i\Phi a^\dagger a)].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Da identidade [6],

$$e^{xa^\dagger a} a e^{-xa^\dagger a} = a e^{-x}, \tag{2.12}$$

teremos que

$$\begin{aligned}
\exp(-i\Phi a^\dagger a) \xi^* a^2 \exp(i\Phi a^\dagger a) &= \exp(-i\Phi a^\dagger a) \xi^* a \exp(i\Phi a^\dagger a) \\
&\quad \times \exp(-i\Phi a^\dagger a) a \exp(i\Phi a^\dagger a) \\
&= \xi^* a^2 \exp(2i\Phi)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$\exp(-i\Phi a^\dagger a) \xi a^{\dagger 2} \exp(i\Phi a^\dagger a) = \xi a^{\dagger 2} \exp(-2i\Phi), \tag{2.14}$$

e o primeiro termo da Eq. (2.8) fica

$$\begin{aligned}
\exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle &= \exp(\xi^* a^2 \exp(2i\Phi) - \xi a^{\dagger 2} \exp(-2i\Phi)) \\
&\quad \times \exp(-i\Phi a^\dagger a) |e\rangle |\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Expandindo o EC na base de Fock, ficaremos com

$$\begin{aligned}\exp(-i\Phi a^\dagger a) |\alpha\rangle &= \sum_n^\infty \exp(-i\Phi a^\dagger a) \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{n!}} \alpha^n |n\rangle \\ &= \sum_n^\infty \frac{e^{-|\alpha e^{-i\Phi}|^2}}{\sqrt{n!}} (\alpha e^{-i\Phi})^n |n\rangle = |\alpha e^{-i\Phi}\rangle,\end{aligned}\quad (2.16)$$

e o primeiro termo da Eq. (2.8) será dado por:

$$\begin{aligned}\exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle &= \exp(\xi^* a^2 \exp(2i\Phi) - \xi a^{\dagger 2} \exp(-2i\Phi)) \\ &\quad \times |\alpha e^{-i\Phi}\rangle |e\rangle.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Sendo o estado coerente comprimido definido pela Eq. (2.4), temos que

$$\exp(\xi^* a^2 \exp(2i\Phi) - \xi a^{\dagger 2} \exp(-2i\Phi)) |\alpha e^{-i\Phi}\rangle = |\xi e^{-2i\Phi}, \alpha e^{-i\Phi}\rangle. \quad (2.18)$$

Finalmente, o primeiro termo da Eq. (2.8) com $\Phi = \pi$

$$\exp(-i\Phi a^\dagger a) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle = \exp(-i\Phi a^\dagger a) |e\rangle S(\xi) |\alpha\rangle = |\xi, -\alpha\rangle |e\rangle, \quad (2.19)$$

onde podemos ver que há uma inversão na fase do campo quando o átomo no estado excitado $|e\rangle$ interage com o campo numa interação dispersiva. O segundo termo da Eq. (2.8) ficará

$$\exp(-i\Phi a^\dagger a |e\rangle \langle e|) |g\rangle |\xi, \alpha\rangle = |g\rangle |\xi, \alpha\rangle, \quad (2.20)$$

e aqui é visto que o campo permanece o mesmo, com a mesma fase, quando o campo interage com o átomo no estado fundamental $|g\rangle$. Então,

$$U_{AC} (c_1 |e\rangle + c_2 |g\rangle) |\xi, \alpha\rangle = c_1 |e\rangle |\xi, -\alpha\rangle + c_2 |g\rangle |\xi, \alpha\rangle. \quad (2.21)$$

Passando o átomo 1 numa outra ZR, evoluindo de acordo com as Eq. (2.5) e (2.6), agora com $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, faz com que

$$c_1 |e\rangle |\xi, -\alpha\rangle + c_2 |g\rangle |\xi, \alpha\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle (c_1 |\xi, -\alpha\rangle - c_2 |\xi, \alpha\rangle) + |g\rangle (c_1 |\xi, -\alpha\rangle + c_2 |\xi, \alpha\rangle)]. \quad (2.22)$$

Se o átomo 1 for detectado no estado fundamental $|g\rangle$, o campo dentro da cavidade 1 estará no estado $c_1 |\xi, -\alpha\rangle + c_2 |\xi, \alpha\rangle$; se o átomo for detectado no estado excitado $|e\rangle$ o campo na

cavidade 1 estará no estado $c_1 |\xi, -\alpha\rangle - c_2 |\xi, \alpha\rangle$, que são possíveis estados do campo chamados de estados comprimidos pares e ímpares respectivamente estudados nas Refs. [44, 45].

Vamos supor que o átomo 1 foi detectado no estado fundamental, desprezando a dissipação durante a preparação, o campo preparado na cavidade 1 será dado por:

$$c_2 |\xi, \alpha\rangle_1 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_1. \quad (2.23)$$

Agora que mostramos a engenharia de como preparar o estado do campo na SECC, dado pela Eq. (2.23), iremos considerar a evolução deste sob influência de um reservatório, que leva em conta a dissipação e a temperatura. Para tanto utilizaremos o formalismo de Glauber, que é um dos métodos que estuda as perdas de energia do estado do campo eletromagnético levando em conta a dissipação e a temperatura. Uma revisão breve do formalismo de Glauber com as principais equações, como a função característica, o operador densidade, a função P de Glauber e a função de Wigner com dependência temporal é feita no Apêndice B.

Em sistemas abertos com dependência temporal a função característica pode ser escrita na forma normal ordenada por:

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ \rho_{AR}(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}, \quad (2.24)$$

onde $\rho_{AR}(t)$ representa o operador densidade do sistema e do reservatório no tempo t .

A função característica com dependência temporal na representação de Heisenberg, demonstrada no Apêndice B, é dada por:

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ \rho_{AR}(0) e^{\eta a^\dagger(t)} e^{-\eta^* a(t)} \right\}. \quad (2.25)$$

2.1.1 Função característica $C(\eta, t)$ do campo preparado na SECC

Considerando o campo na cavidade 1 numa SECC na forma $N(|\xi, \alpha\rangle + |\xi, -\alpha\rangle)$, sendo $N = [2 + 2 \exp(-2|\alpha|^2)]^{-\frac{1}{2}}$ a constante de normalização, o operador densidade que representa este estado é dado por:

$$\begin{aligned} \rho_A(0) &= N^2 (|\xi, \alpha\rangle + |\xi, -\alpha\rangle) (\langle \xi, \alpha| + \langle \xi, -\alpha|) \\ &= N^2 \sum_{j,k=1}^2 |\xi, \alpha_j\rangle \langle \xi, \alpha_k|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

com $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = -\alpha$.

A função característica de acordo com a Eq. (B17) no Apêndice B é dada por:

$$C(\eta, t) = Tr_A \left\{ \rho_A(0) e^{\eta w^*(t) a^\dagger} e^{-\eta^* w(t) a} e^{-|\eta|^2 \sum_k |v_k(t)|^2 \langle n_k \rangle} \right\}. \quad (2.27)$$

A função característica, com apenas o termo representativo, é dada por:

$$C_{jk}(\eta, t) = N^2 Tr_A |\xi, \alpha_j\rangle \langle \xi, \alpha_k| e^{-|\eta|^2 \sum_k |v_k(t)|^2 \langle n_k \rangle} \exp(\eta w^*(t) a^\dagger) \exp(-\eta^* w(t) a), \quad (2.28)$$

como $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$ da Eq. (B9) no Apêndice B, temos que

$$\sum_k |v_k(t)|^2 = 1 - e^{-\Gamma t} \quad (2.29)$$

fazendo

$$\epsilon = \sum_k |v_k(t)|^2 \langle n_k \rangle = \bar{n}_\omega (1 - e^{-\Gamma t}), \quad (2.30)$$

sendo $\langle n_k \rangle = \bar{n}_\omega$ o número médio de fótons dentro da cavidade a Eq. (2.28) torna-se:

$$C_{jk}(\eta, t) = N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \langle \xi, \alpha_k | \exp(\eta w^*(t) a^\dagger) \exp(-\eta^* w(t) a) | \xi, \alpha_j \rangle \quad (2.31)$$

e usando o fato de que $S^\dagger(\xi) S(\xi) = S(\xi) S^\dagger(\xi) = 1$, podemos reescrever a Eq. (2.31):

$$C_{jk}(\eta, t) = N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \langle \alpha_k | S^\dagger(\xi) \exp(\eta w^*(t) a^\dagger) S(\xi) S^\dagger(\xi) \exp(-\eta^* w(t) a) S(\xi) | \alpha_j \rangle. \quad (2.32)$$

Sabendo que $S^\dagger(\xi) a S(\xi) = \mu a - \nu a^\dagger$ e $S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = \mu^* a^\dagger - \nu^* a$ [6], teremos que:

$$C_{jk}(\eta, t) = N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \langle \alpha_k | \exp[\eta w^*(t) (\mu^* a^\dagger - \nu^* a)] \exp[-\eta^* w(t) (\mu a - \nu a^\dagger)] | \alpha_j \rangle, \quad (2.33)$$

usando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff dada por [6]:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (2.34)$$

com $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, o termo representativo da função característica ficará

$$\begin{aligned} C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu + \eta w^*(t) \mu^* \alpha_j^*\right) \\ &\times \exp(-\eta^* w(t) \mu \alpha_j) \langle \alpha_k | \exp(-\eta w^*(t) \nu^* a) \exp(\eta^* w(t) \nu a^\dagger) | \alpha_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sabendo que [6]:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 + \alpha a^\dagger\right) |0\rangle \quad (2.36)$$

então,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | a | \Psi \rangle &= \langle 0 | \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 + \alpha^* a \right) a | \Psi \rangle \\
&= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \langle 0 | \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 + \alpha^* a \right) | \Psi \rangle \\
&= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \langle \alpha | \Psi \rangle
\end{aligned} \tag{2.37}$$

logo,

$$\langle \alpha | a = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \langle \alpha | \tag{2.38}$$

identicamente, temos que:

$$a^\dagger | \alpha \rangle = \left(\frac{\alpha^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) | \alpha \rangle. \tag{2.39}$$

Com isto a Eq. (2.35) torna-se:

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu + \eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j \right) \\
&\times \exp \left[-\eta w^*(t) \nu^* \left(\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} \right) \right] \langle \alpha_j | \exp \left[\eta^* w(t) \nu \left(\frac{\alpha_j^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \right) \right] | \alpha_j \rangle.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como o estado coerente $|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha a^\dagger)|0\rangle$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon |\eta|^2} \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu + \eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j \right) \\
&\times \langle 0 | \exp \left[-\eta w^*(t) \nu^* \left(\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} \right) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha_k|^2 + \alpha_k^* a \right) \\
&\times \exp \left[\eta^* w(t) \nu \left(\frac{\alpha_j^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \right) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha_j|^2 + \alpha_j a^\dagger \right) | 0 \rangle \\
&= N^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu + \eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j \right) \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha_k|^2 + |\alpha_j|^2) \right] \langle 0 | \exp [(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*) a] \exp [(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j) a^\dagger] | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{2.41}$$

podemos multiplicar a Eq. (2.41) por:

$$1 = \exp \left(\frac{1}{2} |(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 - \frac{1}{2} |(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 \right) \tag{2.42}$$

e

$$1 = \exp \left(\frac{1}{2} |(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2 - \frac{1}{2} |(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2 \right), \tag{2.43}$$

então

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon|\eta|^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2}\eta^{*2} w^2(t) \mu \nu\right) \\
&\times \exp\left(\eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j - \frac{1}{2}(|\alpha_k|^2 + |\alpha_j|^2)\right) \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}|(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 + \frac{1}{2}|(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2\right) \\
&\times \langle 0 | \exp\left[-\frac{1}{2}|(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 + (-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*) a\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}|(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2 + (\eta^* w(t) \nu + \alpha_j) a^\dagger\right] | 0 \rangle, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

usando de novo que $|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha a^\dagger) |0\rangle$:

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, \eta^*, t) &= N^2 e^{-\epsilon|\eta|^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2}\eta^{*2} w^2(t) \mu \nu\right) \\
&\times \exp\left(\eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j - \frac{1}{2}(|\alpha_k|^2 + |\alpha_j|^2)\right) \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}|(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 + \frac{1}{2}|(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2\right) \\
&\times \langle -\eta^* w(t) \nu + \alpha_k | \eta^* w(t) \nu + \alpha_j \rangle, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

da identidade $\langle \beta | \Delta \rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\Delta|^2 + \beta^* \Delta)$:

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon|\eta|^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2}\eta^{*2} w^2(t) \mu \nu\right) \\
&\times \exp\left(\eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j - \frac{1}{2}(|\alpha_k|^2 + |\alpha_j|^2)\right) \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}|(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)|^2 + \frac{1}{2}|(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)|^2\right) \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}|-\eta^* w(t) \nu + \alpha_k|^2 - \frac{1}{2}|\eta^* w(t) \nu + \alpha_j|^2\right] \\
&\times \exp\left[(-\eta w^*(t) \nu^* + \alpha_k^*)(\eta^* w(t) \nu + \alpha_j)\right] \tag{2.46}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 e^{-\epsilon|\eta|^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2}\eta^{*2} w^2(t) \mu \nu\right) \\
&\times \exp\left(\eta w^*(t) \mu^* \alpha_k^* - \eta^* w(t) \mu \alpha_j - \frac{1}{2}(|\alpha_k|^2 + |\alpha_j|^2)\right) \\
&\times \exp\left(-|\eta w(t) \nu|^2 - \eta w^*(t) \nu^* \alpha_j + \eta^* w(t) \nu \alpha_k^* + \alpha_k^* \alpha_j\right), \tag{2.47}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^*(t)^2 \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w(t)^2 \mu \nu \right) \\
&\times \exp [\eta w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \eta^* w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)] \\
&\times \exp [|\eta w(t) \nu|^2 - \epsilon |\eta|^2], \tag{2.48}
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
C_{jk}(\eta, t) &= N^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^*(t)^2 \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w(t)^2 \mu \nu \right) \\
&\times \exp [\eta w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \eta^* w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)] \\
&\times \exp [-|\eta|^2 (|w(t) \nu|^2 + \epsilon)]. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

2.1.2 Função P de Glauber-Sudarshan do campo preparado na SECC

De acordo com Eq. (B19) no Apêndice B, a função $P(\alpha, t)$ de Glauber-Sudarshan é dada por:

$$P(\alpha, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta C(\eta, \eta^*, t) e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta}, \tag{2.50}$$

substituindo o termo representativo da função característica dada pela Eq. (2.49) na Eq. (2.50), o termo representativo da função $P(\alpha, t)$ é:

$$\begin{aligned}
P_{jk}(\alpha, t) &= \frac{N^2}{\pi^2} \langle \alpha_j | \alpha_k \rangle \int d^2 \eta \exp \left[-\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu \right. \\
&\quad \left. + \eta w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \eta^* w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) \right. \\
&\quad \left. - |\eta|^2 (|w(t) \nu|^2 + \epsilon) \right] e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} \\
&= \frac{N^2}{\pi^2} \langle \alpha_j | \alpha_k \rangle \int d^2 \eta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu \right. \\
&\quad \left. - \eta [-w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) + \alpha^*] \right. \\
&\quad \left. - \eta^* [w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) - \alpha] - |\eta|^2 (|w(t) \nu|^2 + \epsilon) \right\}, \tag{2.51}
\end{aligned}$$

usando a integral [46]:

$$\begin{aligned}
&\int d^2 \lambda e^{-K|\lambda|^2 - \frac{1}{2} L \lambda^{*2} - \frac{1}{2} L' \lambda^2 - M \lambda^* - M' \lambda} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{K^2 - LL'}} \exp \left\{ \frac{KMM' - \frac{1}{2} (LM'^2 + L'M^2)}{K^2 - LL'} \right\}, \tag{2.52}
\end{aligned}$$

temos a função $P(\alpha, t)$ da superposição de estados coerentes comprimidos preparado na cavidade 1 dada por:

$$P(\alpha, t) = \frac{N^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\langle \alpha_j | \alpha_k \rangle}{\sqrt{K_p^2 - L_p L_p^*}} \times \exp \left\{ -\frac{K_p N_{jk} N_{kj}^* + \frac{1}{2} (L_p N_{jk}^{*2} + L_p^* N_{jk}^2)}{K_p^2 - L_p L_p^*} \right\}, \quad (2.53)$$

sendo $K_p = |w(t)\nu|^2 + \epsilon$, $L_p = w^2(t)\mu\nu$, $N_{jk} = w(t)(\mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*) - \alpha$. Note a condição $K_p^2 - L_p L_p^* > 0$ para validar a integral temos que $\epsilon^2 > (|w^2(t)\mu\nu|^2 - |w(t)\nu|^2)^2$, então

$$\epsilon > |w(t)|^2 |\nu| (|\mu| - |\nu|). \quad (2.54)$$

Veja que para a representação particularmente interessante do estado coerente, onde a constante de normalização $N = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 0$ e o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, temos [6] que:

$$P(\alpha, t) = \frac{1}{\pi\epsilon} \exp \left\{ -\frac{|\alpha - \alpha_0 w(t)|^2}{\epsilon} \right\}, \quad (2.55)$$

sendo ϵ a dispersão da função Gaussiana dos valores médios de $\alpha_0 w(t)$.

2.1.3 Função de Wigner $W(\gamma, t)$ do campo preparado na SECC

A função de Wigner é dada pela Eq. (B20) no Apêndice B por:

$$W(\gamma, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta e^{\eta^* \gamma - \eta \gamma^*} C(\eta, t) e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}, \quad (2.56)$$

substituindo a função característica, dada pela Eq. (2.49), na função de Wigner teremos:

$$\begin{aligned} W(\gamma, t) &= \frac{N^2}{\pi^2} \sum_{j,k=1}^2 \langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \\ &\times \int d^2\eta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 w^{*2}(t) \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w^2(t) \mu \nu \right. \\ &+ \eta [w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \gamma^*] \\ &- \eta^* [w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) - \gamma] \\ &\left. - |\eta|^2 (|w(t)\nu|^2 + \epsilon) - \frac{|\eta|^2}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

usando a integral Eq. (2.52) a função de Wigner ficará

$$W(\gamma, t) = \frac{N^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle}{\sqrt{K^2 - LL^*}} \times \exp \left\{ -\frac{KM_{jk} M_{kj}^* + \frac{1}{2} (LM_{kj}^{*2} + L^* M_{jk}^2)}{K^2 - LL^*} \right\}, \quad (2.58)$$

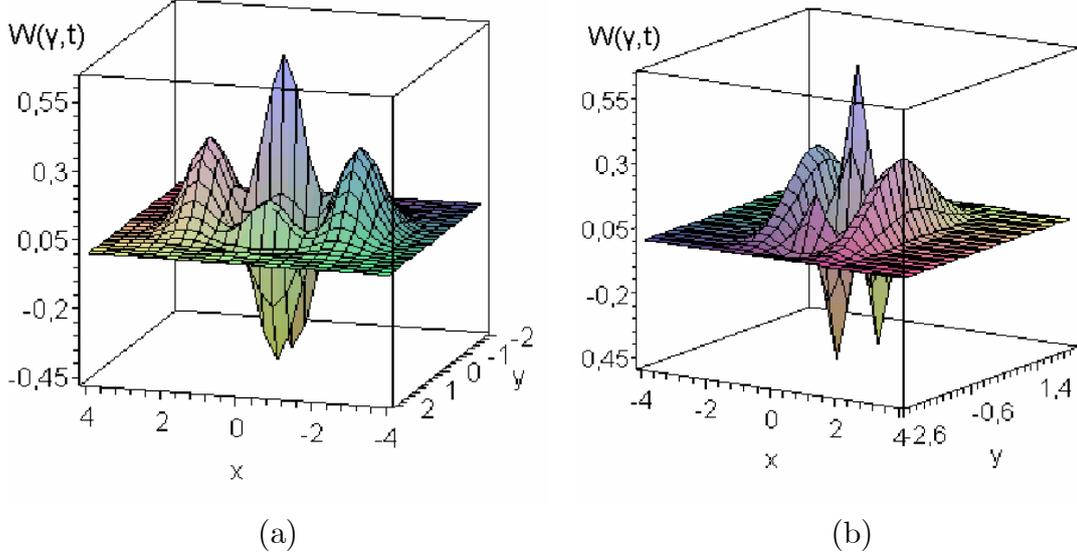


Figura 2.2: Função de Wigner sem dissipação e à temperatura nula para o campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$

sendo que $K = |w(t)\nu|^2 + \epsilon + \frac{1}{2}$, $L = w^2(t)\mu\nu$, $M_{jk} = w(t)(\mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*) - \gamma$. Note que $K^2 - LL^* > 0$ também para $\epsilon = 0$, ou seja, para temperatura nula.

Se fizermos o parâmetro de compressão $\xi = 0$ na Eq. (2.58) teremos a função de Wigner do campo na SEC.

Embora tenhamos desconsiderado as perdas durante a preparação do campo na SECC, para uma estimativa mais realista iremos considerar o estado do campo na SECC a partir do tempo necessário para prepará-lo ($\Gamma t = 0.2$).

Na Figura 2.2a temos a função de Wigner do campo na SEC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.0$ e o parâmetro de compressão $\xi = 0$ e na Figura 2.2b temos a função de Wigner do campo na SECC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.0$ e o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$, que corresponde a uma eficiência próxima 86,4% na quadratura, ambas à temperatura 0 K e sem dissipação.

Observando a Figuras 2.2a e b, dos estados do campo na SEC e na SECC, verificamos que ambas apresentam dois picos correspondente a cada estado coerente envolvido e um padrão de interferência com as regiões negativas que é uma característica quântica, na Figura 2.2b há uma compressão em umas das quadraturas, como esperado, pois se trata do campo na SECC

Na Figura 2.3a temos a função de Wigner do campo na SECC, fixando $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$

(que representa uma compressão em uma quadratura em torno de 63.2%), ambas à temperatura nula e com os campos evoluídos tal que $\Gamma t = 0.4$.

Na Figura 2.3c, também com os campos evoluídos, temos a função de Wigner do campo na SEC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e o parâmetro de compressão $\xi = 0$ e na Figura 2.3d do campo na SECC com parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e parâmetro de compressão $\xi = 0.5$, ambas com temperatura nula e $\Gamma t = 1.0$.

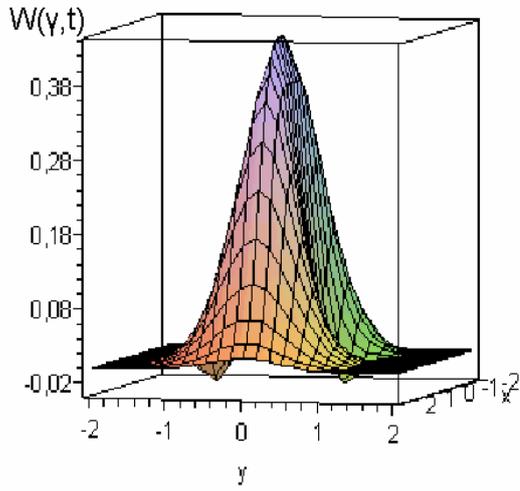
As Figuras 2.3a, b, c e d nos mostram que, com o passar do tempo, os valores negativos na função de Wigner dos estados do campo tanto na SEC quanto na SECC vão diminuindo, logo o efeito quântico tende a desaparecer, como esperado, porém observamos nas Figuras 2.3a e b que o efeito quântico permanece até um tempo satisfatório, ou seja, até um intervalo de tempo tal que $\Gamma t = 0.4$, uma vez que o tempo de vida dos fótons em experiências recente é da ordem de 0.3 s [5] e a constante de dissipação $\Gamma \simeq 10^2 \text{ s}^{-1}$ [47].

Na Figura 2.4a temos a função de Wigner do campo na SEC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e o parâmetro de compressão $\xi = 0$ e na Figura 2.4b do campo na SECC com parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$, ambas com o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.4$ que corresponde à temperatura dentro do reservatório de 0.9 K , para $\Gamma t = 1.0$.

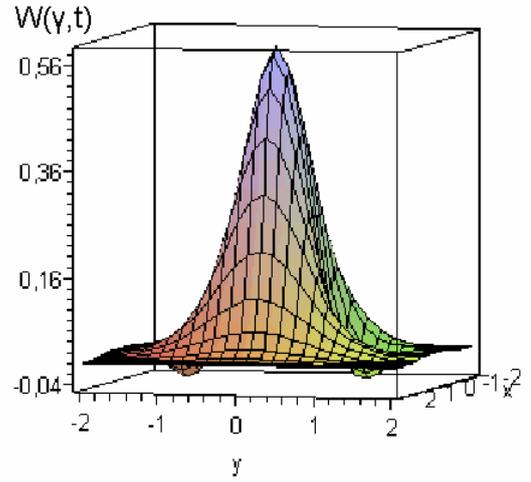
Observando as Figuras 2.4a e b, notamos que o efeito quântico, que fica evidente nos valores negativos na função de Wigner, desaparece com o passar do tempo quando há dissipação e temperatura no reservatório.

Para reforçar que este efeito quântico também diminui com o acréscimo da temperatura dentro do reservatório com dissipação e mesmo assim a função de Wigner apresenta valores negativos até um tempo de vida satisfatório do campo no estado preparado dentro da cavidade, apresentamos a Figura 2.5a com o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.0$, a Figura 2.5b com o número médio de fótons térmico dentro da cavidade e $\bar{n}_\omega = 0.1$ e a Figura 2.5c com o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.4$ que correspondem às temperaturas respectivamente iguais a 0 K , 0.5 K e 0.9 K para o estado do campo na SECC fixando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.5$, o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$ e $\Gamma t = 0.4$.

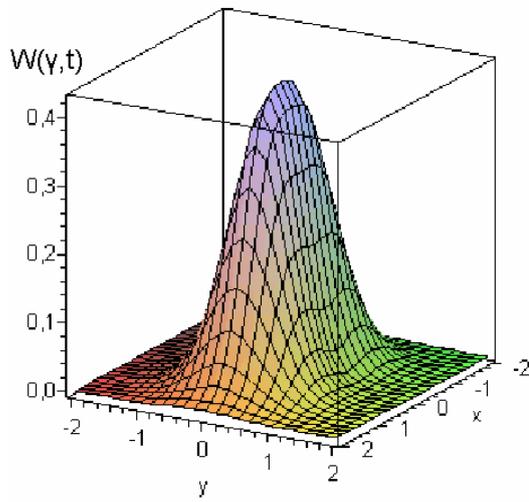
Fixando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.0$, com o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$



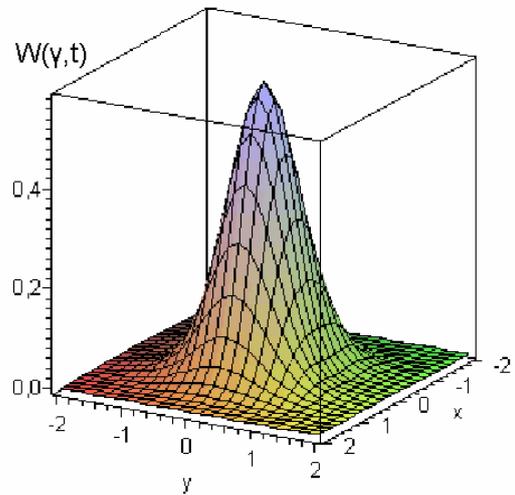
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.3: Função de Wigner com dissipação e à temperatura nula para o campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$ e $\Gamma t = 0.4$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$ e $\Gamma t = 0.4$; c) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$ e $\Gamma t = 1.0$; d) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$ e $\Gamma t = 1.0$

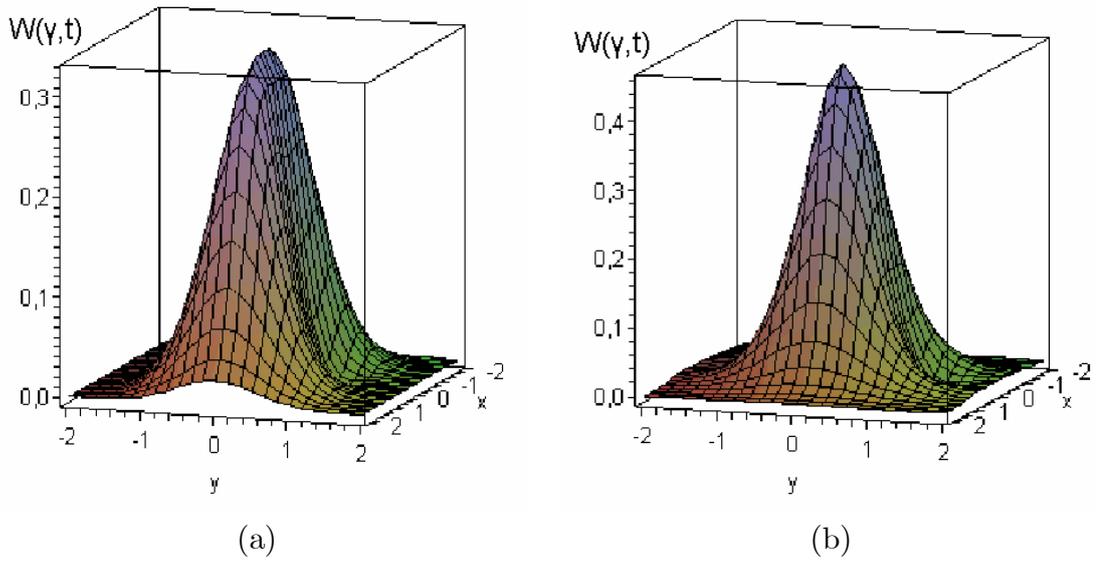


Figura 2.4: Função de Wigner com temperatura não nula e dissipação para campo na: a) SEC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.0$, $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 1.0$; b) SECC $\alpha = 1.0$, $\xi = 0.5$, $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 1.0$

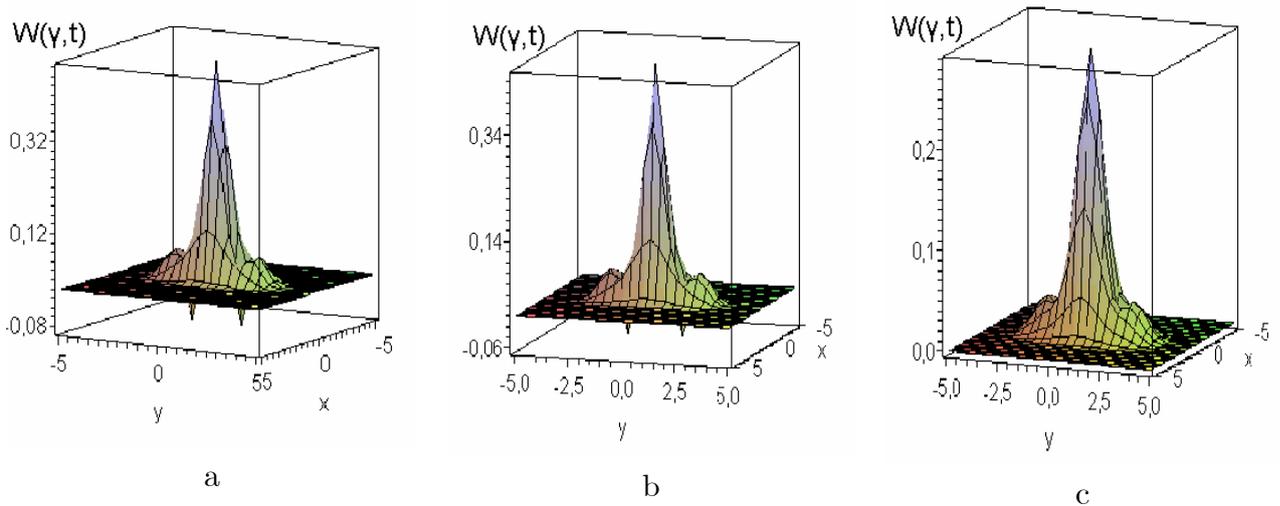


Figura 2.5: Função de Wigner para o campo na SECC $\alpha = 1.5$, $\xi=1.0$, $\Gamma t = 0.4$ a) $\bar{n}_\omega = 0.0$; b) $\bar{n}_\omega = 0.1$ e c) $\bar{n}_\omega = 0.4$

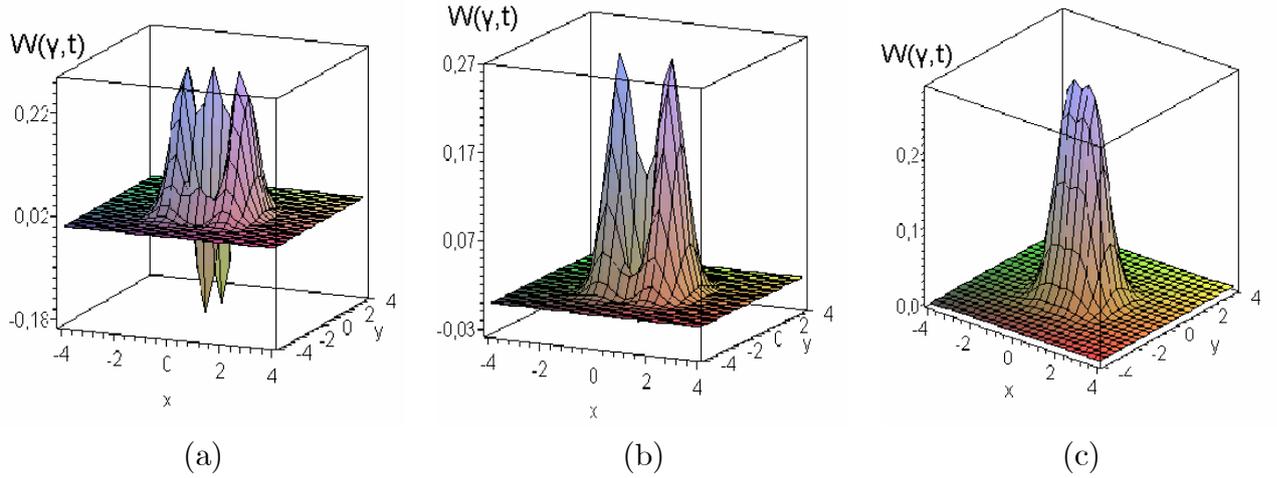


Figura 2.6: Função de Wigner do campo na SECC com $\alpha = 2.0$, $\xi = 0.5$ e $\bar{n}_\omega = 0.1$ para: a) $\Gamma t = 0.2$; b) $\Gamma t = 0.5$ e c) $\Gamma t = 1.5$.

e o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.1$, apresentamos a função de Wigner do campo preparado na cavidade na SECC na Figura 2.6. Na Figura 2.6a, temos a função de Wigner com o campo evoluído no instante que $\Gamma t = 0.2$ equivalente ao tempo para o átomo passar pela cavidade e ser detectado, na Figura 2.6b a função de Wigner do campo evoluído no instante tal que $\Gamma t = 0.5$ e na Figura 2.6c a função de Wigner do campo preparado na cavidade no instante que $\Gamma t = 1.5$.

Na Figura 2.6, como esperado e visto anteriormente, com o passar do tempo a função de Wigner perde sua característica quântica, apresentando valores não negativos. Observe que $\Gamma t = 0.5$ refere-se a uma mistura de estados coerentes comprimidos mesmo à temperatura perto do zero absoluto, o estado inicial perde excitação para o ambiente e os dois picos iniciais tornam praticamente um único, como mostrado na Figura 2.6c. Nossas simulações revelaram um padrão semelhante para outro conjunto de parâmetros. Na próxima Seção, iremos estudar a influência do ambiente sobre a fidelidade do campo na SECC preparado na cavidade.

2.1.4 Fidelidade do campo preparado na SECC

A fidelidade é definida como a projeção do estado evoluído no estado original:

$$\mathbf{F} = \text{Tr} [\rho(\alpha, t_0) \rho(\alpha, t)], \quad (2.59)$$

que mede o quanto o estado evoluído se afasta do estado inicial.

A fidelidade em termos da função de Wigner de um estado, veja Eq. (C4) no Apêndice C, é dada por:

$$\mathbf{F} = \pi \int d^2\gamma W(\gamma, t) W(\gamma, 0). \quad (2.60)$$

A função de Wigner do estado preparado na cavidade 1, de acordo com Eq. (2.58), em $t = 0$ será

$$W(\gamma, 0) = \frac{N^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle}{\sqrt{K_0^2 - L_0 L_0^*}} \exp \left\{ -\frac{K_0 M_{0jk} M_{0jk}^* + \frac{1}{2} (L_0 M_{0jk}^{*2} + L_0^* M_{0jk}^2)}{K_0^2 - L_0 L_0^*} \right\}, \quad (2.61)$$

sendo $K_0 = |\nu|^2 + \epsilon + \frac{1}{2}$, $L_0 = \mu\nu$, $M_{0jk} = (\mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*) - \gamma$. Fazendo $B_{jk} = \mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*$, $D = K^2 - LL^*$, $D_0 = K_0^2 - L_0 L_0^*$, por comodidade faremos $w(t) = w$ e substituindo a Eq. (2.58) e a Eq. (2.61) na Eq. (2.60) a fidelidade será dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{N^4}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{\sqrt{DD_0}} \\ &\times \int d^2\gamma \exp \left\{ \frac{K(wB_{jk} - \gamma)(-w^*B_{kj}^* + \gamma^*)}{D} \right. \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{L(-w^*B_{kj}^* + \gamma^*)^2 + L^*(wB_{jk} - \gamma)^2}{D} \right] \\ &\left. + \frac{K_0(B_{rs} - \gamma)(-B_{sr}^* + \gamma^*) - \frac{1}{2} [L_0(-B_{sr}^* + \gamma^*)^2 + L_0^*(B_{rs} - \gamma)^2]}{D_0} \right\}, \quad (2.62) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{N^4}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{\sqrt{DD_0}} \\
&\times \int d^2\gamma \exp \left(-\frac{K}{D} |w|^2 B_{jk} B_{kj}^* + \frac{Kw}{D} B_{jk} \gamma^* + \frac{Kw^*}{D} B_{kj}^* \gamma - \frac{K}{D} |\gamma|^2 \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{Lw^{*2}}{2D} B_{kj}^{*2} + \frac{Lw^*}{D} B_{kj}^* \gamma^* - \frac{L}{2D} \gamma^{*2} \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{L^* w^2}{2D} B_{jk}^2 + \frac{L^* w(t) B_{jk} \gamma}{D} - \frac{L^* \gamma^2}{D} \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{K_0}{D_0} B_{rs} B_{sr}^* + \frac{K_0}{D_0} B_{rs} \gamma^* + \frac{K_0}{D_0} B_{sr}^* \gamma - \frac{K_0}{D_0} |\gamma|^2 \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{L_0}{2D_0} B_{sr}^{*2} + \frac{L_0}{D_0} B_{sr}^* \gamma^* - \frac{L_0}{2D_0} \gamma^{*2} \right) \\
&\times \exp \left(-\frac{L_0^*}{2D_0} B_{rs}^2 + \frac{L_0^* B_{rs} \gamma}{D_0} - \frac{L_0^* \gamma^2}{D_0} \right) \\
&= \frac{N^4}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{\sqrt{DD_0}} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{K}{D} |w|^2 B_{jk} B_{kj}^* - \frac{Lw^{*2}}{2D} B_{kj}^{*2} - \frac{L^* w^2}{2D} B_{jk}^2 - \frac{K_0}{D_0} B_{rs} B_{sr}^* - \frac{L_0}{2D_0} B_{sr}^{*2} - \frac{L_0^*}{2D_0} B_{rs}^2 \right\} \\
&\times \int d^2\gamma \exp \left\{ -\left(\frac{K}{D} + \frac{K_0}{D_0} \right) |\gamma|^2 - \left(\frac{L}{2D} + \frac{L_0}{2D_0} \right) \gamma^{*2} - \left(\frac{L^*}{2D} + \frac{L_0^*}{2D_0} \right) \gamma^2 \right. \\
&+ \left(\frac{Kw}{D} B_{jk} + \frac{Lw^*}{D} B_{kj}^* + \frac{K_0}{D_0} B_{rs} + \frac{L_0}{D_0} B_{sr}^* \right) \gamma^* \\
&+ \left. \left(\frac{L^* w}{D} B_{jk} + \frac{Kw^*}{D} B_{kj}^* + \frac{L_0^*}{D_0} B_{rs} + \frac{K_0}{D_0} B_{sr}^* \right) \gamma \right\}, \tag{2.63}
\end{aligned}$$

usando o resultado da integral Eq.(2.52) temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= N^4 \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{\sqrt{DD_0 D_1}} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{K}{D} |w|^2 B_{jk} B_{kj}^* - \frac{Lw^{*2}}{2D} B_{kj}^{*2} - \frac{L^* w^2}{2D} B_{jk}^2 - \frac{K_0}{D_0} B_{rs} B_{sr}^* - \frac{L_0}{2D_0} B_{sr}^{*2} - \frac{L_0^*}{2D_0} B_{rs}^2 \right\} \\
&\times \exp \left\{ \frac{K_1 (M_{jk} + M_{rs}) (T_{jk} + T_{rs}) - \frac{1}{2} [L_1 (T_{jk} + T_{rs})^2 + L_1^* (M_{jk} + M_{rs})^2]}{D_1} \right\}, \tag{2.64}
\end{aligned}$$

sendo $K_1 = \frac{K}{D} + \frac{K_0}{D_0}$, $L_1 = \frac{L}{D} + \frac{L_0}{D_0}$, $M_{jk} + M_{rs} = \frac{Kw}{D} B_{jk} + \frac{Lw^*}{D} B_{kj}^* + \frac{K_0}{D_0} B_{rs} + \frac{L_0}{D_0} B_{sr}^*$, $T_{jk} + T_{rs} = \frac{L^* w}{D} B_{jk} + \frac{Kw^*}{D} B_{kj}^* + \frac{L_0^*}{D_0} B_{rs} + \frac{K_0}{D_0} B_{sr}^*$ e $D_1 = K_1^2 - L_1 L_1^*$.

Se fizermos o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e a constante de normalização $N = 1$ na Eq. (2.64) teremos a fidelidade do campo no estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$.

As Figuras 2.7a e b mostram a fidelidade em função de Γt do campo preparado na SECC para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 2.0$ fixando o parâmetro de

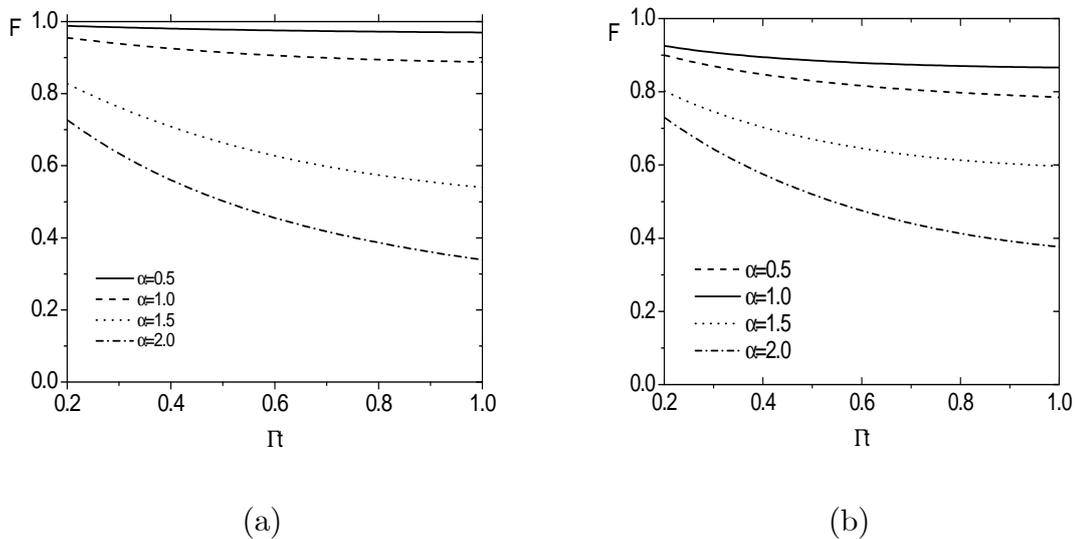


Figura 2.7: Fidelidade para o campo na SECC à temperatura nula com a) $\xi = 0.5$; b) $\xi = 1.0$

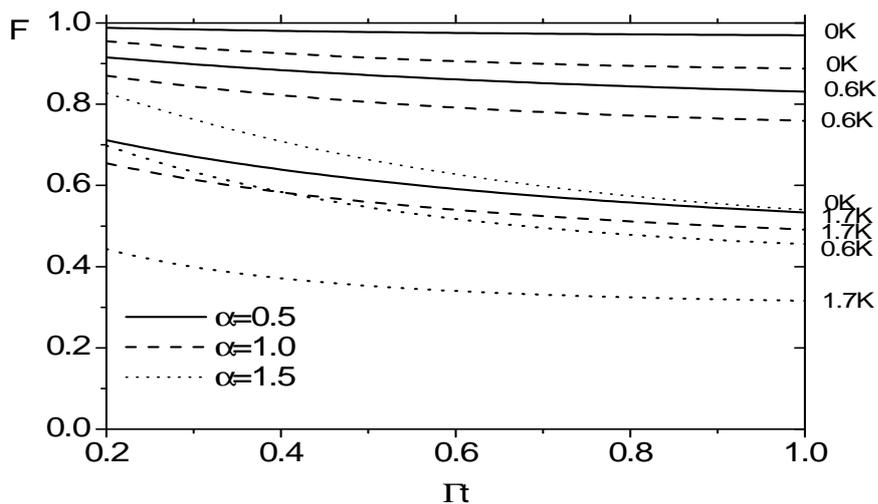


Figura 2.8: Fidelidade para campo na SECC com temperatura e $\xi = 0.5$, $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1.0$ (linha tracejada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada)

compressão $\xi = 0.5$ e $\xi = 1.0$ com temperatura nula na cavidade.

Interessante notar que na figura 2.7a em que o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$ a fidelidade do estado do campo preparado para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 0.5$ é maior que a fidelidade do estado quando o parâmetro de deslocamento for aumentado para $\alpha = 1.0$ que está de acordo com o resultado do estado do campo na SEC [53] e na Figura 2.7b é justamente o contrário, ou seja, a fidelidade do estado do campo quando fixado o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$ e o parâmetro de deslocamento for $\alpha = 0.5$ será menor que a fidelidade do campo e quando o parâmetro de deslocamento for aumentado para $\alpha = 1.0$. Isto se deve ao fato que o número médio de fótons do campo na SECC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 0.5$ é maior que o número médio de fótons do campo na SECC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$, uma vez que a sustentação da superposição de estados é sensível ao número médio fótons em reservatório dissipativo.

A Figura 2.8 mostra a fidelidade em função de Γt do campo preparado na SECC para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.0$ e $\alpha = 1.5$ fixando o parâmetro de $\xi = 0.5$ com o número médio de fótons térmico $\bar{n}_\omega = 0.0$, $\bar{n}_\omega = 0.2$ e $\bar{n}_\omega = 1.0$, que correspondem às temperatura de $0 K$, $0.6 K$ e $1.7 K$, respectivamente.

Em todos os gráficos, a fidelidade é mostrada desde o momento que o campo na SECC foi preparado ($\Gamma t = 0.2$), ou seja, após átomo passar pela cavidade e ser detectado [48]. As Figuras 2.7 e 2.8 mostram que a fidelidade do campo preparado tanto com temperatura não nula quanto à temperatura nula se mantém alta, próxima a 90 % para o intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \lesssim 1.0$ e $\xi \lesssim 1.0$ e nossas simulações mostram, como esperado, que a fidelidade decai mais rápida para temperaturas mais altas.

Capítulo 3

Teletransporte do campo na superposição de estados coerentes comprimidos

No mundo microscópico, copiar dados de um local para outro não é algo simples como no mundo macroscópico, pois a informação quântica não pode ser copiada, ela somente pode ser transferida de um local para outro, sem deixar qualquer traço na origem. Ou seja, na computação quântica, a única operação possível é a de mover os dados.

A manipulação e transferência de informação quântica é uma das áreas mais estudadas na pesquisa avançada para a computação do futuro. Como mencionamos, desde a descoberta do fenômeno de teletransporte [15] uma série de protocolos e algoritmos foram sugeridos com o objetivo de viabilizar a computação quântica.

Neste capítulo vamos propor um esquema, mostrado na Figura 3.1, do teletransporte do estado do campo na superposição de estados coerentes comprimidos [49] de uma cavidade para outra numa situação ideal, ou seja, sem temperatura e sem dissipação do campo para as paredes do reservatório que representam as cavidades e no final deste apresentaremos a fidelidade do estado teletransportado sob influência do reservatório. Este esquema é composto por dois átomos preparados inicialmente nos estados excitados $|e\rangle_1$ e $|e\rangle_2$, quatro zonas de Ramsey, três detectores de estados de átomos, um feixe de átomos com todos os átomos no estado fundamental e duas cavidades idênticas com alto fator de qualidade.

De posse do estado do campo na SECC preparado na cavidade 1, descrito no Capítulo 2,

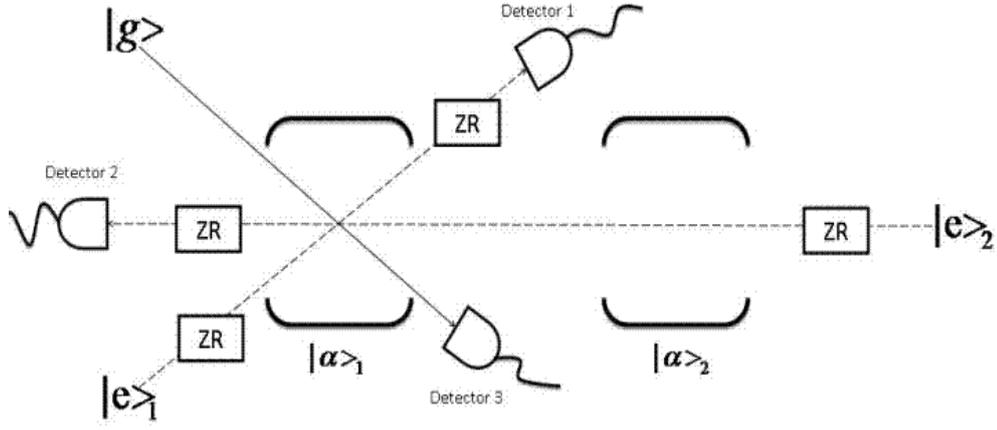


Figura 3.1: Esquema de teletransporte do campo na SECC de uma cavidade para outra cavidade de alto fator de qualidade.

pela Eq. (2.23), vamos preparar, identicamente, um campo no ECC na cavidade 2, dado por:

$$|\Psi\rangle_2 = |\xi, \alpha\rangle_2. \quad (3.1)$$

Com o campo preparado na cavidade 1 no estado $|\Psi\rangle_1$ dado pela Eq.(2.23) e o campo preparado na cavidade 2 no estado $|\Psi\rangle_2$, vamos passar um átomo 2, inicialmente preparado no estado excitado $|e\rangle_2$, por uma ZR, evoluindo de acordo com as Eqs.(2.5) e (2.6) com $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e depois interagindo dentro do campo da cavidade 2, numa interação dispersiva átomo-campo dada pela Eq. (2.21) teremos

$$U_{AC} \left(\frac{|e\rangle_2 + |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |\xi, \alpha\rangle_2 = \frac{|e\rangle_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + |g\rangle_2 |\xi, \alpha\rangle_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.2)$$

Depois que o átomo 2 atravessou a cavidade 2 teremos o estado do sistema dado por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= [c_2 |\xi, \alpha\rangle_1 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_1] \left[\frac{|e\rangle_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + |g\rangle_2 |\xi, \alpha\rangle_2}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{c_2}{\sqrt{2}} |\xi, \alpha\rangle_1 |\xi, -\alpha\rangle_2 |e\rangle_2 + \frac{c_1}{\sqrt{2}} |\xi, -\alpha\rangle_1 |\xi, -\alpha\rangle_2 |e\rangle_2 \\ &\quad + \frac{c_2}{\sqrt{2}} |\xi, \alpha\rangle_1 |\xi, \alpha\rangle_2 |g\rangle_2 + \frac{c_1}{\sqrt{2}} |\xi, -\alpha\rangle_1 |\xi, \alpha\rangle_2 |g\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os estados de Bell, que neste esquema são estados emaranhados entre o estado do campo preparado na cavidade 1 e o estado do átomo 2 formando uma base completa ortonormal de estados puros, podem ser escritos como:

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{|e\rangle_2 |\xi, \alpha\rangle_1 \pm |g\rangle_2 |\xi, -\alpha\rangle_1}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

e

$$|\Theta_{\pm}\rangle = \frac{|e\rangle_2 |\xi, -\alpha\rangle_1 \pm |g\rangle_2 |\xi, \alpha\rangle_1}{\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

Assim, o estado do sistema átomo-campo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2} [|\Phi+\rangle (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) + |\Phi-\rangle (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2)] \\ &+ [|\Theta+\rangle (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) + |\Theta-\rangle (c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Passando o átomo 2 na cavidade 1, conforme vista pela Eq. (2.21) numa interação dispersiva átomo-campo que mostra que

$$U_{AC} |e\rangle |\xi, \alpha\rangle \longrightarrow |\xi, -\alpha\rangle |e\rangle \text{ e } U_{AC} |g\rangle |\xi, \alpha\rangle \longrightarrow |g\rangle |\xi, \alpha\rangle,$$

o estado do sistema fica dada por:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|e\rangle_2 + |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |\xi, -\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \right. \\ &+ \left(\frac{|e\rangle_2 - |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |\xi, -\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \\ &+ \left(\frac{|e\rangle_2 + |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |\xi, \alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) \\ &\left. + \left(\frac{|e\rangle_2 - |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |\xi, \alpha\rangle_1 (c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para medir o campo na cavidade 1, primeiramente aplicamos uma descompressão, $S^{-1}(\xi) = S(-\xi)$ no estado do campo da cavidade 1 e o estado do sistema passa a ser

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) |-\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \right. \\ &+ \left(\frac{|e\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) |-\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \\ &+ \left(\frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) |\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) \\ &\left. + \left(\frac{|e\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) |\alpha\rangle_1 (c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Depois aplicamos a operação de deslocamento $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$ no estado do campo da

cavidade 1 temos o estado do sistema

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|e\rangle_2 + |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |-2\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \right. \\
& + \left(\frac{|e\rangle_2 - |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |-2\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \\
& + \left(\frac{|e\rangle_2 + |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle_1 (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) \\
& \left. + \left(\frac{|e\rangle_2 - |g\rangle_2}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle_1 (c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2) \right]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

O estado do sistema acima mostra que o campo na cavidade 1 está no estado de vácuo $|0\rangle_1$ ou num estado diferente do vácuo $|-2\alpha\rangle_1$. Se passarmos um feixe de átomos no estado fundamental pela cavidade 1 e se pelo menos um átomo for detectado no estado excitado após a passagem, o campo na cavidade 1 estará no estado diferente do vácuo, mas se todos os átomos forem detectados no estado fundamental, com certeza o campo na cavidade 1 estará no estado de vácuo $|0\rangle_1$. Após a interação do átomo 2 com a cavidade 1, o átomo 2 passa por uma última ZR, evoluindo de acordo com as Eqs. (2.5) e (2.6) com $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o estado do sistema passa a ser

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle = & \frac{1}{2} [|g\rangle_2 |-2\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) + |e\rangle_2 |-2\alpha\rangle_1 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) \\
& + |g\rangle_2 |0\rangle_1 (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) + |e\rangle_2 |0\rangle_1 (c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2)]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Com a medida do feixe dos átomos que passou pela cavidade 1, sabemos com certeza que o campo na cavidade 1 ou está num estado diferente do vácuo $|-2\alpha\rangle_1$, ou no estado de vácuo $|0\rangle_1$. Então o estado do sistema estará ou em

$$|\Psi\rangle = |g\rangle_2 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2) + |e\rangle_2 (c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2), \quad (3.11)$$

se a medida resultar em $|-2\alpha\rangle_1$ ou em

$$|\Psi\rangle = |g\rangle_2 (c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2) + |e\rangle_2 (c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2), \quad (3.12)$$

se a medida resultar em $|0\rangle_1$.

Por fim, se depois que o átomo 2 passar pela última ZR, fizermos uma medida no estado do átomo 2, saberemos com certeza qual estado será do campo na cavidade 2. Por exemplo, se o campo na cavidade 1 estiver no estado de vácuo $|0\rangle_1$ (todos os átomos do feixe forem detectados

no estado fundamental) e o átomo 2 for detectado no estado fundamental $|g\rangle_2$ depois de passar pela última ZR, teremos o estado do campo na cavidade 2 dada por:

$$|\Psi\rangle_2 = c_2 |\xi, \alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, -\alpha\rangle_2 \quad (3.13)$$

que é o mesmo estado inicialmente preparado na cavidade 1, dado pela Eq. (2.23). Entretanto, se o campo na cavidade 1 estiver no estado de vácuo $|0\rangle_1$ e o átomo 2 for detectado no estado excitado $|e\rangle_2$ depois de passar pela última ZR, teremos o estado do campo na cavidade 2 dada por:

$$|\Psi\rangle_2 = c_1 |\xi, \alpha\rangle_2 - c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2, \quad (3.14)$$

veja que a diferença deste estado com o estado inicialmente preparado na SECC na cavidade 1, veja Eq. (2.22), é na fase relativa e na fase do campo.

Outra possibilidade é a medida do campo na cavidade 1 resultar em $|-2\alpha\rangle_1$ (pelo menos um átomo do feixe for detectado no estado excitado) e o átomo 2 for detectado no estado fundamental $|g\rangle_2$ depois de passar pela última ZR. Nesse caso teremos o estado do campo na cavidade 2 dada por:

$$|\Psi\rangle_2 = c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 + c_1 |\xi, \alpha\rangle_2. \quad (3.15)$$

E por fim, se o campo na cavidade 1 resultar em $|-2\alpha\rangle_1$ e o átomo 2 for detectado no estado excitado $|e\rangle_2$ depois de passar pela última ZR, teremos o estado do campo na cavidade 2 dada por:

$$|\Psi\rangle_2 = c_2 |\xi, -\alpha\rangle_2 - c_1 |\xi, \alpha\rangle_2. \quad (3.16)$$

No caso do campo na cavidade 1 resultar em $|-2\alpha\rangle_1$ e o átomo 2 for detectado no estado fundamental $|g\rangle_2$, poderemos fazer uma mudança na fase do estado do campo na cavidade 2, dada pela Eq. (3.15), para obtermos o estado do campo na SECC idêntico ao estado inicialmente preparado na cavidade 1. Para isto, vamos recorrer a um átomo auxiliar preparado no estado excitado $|e\rangle$ interagindo com campo na cavidade 2 de acordo com a interação átomo-campo dada pela Eq. (2.19), com $\Phi = \pi$:

$$\exp(-\Phi ia^\dagger a) |e\rangle |\xi, \alpha\rangle = \exp(-\Phi ia^\dagger a) |e\rangle S(\xi) |\alpha\rangle = |\xi, -\alpha\rangle |e\rangle, \quad (3.17)$$

com esta interação do átomo auxiliar com o campo na cavidade 2 mudando a fase do campo, teremos o estado do campo na cavidade 2 idêntico ao estado do campo inicialmente preparado na cavidade 1, portanto fizemos um teletransporte do campo preparado na SECC na cavidade 1 para a cavidade 2 numa situação ideal, ou seja, sem dissipação de energia dos estados dos campos para as paredes das cavidades.

Para calcular a fidelidade do campo teletransportado incluindo as perdas durante a sua engenharia, de acordo com a Eq. (2.60), que mede o quanto o estado teletransportado se afasta do estado preparado, nós devemos resolver

$$\mathbf{F} = \pi \int d^2\gamma W(\gamma, t) W(\gamma, t_1). \quad (3.18)$$

onde t_1 é o tempo de preparação do campo na SECC para ser teletransportado e t é o tempo depois disso, ou seja, $t_1 \leq t \leq \infty$. Note que um tempo t_2 é gasto no processo de teletransporte, rigorosamente falando o estado teletransportado existe somente após $t > t_2$. A função de Wigner $W(\gamma, t_1)$ conforme a Eq. (2.58) será dada por

$$W(\gamma, t_1) = \frac{N^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle}{\sqrt{K_2^2 - L_B L_B^*}} \times \exp \left\{ -\frac{K_2 R_{jk} R_{kj}^* + \frac{1}{2} (L R_{kj}^{*2} + L^* R_{jk}^2)}{K_2^2 - L_B L_B^*} \right\}, \quad (3.19)$$

sendo que $K_2 = |w(t_1)\nu|^2 + \epsilon + \frac{1}{2}$, $L_B = w^2(t_1)\mu\nu$, $R_{jk} = w(t_1)(\mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*) - \gamma$.

Substituindo a Eq. (2.58) e a Eq. (3.19) na Eq. (3.18) e usando a identidade dada pela Eq. (2.52) teremos a fidelidade do campo teletransportado na SECC dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= N^4 \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{\sqrt{D D_A D_2}} \\ &\times \exp \left(-\frac{2K |w|^2 B_{jk} B_{kj}^* + L w^{*2} B_{kj}^{*2} + L^* w^2 B_{jk}^2}{2D} \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{-K_2 |w_1|^2 B_{rs} B_{sr}^* - L_B w_1^{*2} B_{sr}^{*2} - L_B^* w_1^2 B_{rs}^2}{2D_2} \right) \\ &\times \exp \left\{ \frac{K_A (N_{jk} + N_{rs}) (Q_{jk} + Q_{rs}) - \frac{1}{2} [L_A (Q_{jk} + Q_{rs})^2 + L_A^* (N_{jk} + N_{rs})^2]}{2D_A} \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

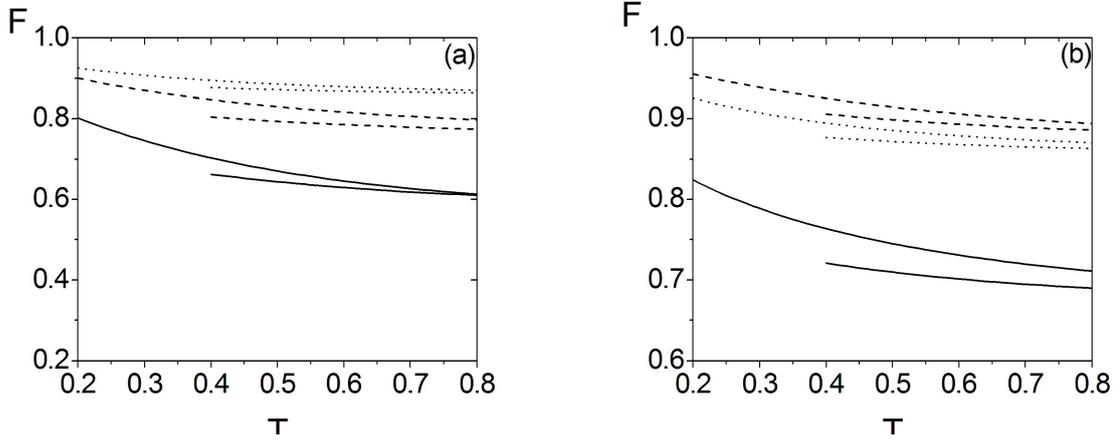


Figura 3.2: Fidelidade do campo preparado na SECC e teletransportado com a) $\xi = 1.0$ e $\alpha = 0.5$ (tracejada), $\alpha = 1.0$ (pontilhada), $\alpha = 1.5$ (sólida); b) $\alpha = 1.0$ e $\xi = 0.5$ (tracejada), $\xi = 1.0$ (pontilhada), $\xi = 1.5$ (sólida)

onde omitimos a dependência do tempo para abreviar, fazendo $w_1(t_1) = w_1$, $D_A = K_A^2 - L_A L_A^*$, $D_2 = K_2^2 - L_B L_B^*$ com $K_A = \frac{K}{D} + \frac{k_2}{D_2}$, $L_A = \frac{L}{D} + \frac{L_B}{D_2}$, $N_{jk} + N_{rs} = \frac{Kw}{D} B_{jk} + \frac{Lw^*}{D} B_{kj}^* + \frac{K_2 w_1^*}{D_2} B_{rs} + \frac{L_2 w_1}{D_2} B_{sr}^*$, e $Q_{jk} + Q_{rs} = \frac{L^* w}{D} B_{jk} + \frac{K w^*}{D} B_{kj}^* + \frac{L_2^* w_1}{D_2} B_{rs} + \frac{K_2 w_1^*}{D_2} B_{sr}^*$.

Na Figura 3.2a temos o gráfico da fidelidade em função de $T = \Gamma t$, do campo teletransportado comparando com o campo preparado na SECC, onde fixamos o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$ com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.0$ e $\alpha = 1.5$; na Figura 3.2b fixamos parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ com o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$, $\xi = 1.0$ e $\xi = 1.5$. A fidelidade é mostrada desde o momento que o campo na SECC foi preparado a partir de um tempo tal que $\Gamma t = 0.2$ e a partir do tempo t_2 tal que $\Gamma t = 0.4$, em que o campo é teletransportado, temos a fidelidade do campo na SECC teletransportado.

Notamos que a fidelidade do estado teletransportado está em torno de 90 % quando o parâmetro de deslocamento for de $\alpha \simeq 1.0$ com o parâmetro de compressão no intervalo de $\xi \lesssim 1.0$ visto nas Figuras 3.2a e b, mas terá uma fidelidade próxima a 80 % com o parâmetro de deslocamento $\alpha \simeq 0.5$ com parâmetro de compressão $\xi \simeq 1.0$ mostrado na Figura 3.2a.

Capítulo 4

Propriedades estatísticas dinâmicas

Neste capítulo iremos investigar as propriedades estatísticas do novo estado do campo eletromagnético que propomos e chamamos de SECC a fim de caracterizá-lo. Verificaremos o efeito do reservatório na variância das quadraturas, bem como a evolução do número médio de fótons e assim caracterizar em que estatística o estado preparado na cavidade pertence por meio do parâmetro Q de Mandel.

Mostraremos resultados analíticos e numéricos sem perda de energia e com perda de energia para o meio ambiente da inversão atômica para alguns parâmetros realistas [36]. Também estudaremos a evolução da superposição de estados sob a influência de um reservatório à temperatura 0 K e com temperaturas não nulas com o objetivo de saber como o seu grau de pureza são perdidos com a evolução temporal através da entropia linear. Superposições estudadas aqui são compostas por estados coerentes, estados coerentes comprimidos, estados coerentes ortogonais e estados coerentes comprimidos ortogonais [34] que introduzimos generalizando os estados coerentes ortogonais [35]. Para comparação, mostraremos como a robustez das superposições estudadas aqui é diferente de um qubit dado por uma superposição do estado com zero fóton $|0\rangle$ com o estado de um fóton $|1\rangle$.

4.1 Propriedades estatísticas

Nesta Seção apresentaremos uma revisão de algumas propriedades estatísticas necessárias para entender alguns efeitos óticos não clássicos.

As quadraturas X_1 e X_2 do campo eletromagnético são definidas em termos dos operadores

de criação e aniquilação de fótons a e a^\dagger , como

$$X_1 = \frac{1}{2} (a + a^\dagger) \quad (4.1)$$

e

$$X_2 = \frac{1}{2i} (a - a^\dagger) \quad (4.2)$$

que satisfazem a relação de comutação

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}. \quad (4.3)$$

A variância das quadraturas é definida como

$$(\Delta X_j)^2 = \langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2 \quad \text{com } j = 1, 2 \quad (4.4)$$

e de acordo com a relação de comutação

$$(\Delta X_1) (\Delta X_2) \geq \frac{1}{4}, \quad (4.5)$$

sendo assim, o menor valor permitido para o produto das incertezas é $1/4$. A compressão ocorrerá quando $(\Delta X_j)^2$ for menor que $1/4$. Por conveniência, define-se o parâmetro

$$q_j = \frac{(\Delta X_j)^2 - 0,25}{0,25}, \quad (4.6)$$

e neste caso, compressão ocorrerá quando $-1 \leq q_j < 0$.

A estatística de fótons de um estado pode ser obtida pelo parâmetro Q de Mandel. Consideremos que $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ dá a flutuação (ruído) no número de fótons. Na luz comum (térmica ou caótica) obtém-se $(\Delta n)^2 > \langle n \rangle$. Como a luz coerente obedece a uma estatística de Poisson $\left[P(n) = \rho_{n,n} = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \right]$ diz-se então que a luz comum é super-Poissoniana.

Certos feixes liminosos apresentam estatísticas sub-Poissoniana: $(\Delta n)^2 < \langle n \rangle$. Este tipo de efeito implica que certa função de probabilidade $P(\alpha)$ devia assumir valores negativos. A $P(\alpha)$ é a função que aparece na representação ρ , na base coerente dado por $\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$, logo é um efeito ótico não-clássico.

O parâmetro Q de Mandel é definido em termos da variância do número de fótons e do número médio de fótons por:

$$Q \equiv \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (4.7)$$

sendo a variância $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$, e o parâmetro Q de Mandel ficará

$$Q \equiv \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}. \quad (4.8)$$

Utilizando esta definição, temos a seguinte classificação para a estatística de fótons:

$$Q = 0 \implies \text{estatística Poissoniana}$$

$$Q > 0 \implies \text{estatística super-Poissoniana}$$

$$Q < 0 \implies \text{estatística sub-Poissoniana.}$$

Ou seja, o parâmetro Q de Mandel caracteriza a ocorrência de uma das estatísticas. Lembrando que o estado de número tem $(\Delta n)^2 = 0$, logo o parâmetro $Q = -1$ é o mais sub-Poissoniano possível, pois tem o número de fótons bem definido. No estado coerente temos que o número médio de fótons e a variância no número de fótons são iguais, $\langle n \rangle = (\Delta n)^2 = |\alpha|^2$, logo o parâmetro $Q = 0$ e o estado coerente pertence a estatística Poissoniana.

4.2 Evolução temporal das propriedades estatísticas

Numa situação real o estado evoluído modifica-se sob influência do reservatório, e por consequência suas propriedades estatísticas também sofrem alterações. Verificaremos, então, a evolução de algumas propriedades estatísticas do campo na SECC preparado na cavidade, como o número médio de fótons, a estatística de fótons dado pelo parâmetro Q de Mandel e a compressão nas quadraturas .

4.2.1 Número médio de fótons

De acordo com a Eq. (B8) no apêndice B, a função característica é dada por:

$$C(\eta, \eta^*, t) = Tr \left\{ \rho_{AR}(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\} = Tr \left\{ \rho_{AR}(0) e^{\eta a^\dagger(t)} e^{-\eta^* a(t)} \right\}, \quad (4.9)$$

veja que

$$\left(\frac{\partial C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \langle a^\dagger(t) \rangle, \quad (4.10)$$

$$\left(-\frac{\partial C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^*} \right)_{\eta=0} = \langle a(t) \rangle, \quad (4.11)$$

$$\left(-\frac{\partial^2 C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^* \partial \eta} \right)_{\eta=0} = \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle = \langle n(t) \rangle \text{ e} \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial^4 C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta \partial \eta^* \partial \eta \partial \eta^*} \right)_{\eta=0} = \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2, \quad (4.13)$$

nesta última usamos que $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$. De acordo com a Eq. (2.49) a função característica do campo na SECC preparado dentro em uma cavidade com dissipação e temperatura é dada por:

$$\begin{aligned} C(\eta, \eta^*, t) &= \sum_{j,k=1}^2 N^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 w^*(t)^2 \mu^* \nu^* - \frac{1}{2} \eta^{*2} w(t)^2 \mu \nu \right) \\ &\quad \times \exp [\eta w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \eta^* w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)] \\ &\quad \times \exp [-|\eta|^2 (|w(t)\nu|^2 + \epsilon)], \end{aligned} \quad (4.14)$$

então, a evolução do número médio de fótons do campo na SECC de acordo com as Eqs. (4.12) e (4.14) será

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \left(-\frac{\partial^2 C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^* \partial \eta} \right)_{\eta=0} \\ &= N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle [|w(t)|^2 (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) + (|w(t)\nu|^2 + \epsilon)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

no caso particular, sem dissipação ($\Gamma t = 0$), temos $|w(t)|^2 = 1$ e à temperatura nula ($\epsilon = 0$), para o campo na SECC com o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = -\alpha$ teremos o mesmo resultado do número médio de fótons encontrado na literatura [6] dado por:

$$\begin{aligned} \langle n(0) \rangle &= N^2 (\langle \xi, \alpha | + \langle -\alpha, \xi |) a^\dagger a (| \xi, \alpha \rangle + | \xi, -\alpha \rangle) \\ &= N^2 \{ [|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r) - \alpha^{*2} e^{i\theta} \sinh r \cosh r - \alpha^2 e^{-i\theta} \sinh r \cosh r + \sinh^2 r] \\ &\quad + [|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r) - \alpha^{*2} e^{i\theta} \sinh r \cosh r - \alpha^2 e^{-i\theta} \sinh r \cosh r + \sinh^2 r] \\ &\quad + 2e^{-2|\alpha|^2} [-|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r) - \alpha^{*2} e^{i\theta} \sinh r \cosh r \\ &\quad - \alpha^2 e^{-i\theta} \sinh r \cosh r + \sinh^2 r] \}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

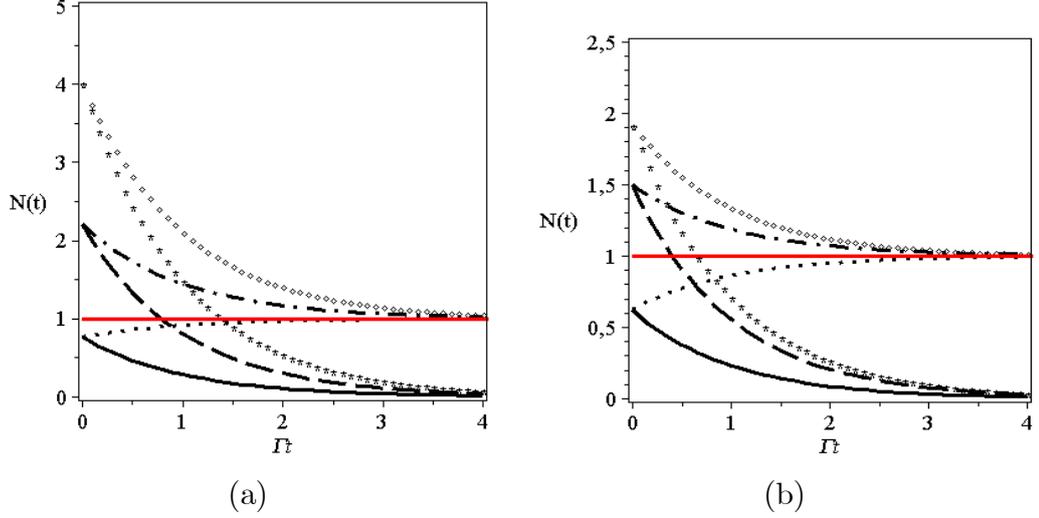


Figura 4.1: Evolução do número médio de fótons com $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\alpha = 1.0$ (sólida), $\alpha=1.5$ (tracejada), $\alpha = 2.0$ (asterístico) com $\bar{n}_\omega = 1.0$ e $\alpha = 1.0$ (pontilhada), $\alpha = 1.5$ (tracejada e pontilhada), $\alpha = 2.0$ (quadrada); a) para o campo na SEC $\xi = 0.0$ e b) para o campo na SECC $\xi = 1.0$

e note que, sem dissipação ($\Gamma t = 0$) temos $|w(t)|^2 = 1$ à temperatura nula ($\epsilon = 0$), para o campo na SEC, isto é, com o parâmetro de compressão $\xi = 0$, teremos o mesmo resultado do número médio de fótons tanto na Eq. (4.16) quanto na Eq. (4.15) dada por:

$$\begin{aligned} \langle n(0) \rangle &= \frac{|\alpha|^2 (2 - 2e^{-2|\alpha|^2})}{(2 + 2e^{-2|\alpha|^2})} \\ &= |\alpha|^2 \tanh(|\alpha|^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se fizermos o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, e a constante de normalização $N = 1$, sem dissipação e à temperatura $0 K$, teremos o número médio de fótons do campo no ECC tanto na Eq. (4.16) quanto na Eq. (4.15) [6].

Na Figura 4.1a apresentamos a evolução do número médio de fótons em função de Γt do campo na SEC com temperatura ($\bar{n}_\omega = 0.0$) e com temperatura ($\bar{n}_\omega = 1.0$), variando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1$; $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 2.0$. Na Figura 4.1b apresentamos a evolução do número médio de fótons em função de Γt do campo na SECC à temperatura nula ($\bar{n}_\omega = 0.0$) e com temperatura não nula ($\bar{n}_\omega = 1.0$), variando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1$; $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 2.0$, todos com o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$. Para comparação mostramos a linha sólida vermelha representando o número médio de fótons térmicos $\bar{n}_\omega = 1.0$

E, como esperado tanto para o campo na SEC quanto para o campo na SECC, com tem-

peratura nula o estado perde excitação para as paredes do reservatório com o passar do tempo e o estado dentro da cavidade vai para o estado de vácuo e com temperatura não nula o estado entra em equilíbrio com o estado térmico existente dentro da cavidade.

4.2.2 Parâmetro Q de Mandel

Para classificar a estatística de fótons do estado campo evoluído preparado na cavidade na SECC levando em conta a dissipação e a temperatura, com dependência temporal no parâmetro Q de Mandel.

Então, o parâmetro Q de Mandel em função do tempo, de acordo com a definição dada pela Eq. (4.7), será

$$Q(t) \equiv \frac{\Delta n^2(t) - \langle n(t) \rangle}{\langle n(t) \rangle}, \quad (4.18)$$

onde $\Delta n^2(t) = \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2$, então

$$Q(t) \equiv \frac{\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2}{\langle n(t) \rangle}, \quad (4.19)$$

da Eq. (4.13) e da função característica do estado do campo preparado na cavidade dada pela Eq. (4.14) temos que:

$$\begin{aligned} \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle &= \left(\frac{\partial^4 C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta \partial \eta^* \partial \eta \partial \eta^*} \right)_{\eta=0} \\ &= N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle \left[|w^2(t) \mu \nu|^2 - |w(t)|^4 \mu^* \nu^* (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)^2 \right. \\ &\quad - |w(t)|^4 \mu \nu (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j)^2 + |w(t)|^4 (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)^2 (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j)^2 \\ &\quad + 4 |w(t)|^2 (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) (|w(t) \nu|^2 + \epsilon) \\ &\quad \left. + 2 (|w(t) \nu|^2 + \epsilon)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

e a evolução do número médio de fótons é encontrado na Eq. (4.15).

Para ter idéia dos valores numéricos do parâmetro de deslocamento α e do parâmetro de compressão ξ que caracteriza a estatística de fótons, apresentamos na Figura 4.2 o parâmetro Q de Mandel em função do parâmetro de deslocamento α e do parâmetro de compressão ξ sem dissipação ($\Gamma t = 0$) e com temperatura nula ($\epsilon = 0$).

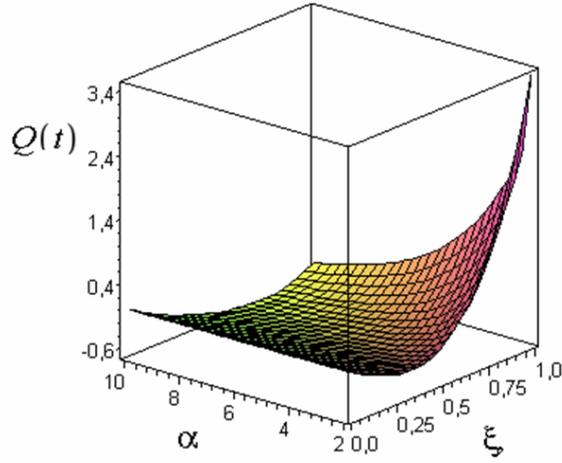


Figura 4.2: Parâmetro Q de Mandel em função de α e ξ para o campo na SECC.

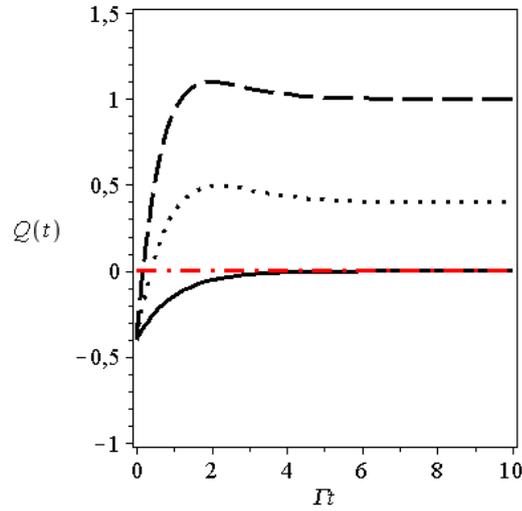


Figura 4.3: Fixando $\alpha = 2.5$ e $\xi = 0.5$ para o campo na SECC sendo $\bar{n}_\omega = 0.0$ (sólida), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (pontilhada) e $\bar{n}_\omega = 1.0$ (tracejada) para parâmetro $Q(t)$ de Mandel.

Verificamos, então, que o estado do campo preparado na cavidade é caracterizado na estatística de fótons sub-Poissoniana ($Q < 0$) no intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \gtrsim 2.0$ e no intervalo do parâmetro de compressão de $0.25 \lesssim \xi \lesssim 0.75$ em condições ideais.

Como exemplo, temos na Figuras 4.3 a evolução do parâmetro $Q(t)$ de Mandel em função de Γt do campo na SECC preparado na cavidade para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.5$ e o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$ à temperatura $0 K$ e à temperatura não nula.

Para comparação mostramos a estatística de fótons Poissoniana ($Q(t) = 0$) na Figura 4.3 em linha de traço e ponto.

Nota-se na Figura 4.3, com um tempo muito grande, o campo na SECC preparado na

cavidade, com temperatura nula ($\bar{n}_\omega = 0.0$), com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.5$ e de compressão $\xi = 0.5$, o estado se apresenta na estatística sub-Poissoniana em todo o seu tempo de vida dentro da cavidade, com o número de fótons térmico em torno de $\bar{n}_\omega = 0.4$, que equivale a uma temperatura de aproximadamente $0.9 K$, o campo na SECC ainda se apresenta na estatística sub-Poissoniana em um intervalo de tempo satisfatório, ou seja, até um instante tal que $\Gamma t \simeq 0.5$.

4.2.3 Compressão das quadraturas

Para completar o nosso propósito, verificaremos o efeito de compressão das quadraturas em função do tempo, do campo evoluído inicialmente preparado na cavidade na SECC, conforme a Eq. (4.6), pelo parâmetro

$$q_j(t) = \frac{(\Delta X_j(t))^2 - 0,25}{0,25}, \quad \text{com } j = 1, 2 \quad (4.21)$$

cuja variância na quadratura ΔX_1 é

$$\begin{aligned} (\Delta X_1(t))^2 &= \langle X_1^2(t) \rangle - \langle X_1(t) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle (a(t) + a^\dagger(t))^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle (a(t) + a^\dagger(t)) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} [\langle a^2(t) \rangle + 1 + 2 \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle + \langle a^{\dagger 2}(t) \rangle \\ &\quad - \langle (a(t) + a^\dagger(t)) \rangle^2] \end{aligned} \quad (4.22)$$

e a variância da quadratura ΔX_2 é

$$\begin{aligned} (\Delta X_2(t))^2 &= \langle X_2^2(t) \rangle - \langle X_2(t) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle (a(t) - a^\dagger(t))^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle (a(t) - a^\dagger(t)) \rangle^2 \\ &= -\frac{1}{4} [\langle a^2(t) \rangle - 1 - 2 \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle + \langle a^{\dagger 2}(t) \rangle \\ &\quad - \langle (a(t) - a^\dagger(t)) \rangle^2] \end{aligned} \quad (4.23)$$

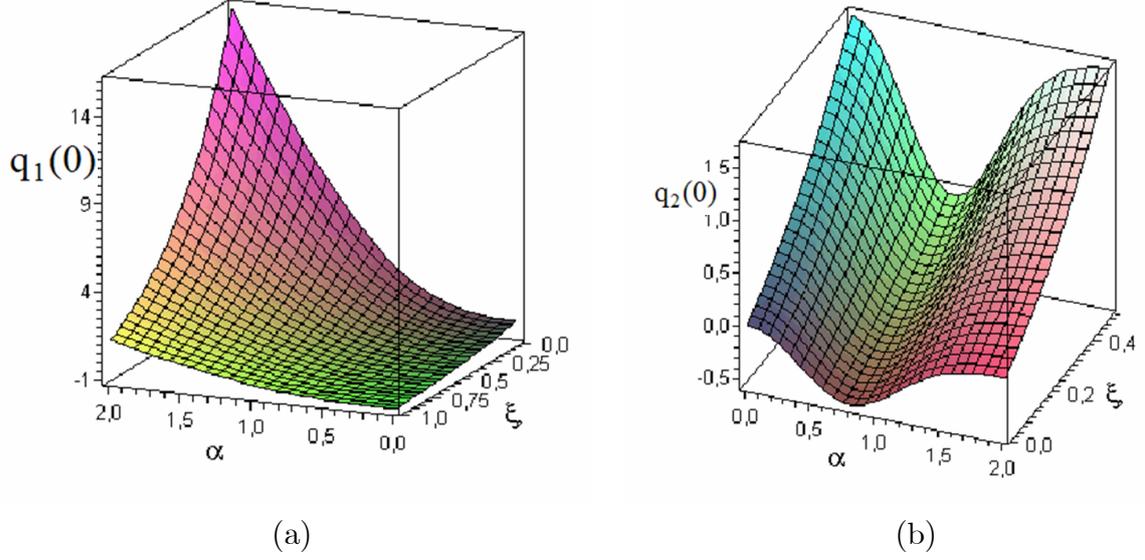


Figura 4.4: Parâmetro de compressão nas quadraturas $q_j(t)$ em função de α e ξ do campo na SECC para: a) quadratura X_1 e b) quadratura X_2 .

sendo que os valores médios de

$$\langle a(t) \rangle = N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*), \quad (4.24)$$

$$\langle a^\dagger(t) \rangle = N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j), \quad (4.25)$$

$$\langle a^2(t) \rangle = N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle [w^2(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*)^2 - w^2(t) \mu \nu] e \quad (4.26)$$

$$\langle a^{\dagger 2}(t) \rangle = N^2 \sum_{j,k=1}^2 \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle [w^{*2}(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j)^2 - w^{*2}(t) \mu^* \nu^*], \quad (4.27)$$

previamente calculados usando a função característica do estado preparado na cavidade conforme a Eq. (4.14) dado por: $\langle a^j(t) \rangle = \left[(-1)^j \frac{\partial^j C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^{*j}} \right]_{\eta=0}$ e $\langle a^{\dagger j}(t) \rangle = \left(\frac{\partial^j C(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^j} \right)_{\eta=0}$, com $j = 1, 2$ e a evolução do valor médio do número de fótons $\langle a^\dagger(t) a(t) \rangle = \langle n(t) \rangle$ de acordo com a Eq. (4.12) mostrado na Eq. (4.15).

Para verificar para quais valores dos parâmetros de deslocamento α e de compressão ξ do estado preparado na cavidade ocorre o efeito de compressão em uma das quadraturas do campo preparado na cavidade, apresentamos nas Figuras 4.4a e 4.4b o parâmetro q_j ($j = 1, 2$) em função parâmetros de deslocamento α e de compressão ξ na condição ideal, ou seja, sem dissipação e temperatura nula.

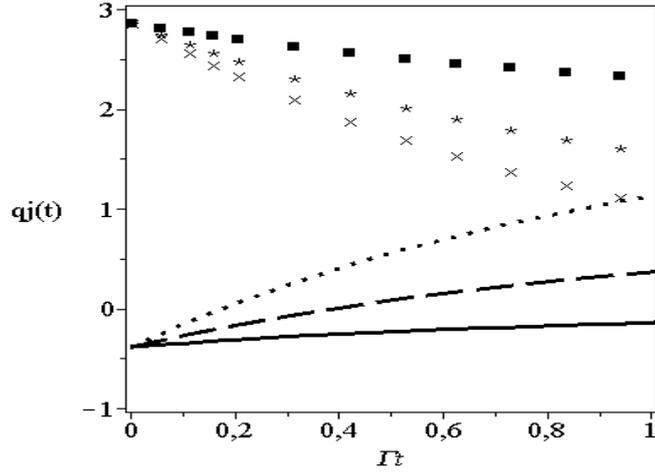


Figura 4.5: Compressão nas quadraturas do campo na SECC com $\alpha = 1.0$ e $\xi = 1.0$ para X_1 com $\bar{n}_\omega = 0.0$ (sólida), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (tracejada), $\bar{n}_\omega = 1.0$ (pontilhada) e para X_2 com $\bar{n}_\omega = 1.0$ (quadrado), $\bar{n}_\omega = 0.4$ (asterístico), $\bar{n}_\omega = 0.0$ (cruz).

E, verificamos na Figura 4.4a que há compressão na quadratura X_1 do campo preparado na cavidade para o parâmetro de deslocamento $\alpha \lesssim 1.0$ com o parâmetro de compressão $0.5 \lesssim \xi \lesssim 1.0$ e na Figura 4.4b que há compressão na quadratura X_2 do campo para o parâmetro de deslocamento $0.5 \lesssim \alpha \lesssim 1.2$ com o parâmetro de compressão pequeno em torno de $\xi \lesssim 0.2$.

Como exemplo, temos na Figura 4.5 através do parâmetro $q_j(t)$ ($j = 1, 2$) a evolução da compressão nas quadraturas em função de Γt do campo na SECC preparado na cavidade, fixando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e de compressão $\xi = 1.0$, pertencente aos intervalos mencionados na Figura 4.4a.

E visto claramente, na Figura 4.5 na presença o efeito de compressão na quadratura X_1 do campo na SECC preparado na cavidade, em todo o tempo de vida do estado na cavidade à temperatura nula, ou seja, não havendo nenhum fóton térmico dentro da cavidade. Mas, ainda com um número médio de fótons térmico de $\bar{n}_\omega = 0.4$ em um tempo satisfatório de vida do estado preparado na cavidade, o efeito de compressão na quadratura do campo X_1 se manifesta. E, com o passar do tempo este efeito se reduz ocorrendo o aumento das flutuações quânticas na componente da quadratura do campo X_1 , e como previsto, as flutuações da quadratura conjugada do campo X_2 são diminuída.

A relação de incerteza com dependência temporal é dada por:

$$(\Delta X_1(t)) (\Delta X_2(t)) \geq \frac{1}{4}, \quad (4.28)$$

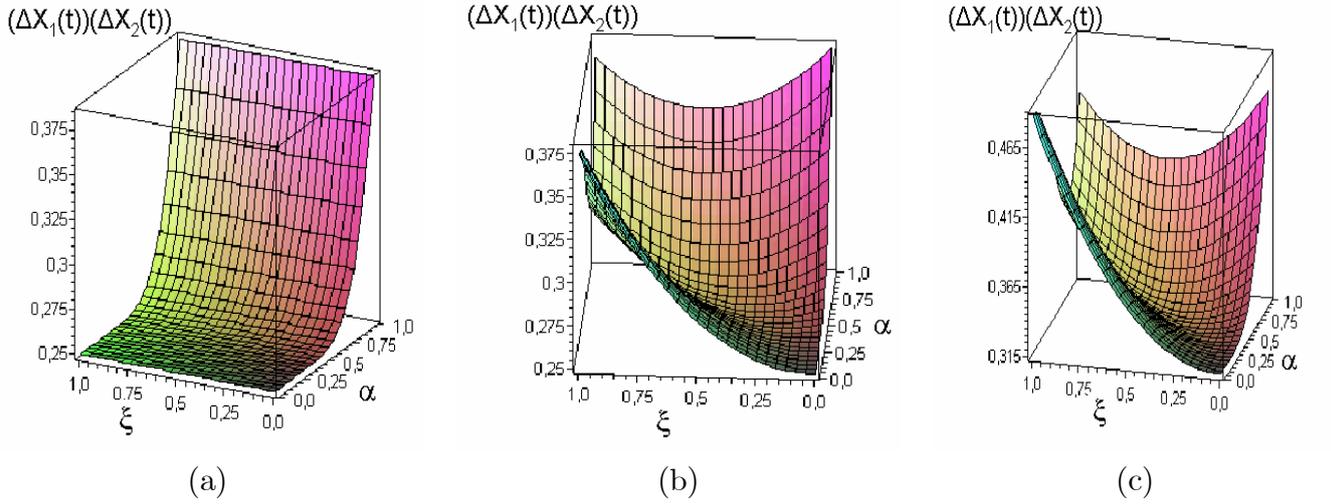


Figura 4.6: Evolução da relação de incerteza em função α e ξ do campo na SECC: a) $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\Gamma t = 0.0$; b) $\bar{n}_\omega = 0.0$ e $\Gamma t = 0.4$; c) $\bar{n}_\omega = 0.4$ e $\Gamma t = 0.4$

sendo sempre válida visto na evolução da relação de incerteza em função parâmetros de deslocamento α e de compressão ξ do campo na SECC preparado na cavidade sem dissipação ($\Gamma t = 0$) e com temperatura nula ($\bar{n}_\omega = 0.0$) na Figura 4.6a, do campo na SECC evoluído (com dissipação tal que $\Gamma t = 0.4$) e temperatura nula ($\bar{n}_\omega = 0.0$) na Figura 4.6b e na Figura 4.6c do campo na SECC evoluído (com dissipação tal que $\Gamma t = 0.4$) e com temperatura não nula ($\bar{n}_\omega = 0.4$).

Verifica-se, como esperado, que a relação de incerteza sempre terá um valor mínimo igual a 0.25, visto nas Figuras 4.6a, 4.6b e 4.6c, para diversos parâmetro de deslocamento α e de compressão ξ do estado preparado na cavidade com dissipação e sem dissipação, com temperatura nula e com temperatura não nula.

4.3 Inversão atômica

Inversão atômica é definida como a diferença entre a probabilidade de se encontrar o átomo no estado excitado (Pe) e a probabilidade dele estar no estado fundamental (Pg) [6]. As características dinâmicas da inversão atômica, como veremos, ficam determinadas pela distribuição do número de fótons do campo. Quando a distribuição do número de fótons alcança grandes valores e os termos evoluem com frequência que interferem entre si, ocorre o colapso, que é um efeito quântico. Existirá instantes em que alguns termos da distribuição de fótons podem evoluir em fase ocorrendo o ressurgimento. Nesta seção daremos, para efeito de comparação,

os resultados analíticos e numéricos da inversão atômica para o campo no ECC e para o campo na SECC com perda e sem perda de energia para o meio ambiente, usando a interação do átomo-campo no modelo de Jaynes-Cummings [1].

4.3.1 Inversão atômica para o campo preparado no estado coerente comprimido e preparado na superposição de estados coerentes comprimidos sem perda

Considerando o campo no estado coerente comprimido $|\Psi\rangle = |\xi, \alpha\rangle$ dentro da cavidade 1, o operador densidade que representa o campo é $\rho = |\xi, \alpha\rangle \langle \alpha, \xi|$. Na representação de interação ressonante, o hamiltoniano que descreve a interação de um átomo com o campo no modelo Jaynes-Cummings (J-C) [1, 50] é dado por:

$$H_{jc} = \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (4.29)$$

sendo σ_+ e σ_- os operadores de Pauli, dados por:

$$\sigma_+ = |e\rangle \langle g| \text{ e } \sigma_- = |g\rangle \langle e|, \quad (4.30)$$

g é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo, e o operador de evolução é dado por $U_{jc} = e^{-iH_{jc}t}$.

A probabilidade Pe de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$, preparado inicialmente no estado inicial $|e\rangle$, após interagir via J-C com o campo sem perdas, é dada por:

$$\begin{aligned} Pe &= \text{Tr} |e\rangle \langle e| U_{jc} \rho U_{jc}^\dagger \\ &= \text{Tr} |e\rangle \langle e| U_{jc} |\xi, \alpha\rangle \langle \alpha, \xi| U_{jc}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.31)$$

escrevendo o estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$ na base de Fock, então

$$\begin{aligned} Pe &= \text{Tr} |e\rangle \langle e| \left(\sum_n C_n \left[\cos(gt\sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n-1}) |g\rangle |n-1\rangle \right] \right) \\ &\quad \times \sum_m C_m^* \left[\cos(gt\sqrt{m+1}) \langle e| \langle m| + i \sin(gt\sqrt{m-1}) \langle g| \langle m-1| \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo C_n os coeficientes do campo no ECC $|\xi, \alpha\rangle$ dado por [6]:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\sqrt{(e^{i\theta} \tanh r)^n}}{\sqrt{2^n n! \cosh r}} \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + e^{-i\theta} \alpha^2 \tanh r) \right] \\ &\quad \times H_n \left(\frac{\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2 \cosh r \sinh r}} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

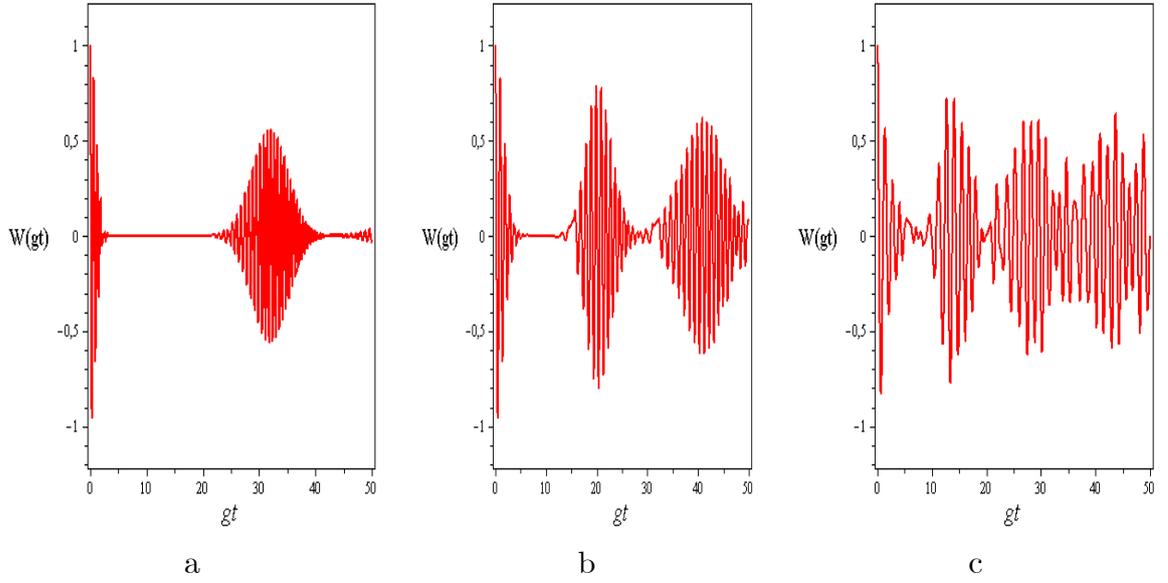


Figura 4.7: Inversão atômica com temperatura nula e sem dissipação para o campo no: a) EC $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.0$; b) ECC $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.5$; c) ECC $\alpha = 5.0$, $\xi = 1.0$

Tomando o traço na Eq. (4.32), a probabilidade de detectar o átomo no estado inicial $|e\rangle$ é:

$$Pe = \sum_n |C_n|^2 \cos^2 \left(gt\sqrt{n+1} \right), \quad (4.34)$$

onde $|C_n|^2$ nos dá a distribuição do número de fótons do campo e a inversão atômica $\mathbf{W}(gt) = Pe - Pg = 2Pe - 1$, será dada por:

$$\mathbf{W}(gt) = \sum_n |C_n|^2 \cos \left(2gt\sqrt{n+1} \right). \quad (4.35)$$

Note que se fizermos $r = 0$ nos coeficientes do campo no estado coerente comprimido C_n dado pela Eq.(4.33), teremos a inversão atômica $\mathbf{W}(gt)$ na Eq. (4.35) do estado coerente dentro da cavidade 1.

A Figura 4.7a mostra a inversão da população em função de gt , sem perda, para o campo no EC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 5.0$ [6] e as Figuras 4.7b e c para o campo no ECC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 5.0$ com o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$ e $\xi = 1.0$.

As Figuras 4.7b e c mostram que a inversão atômica do campo no ECC também apresenta o colapso e ressurgimento, mas esses efeitos ocorrem mais vezes, no mesmo intervalo de tempo, comparado com a inversão atômica do campo no EC dada na Figura 4.7a.

Para o campo preparado na SECC na forma $|\Psi\rangle = N(|\xi, \alpha\rangle + |\xi, -\alpha\rangle)$, o operador densidade que representa o estado é $\rho = N^2(|\xi, \alpha\rangle + |\xi, -\alpha\rangle)(\langle\alpha, \xi| + \langle-\alpha, \xi|)$. A probabilidade Pe de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$, preparado inicialmente no estado inicial $|e\rangle$, sem perdas, será dada por:

$$Pe = N^2 \text{tr} |e\rangle \langle e| U_{jc} (|\xi, \alpha\rangle + |\xi, -\alpha\rangle) (\langle\alpha, \xi| + \langle-\alpha, \xi|) U_{jc}^\dagger. \quad (4.36)$$

Escrevendo na base de Fock cada componente do campo $|\xi, \alpha\rangle$ e $|\xi, -\alpha\rangle$ e atuando o operador de evolução U_{jc} , teremos a

$$\begin{aligned} Pe = & N^2 \text{Tr} |e\rangle \langle e| \left\{ \sum_n C_n^+ \left[\cos(gt\sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n-1}) |g\rangle |n-1\rangle \right] \right. \\ & + \left. \sum_m C_m^- \left[\cos(gt\sqrt{m+1}) \langle e| \langle m| - i \sin(v\sqrt{m-1}) \langle g| \langle m-1| \right] \right\} \\ & \times \left\{ \sum_k C_k^{+*} \left[\cos(gt\sqrt{k+1}) g \langle e| \langle k| + i \sin(gt\sqrt{k-1}) \langle g| \langle k-1| \right] \right. \\ & + \left. \sum_j C_j^{-*} \left[\cos(gt\sqrt{j+1}) \langle e| \langle j| + i \sin(v\sqrt{j-1}) \langle g| \langle j-1| \right] \right\}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

sendo C^+ e C^- , os respectivos coeficientes dos estados coerentes comprimidos $|\xi, \alpha\rangle$ e $|\xi, -\alpha\rangle$. Tomando o traço na Eq. (4.37), a probabilidade de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$, é dado por:

$$\begin{aligned} Pe = & N^2 \left\{ \sum_n \left[|C_n^+|^2 + (C_n^+ C_n^{-*} + C_n^{+*} C_n^-) \right. \right. \\ & \left. \left. + |C_n^-|^2 \right] \cos^2(gt\sqrt{n+1}) \right\}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

e a inversão atômica $\mathbf{W}(gt)$, sem perdas, do campo na SECC, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(gt) = & N^2 \left\{ \sum_n \left[|C_n^+|^2 + C_n^+ C_n^{-*} + C_n^{+*} C_n^- \right. \right. \\ & \left. \left. + |C_n^-|^2 \right] \cos(2\sqrt{n+1}gt) \right\}, \quad (4.39) \end{aligned}$$

note que se fizermos os coeficientes $C_n^- = 0$ e a constante de normalização $N = 1$ na Eq. (4.39) teremos a inversão atômica do campo no ECC sem perda, conforme a Eq. (4.35).

A inversão da população em função de gt é mostrada na Figura 4.8a para SEC com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 5.0$ e nas Figuras 4.8b e c para o campo na SECC fixando o

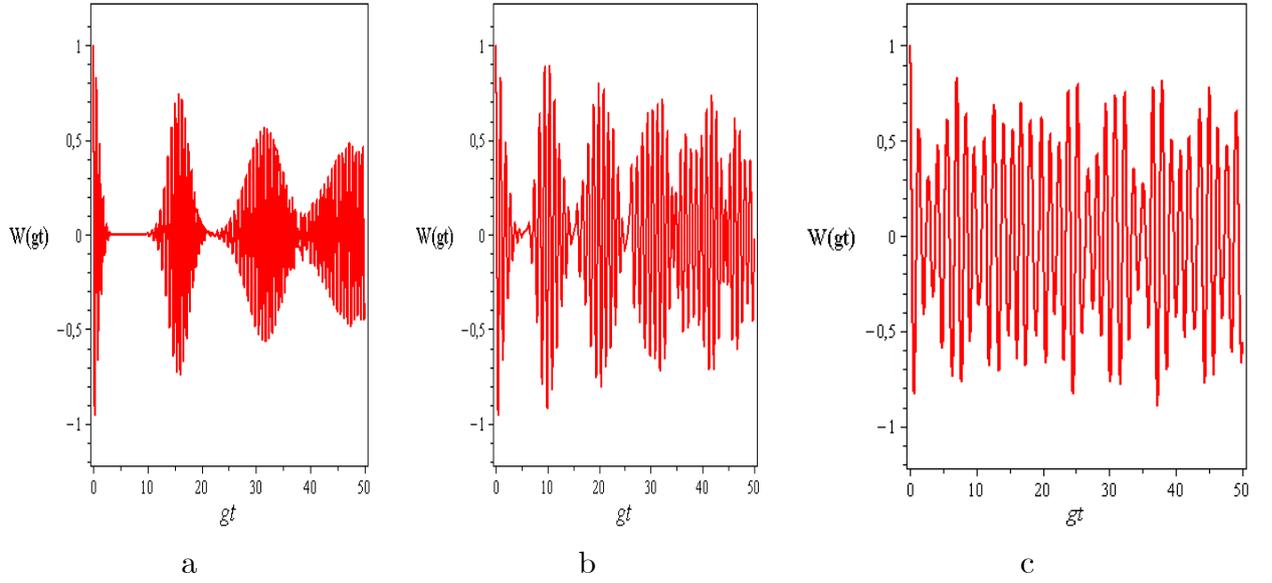


Figura 4.8: Inversão atômica sem perda para o campo na:: a) SEC $\alpha = 5.0$ e $\xi = 0.0$; b) SECC $\alpha = 5.0$ e $\xi=0.5$; a) SEC $\alpha = 5.0$ e $\xi = 1.0$

parâmetro de deslocamento $\alpha = 5.0$ com o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$ e $\xi = 1.0$ sem perda.

As nossas simulações mostram, nas Figuras 4.8a, b e c, que os efeitos de colapso e ressurgimento também aparecem na inversão atômica, quando o campo é preparado na SECC, mas que tende a desaparecerem com o aumento do parâmetro de compressão.

4.3.2 Inversão atômica para o campo na superposição de estados coerentes comprimidos com perdas

O operador densidade no formalismo de Glauber na representação do estado coerente de acordo com a Eq. (B18) no Apêndice B, é dada por:

$$\rho(\alpha, t) = \int d^2\alpha P(\alpha, t) |\alpha\rangle \langle\alpha| \quad (4.40)$$

então, numa interação do campo com o átomo via J-C, teremos que:

$$U_{jc}\rho(\alpha, t)U_{jc}^\dagger = \int d^2\alpha P(\alpha, t) U_{jc} |\alpha\rangle \langle\alpha| U_{jc}^\dagger, \quad (4.41)$$

escrevendo a representação do estado coerente $|\alpha\rangle$ em termos da representação de número por:

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (4.42)$$

sendo $C_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ os coeficientes do estado $|\alpha\rangle$ na representação do campo no estado coerente, fazendo a evolução na interação via Jaynes-Cummings, com o átomo inicialmente no estado excitado $|e\rangle$ teremos,

$$U_{jc}\rho U_{jc}^\dagger = \int d^2\alpha P(\alpha, t) \left\{ \sum_n C_n \left[\cos(\sqrt{n+1}gt) |e\rangle |n\rangle - i \sin(\sqrt{n-1}gt) |g\rangle |n-1\rangle \right] \right. \\ \left. \times \left[\sum_m C_m^* \cos(\sqrt{m+1}gt) \langle e| \langle m| + i \sin(\sqrt{m-1}gt) \langle g| \langle m-1| \right] \right\}. \quad (4.43)$$

A probabilidade Pe de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$ será dada por:

$$Pe = \text{Tr} |e\rangle \langle e| U_{jc}\rho U_{jc}^\dagger \\ = \sum_n^\infty \cos^2(\sqrt{n+1}gt) \int d^2\alpha P(\alpha, t) |C_n|^2, \quad (4.44)$$

onde $\int d^2\alpha P(\alpha, t) |C_n|^2$ dá a distribuição do número de fótons do campo preparado na cavidade com dissipação e temperatura.

Substituindo os coeficientes do campo no EC tal que o $|C_n|^2 = \exp(-|\alpha|^2) |\alpha|^{2n}/n!$ e a função $P(\alpha, t)$ dada pela Eq. (2.53) na Eq. (4.44), a probabilidade Pe de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$ será dada por:

$$Pe = \frac{N^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 \sum_n^\infty \frac{\langle \alpha_j | \alpha_k \rangle}{\sqrt{K_p^2 - L_p L_p^*}} \cos^2(\sqrt{n+1}gt) \frac{1}{n!} \times I_{jk}, \quad (4.45)$$

fazendo $A_{jk} = w(t)(\mu\alpha_j - \nu\alpha_k^*)$ e $D_p = K_p^2 - L_p L_p^*$, a integral

$$I_{jk} = \int d^2\alpha \exp \left\{ \frac{K_p A_{jk} A_{kj}^* + K_p A_{jk} \alpha^* - K_p A_{kj}^* \alpha - K_p |\alpha|^2}{D_p} \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{-L_p A_{kj}^{*2} - 2L_p A_{kj}^* \alpha^* - L_p \alpha^{*2}}{2D_p} \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{-L_p^* A_{jk}^2 + 2L_p^* A_{jk} \alpha - L_p^* \alpha^2}{2D_p} \right\} \\ \times \exp(-|\alpha|^2) |\alpha|^{2n}, \quad (4.46)$$

com $A = \frac{-L_p^*}{2D_p}$, $B = \frac{-L_p}{2D_p}$, $C = \frac{-K_p A_{kj}^* + L_p^* A_{jk}}{D_p}$, $D = \frac{K_p A_{jk} - L_p A_{kj}^*}{D_p}$, $E = -\left(\frac{K_p}{D_p} + 1\right)$, $F = \frac{2K_p A_{jk} A_{kj}^* - L_p A_{kj}^{*2} - L_p^* A_{jk}^2}{2D_p}$ e a integral passa a ser

$$I_{jk} = \exp(F) \int d^2\alpha \exp(A\alpha^2 + B\alpha^{*2} + C\alpha + D\alpha^* + E|\alpha|^2) |\alpha|^{2n} \quad (4.47)$$

ou, ainda

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \exp(F) \int d^2\alpha \exp(A\alpha^2 + B\alpha^{*2} + C\alpha + D\alpha^* + E|\alpha|^2) \alpha^n \alpha^{*n} \\
&= \exp(F) \left[\frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \int d^2\alpha \exp(A\alpha^2 + B\alpha^{*2} + C\alpha + D\alpha^* + E|\alpha|^2) \exp(\alpha t + \alpha^* \tau) \right]_{t=\tau=0} \\
&= \exp(F) \left[\frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \int d^2\alpha \exp(A\alpha^2 + B\alpha^{*2} + (C+t)\alpha + (D+\tau)\alpha^* + E|\alpha|^2) \right]_{t=\tau=0} \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Da identidade [52]

$$\begin{aligned}
&\int d^2\lambda \exp(A\lambda^2 + B\lambda^{*2} + C\lambda + D\lambda^* + E|\lambda|^2) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right), \quad (4.49)
\end{aligned}$$

com $E^2 - 4AB > 0$, temos $(K_p + D_p)^2 > L_p L_p^*$, substituindo a K_p, D_p, L_p, L_p^* temos

$$\epsilon^2 + (1 + 2|w(t)\nu|^2)\epsilon + |w(t)|^2|\nu|^2 + |w(t)|^4|\nu|^4 - |w(t)|^4|\nu\mu|^2 - |w(t)|^2|\nu\mu| > 0 \quad (4.50)$$

usando $|\nu|^2 - |\mu|^2 = -1$ no quarto e quinto termo da Eq.(4.50), ficaremos

$$\epsilon^2 + (1 + 2|w(t)\nu|^2)\epsilon + |w(t)|^2|\nu|^2 - |w(t)|^4|\nu|^2 - |w(t)|^2|\nu\mu| > 0, \quad (4.51)$$

então,

$$\epsilon > |w(t)|^2|\nu|(|\mu| - |\nu|), \quad (4.52)$$

[note que é a mesma condição de existência dada pela Eq. (2.54) da função $P(\alpha, t)$ mostrada na Eq. (2.53)], e a integral dada pela Eq.(4.48) passa a ser:

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \\
&\exp\left[\frac{-E(C+t)(D+\tau) + (C+t)^2B + (D+\tau)^2A}{E^2 - 4AB}\right]_{t=\tau=0}. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Abrindo os parênteses da Eq. (4.53) temos que:

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \\
&\exp\left[\frac{-ECD - EC\tau - EDt - Etr}{E^2 - 4AB}\right. \\
&\quad + \frac{C^2B + 2CBt + Bt^2}{E^2 - 4AB} \\
&\quad \left. + \frac{D^2A + 2DA\tau + A\tau^2}{E^2 - 4AB}\right]_{t=\tau=0}, \quad (4.54)
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \exp\left[\left(\frac{B}{E^2 - 4AB}\right)t^2 + \left(\frac{A}{E^2 - 4AB}\right)\tau^2\right. \\
&+ \left.\left(\frac{2CB - ED}{E^2 - 4AB}\right)t + \left(\frac{2DA - EC}{E^2 - 4AB}\right)\tau\right. \\
&- \left.\frac{E}{E^2 - 4AB}t\tau\right]_{t=\tau=0}, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

agora com $-P = \frac{B}{E^2 - 4AB}$, $Q = \frac{2CB - ED}{E^2 - 4AB}$, $-R = \frac{A}{E^2 - 4AB}$, $S = \frac{2DA - EC}{E^2 - 4AB}$ e $U = -\frac{E}{E^2 - 4AB}$, teremos

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \exp\left(U \frac{\partial^2}{\partial Q \partial S}\right) \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial \tau^n} \exp(-Pt^2 + Qt - R\tau^2 + S\tau)_{t=\tau=0}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Com a ajuda da identidade [52]

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial V^m} \exp(-GV^2 + 2EV)\right)_{V=0} = \sqrt{G^m} H_m\left(\frac{E}{\sqrt{G}}\right), \tag{4.57}$$

a integral passa a ser

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \exp\left(U \frac{\partial^2}{\partial Q \partial S}\right) \sqrt{(PR)^n} H_n\left(\frac{Q}{2\sqrt{P}}\right) H_n\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}\right), \tag{4.58}
\end{aligned}$$

usando o fato que:

$$\exp x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!},$$

a integral será dada por

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U^l}{l!} \frac{\partial^{2l}}{\partial Q^l \partial S^l} \sqrt{(PR)^n} H_n\left(\frac{Q}{2\sqrt{P}}\right) H_n\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}\right), \tag{4.59}
\end{aligned}$$

e, com o uso do resultado conhecido das propriedades dos polinômios de Hermite:

$$\frac{d^l}{dx^l} H_n(x) = \frac{2^l n!}{(n-l)!} H_{n-l}(x), \tag{4.60}$$

teremos finalmente, o resultado da integral dada por:

$$\begin{aligned}
I_{jk} &= \frac{\pi \exp(F)}{\sqrt{E^2 - 4AB}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2B + D^2A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \sum_{l=0}^n \frac{U^l (n!)^2 \sqrt{(PR)^n}}{l! [(n-l)!]^2 \sqrt{(PR)^l}} H_{n-l}\left(\frac{Q}{2\sqrt{P}}\right) H_{n-l}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}\right). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Substituindo a integral dada pela Eq. (4.61) na Eq. (4.45), teremos a probabilidade de detectar o átomo no estado excitado $|e\rangle$ dada por:

$$\begin{aligned}
Pe &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{N^2 \exp(F) \langle \alpha_j | \alpha_k \rangle}{\sqrt{E^2 - 4AB} \sqrt{K_p^2 - L_p L_p^*}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2 B + D^2 A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \sum_n \sum_{l=0}^n \cos^2(\sqrt{n+1}gt) \frac{U^l n! \sqrt{(PR)^n}}{l! [(n-l)!]^2 \sqrt{(PR)^l}} H_{n-l}\left(\frac{Q}{2\sqrt{P}}\right) H_{n-l}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}\right).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

A inversão atômica, com dissipação e temperatura, será dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(gt) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{N^2 \exp(F) \langle \alpha_j | \alpha_k \rangle}{\sqrt{(E^2 - 4AB)(K_p^2 - L_p L_p^*)}} \exp\left(\frac{-ECD + C^2 B + D^2 A}{E^2 - 4AB}\right) \\
&\times \sum_n \sum_{l=0}^n \cos(2\sqrt{n+1}gt) \frac{U^l n! \sqrt{(PR)^n}}{l! [(n-l)!]^2 \sqrt{(PR)^l}} H_{n-l}\left(\frac{Q}{2\sqrt{P}}\right) H_{n-l}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}\right).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Se fizermos a constante de normalização $N = 1$ e o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ na Eq. (4.63) teremos a inversão atômica com perda para o estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$.

Note que $K_p^2 - L_p L_p^* > 0$ nos leva à condição $\epsilon > |w(t)|^2 |\nu| (|\mu| - |\nu|)$ com temperatura diferente de O K dentro da cavidade, veja Eq.(2.54), e também para $E^2 - 4AB > 0$ temos a mesma condição, veja Eq. (4.52). Dentro da raiz da Eq. (4.63) temos que ter $(E^2 - 4AB)(K_p^2 - L_p L_p^*) > 0$, então $[\epsilon - |w(t)|^2 |\nu| (|\mu| - |\nu|)]^2 > 0$ para qualquer ϵ , inclusive $\epsilon = 0$, ou seja, para qualquer temperatura desde que haja uma compressão mínima no estado ($\xi \neq 0$), a expressão da inversão atômica dada pela Eq. (4.63) será sempre válida.

Mostramos a inversão atômica em função de gt com dissipação e temperatura na Figura 4.9 com o parâmetro de dissipação Γ do reservatório e de acoplamento g do átomo com o campo usados em experiências recentes [48, 47] de forma que $\Gamma/g = 10^{-4}$. Nas Figuras 4.9a e b temos a inversão atômica em função de gt para o campo na SECC fixando o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.5$, o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.2$ com os respectivos parâmetros de compressão $\xi = 0.5$ e $\xi = 1.5$; nas Figuras 4.9c e d fixamos o parâmetro de deslocamento $\alpha = 5.0$ e o número médio de fótons térmico dentro da cavidade $\bar{n}_\omega = 0.2$ com os respectivos parâmetros de compressão $\xi = 0.5$ e $\xi = 1.0$.

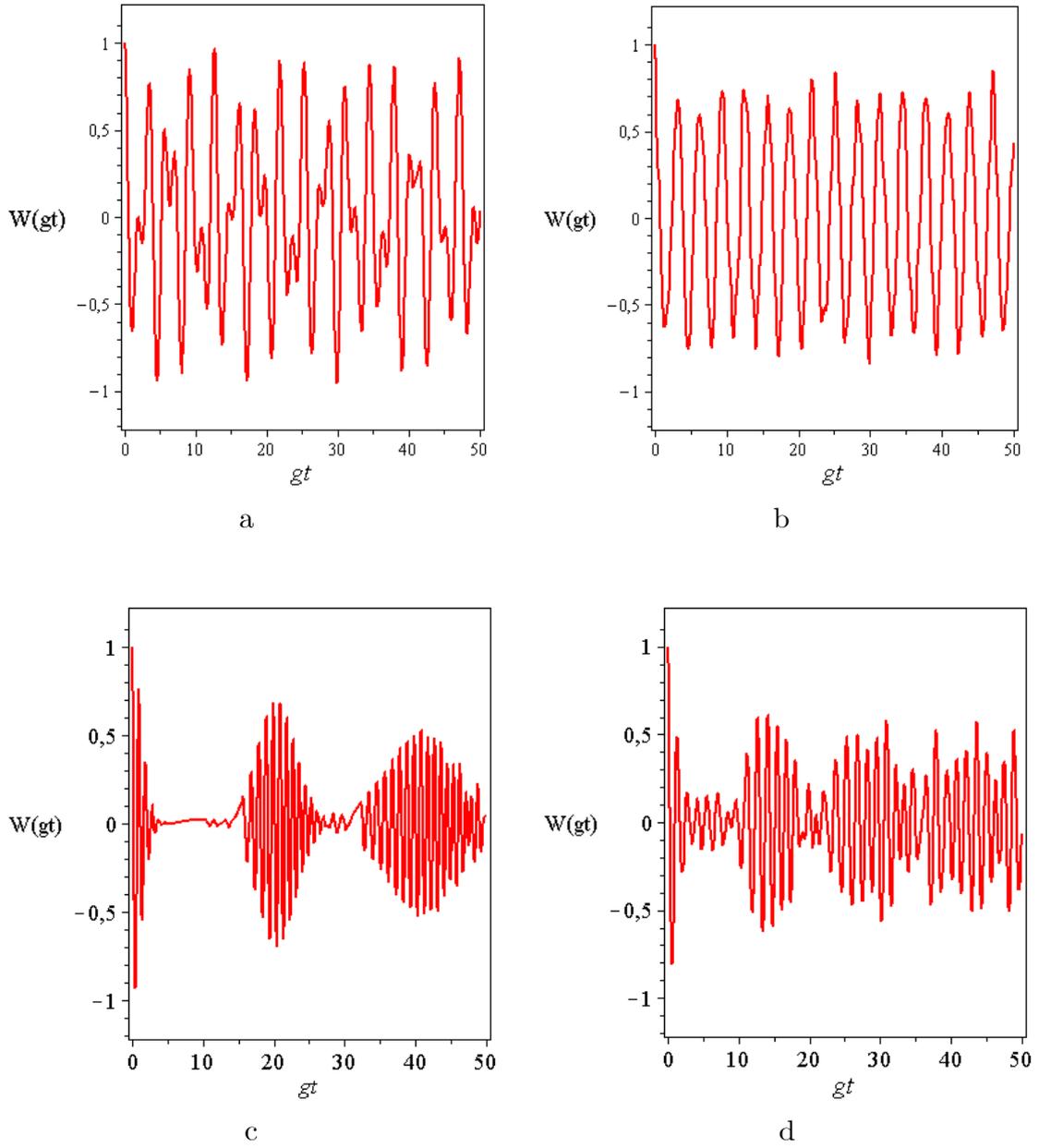


Figura 4.9: Inversão atômica para o campo na SECC com $\Gamma/g = 10^{-4}$, $\bar{n}_\omega = 0.2$; a) $\alpha = 1.5$, $\xi = 0.5$; b) $\alpha = 1.5$, $\xi = 1.0$; c) $\alpha = 5.0$, $\xi = 0.5$; e d) $\alpha = 5.0$, $\xi = 1.0$

Nas nossas simulações com dissipação e temperatura, notamos nas Figuras 4.9a, b, c e d que os efeitos de colapso e ressurgimento estão presentes somente para o intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \gtrsim 5.0$ e com o aumento do parâmetro de compressão ξ estes efeitos tende a desaparecerem, como no caso da inversão atômica sem perda, porém o colapso, efeito quântico desejado, é visto claramente na Figura 4.9c, com dissipação e com um número de fótons térmicos $\bar{n}_\omega = 0.2$ dentro da cavidade que equivale à temperatura aproximadamente de $0.6 K$.

4.4 Entropia Linear

Nesta Seção estudaremos a evolução da superposição de estados sob a influência de um reservatório com temperatura $0 K$ e com temperaturas não nula com o objetivo de saber como o seu grau de pureza são perdidos com a evolução temporal. Superposições estudadas aqui são compostas por estados coerentes, estados coerentes comprimidos, estados coerentes ortogonais e estados coerentes comprimidos ortogonais [34] que introduzimos generalizando os estados coerentes ortogonais [35]. Para comparação, mostraremos como a robustez das superposições estudadas aqui é diferente de um qubit (QBIT) dado por uma superposição do estado com zero fóton com o estado de um fóton.

4.4.1 Entropia linear da superposição de estados

Para estudar a perda de pureza dos estados acima referidos, focamos nossa atenção na evolução temporal da entropia linear [34] para o campo na SECC, uma vez que os outros estados resultam como casos particulares. A entropia linear na teoria da informação quântica é definida de acordo com a $\mathbf{E} = 1 - Tr\rho^2(t)$, onde $\rho(t)$ é o operador densidade para o sistema no instante t . De acordo com a sua definição, entropia linear tem um mínimo quando o $Tr\rho = Tr\rho^2 = 1$ e espera-se, portanto, que os estados em evolução no tempo tal que sua entropia linear permanece mínima são os estados mais úteis para tarefas de processamento quântico. Para os nossos propósitos, podemos reescrever a entropia linear em termos da função de Wigner dada pela Eq. (C5) do Apêndice C:

$$\mathbf{E} = 1 - \pi \int d^2\gamma W^2(\gamma, t). \quad (4.64)$$

A entropia linear do campo na SECC dado por $a|\xi, \alpha\rangle + b|\xi, -\alpha\rangle$ preparado na cavidade 1

é obtida resolvendo a Eq. (4.64) usando a Eq. (2.58) e será dada por:

$$\begin{aligned}
E = & 1 - N^4 \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{2\sqrt{D}} \\
& \exp \left(-\frac{K}{D} |w|^2 B_{jk} B_{kj}^* - \frac{Lw^{*2}}{2D} B_{kj}^{*2} - \frac{L^* w^2}{2D} B_{jk}^2 - \frac{K}{D} |w|^2 B_{rs} B_{sr}^* - \frac{Lw^{*2}}{2D} B_{sr}^{*2} - \frac{L^* w^2}{2D} B_{rs}^2 \right) \\
& \times \exp \left\{ \frac{K (M_{ajk} + M_{ars}) (T_{ajk} + T_{ars}) - [L (T_{ajk} + T_{ars})^2 + L^* (M_{ajk} + M_{ars})^2]}{2D^2} \right\}, \quad (4.65)
\end{aligned}$$

sendo agora a constante de normalização $N = [a^2 + b^2 + 2ab \exp(-|\alpha|^2)]^{-\frac{1}{2}}$, $M_{ajk} + M_{ars} = KwB_{jk} + Lw^*B_{kj}^* + KwB_{rs} + Lw^*B_{sr}^*$, e $T_{ajk} + T_{ars} = L^*wB_{jk} + Kw^*B_{kj}^* + L^*wB_{rs} + Kw^*B_{sr}^*$.

4.4.2 Estado coerente ortogonal e coerente comprimido Ortogonal

O estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$ e o estado coerente comprimido $|\xi, -\alpha\rangle$ não são ortogonais, mas podemos definir um estado chamado de estado coerente comprimido ortogonal (ECCO) $|\xi, \alpha\rangle_{\perp} = A|\xi, \alpha\rangle + B|\xi, -\alpha\rangle$ que é ortogonal ao estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle$.

Com A e B reais temos

$$(\langle \xi, \alpha | A + \langle \xi, -\alpha | B) |\xi, \alpha\rangle = 0, \quad (4.66)$$

então, $A^2 + B^2 + 2AB \exp(-2|\alpha|^2) = 1$ e $A + B \exp(-2|\alpha|^2) = 0$, encontramos $A = -\frac{\exp(-|\alpha|^2)}{2SR}$ e $B = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{2SR}$, logo

$$|\xi, \alpha\rangle_{\perp} = \frac{-\exp(-|\alpha|^2) |\xi, \alpha\rangle + \exp(|\alpha|^2) |\xi, -\alpha\rangle}{2SR} \quad (4.67)$$

sendo $S = (\sinh(|\alpha|^2))^{\frac{1}{2}}$ e $R = (\cosh(|\alpha|^2))^{\frac{1}{2}}$. Com o parâmetro de compressão $\xi = 0$ na Eq. (4.67) teremos o estado coerente ortogonal (ECO) $|\xi = 0, \alpha\rangle_{\perp} = |\alpha\rangle_{\perp}$ que será ortogonal ao estado coerente $|\alpha\rangle$ [35].

A função característica, do ECCO $|\xi, \alpha\rangle_{\perp}$, é

$$\begin{aligned}
C_{\perp}(\eta, t) &= Tr \left\{ \rho_{\perp}(0) e^{\eta a^{\dagger}(t)} e^{-\eta^* a(t)} \right\} \\
&= Tr \left\{ N_{\perp}^2 \sum_{j,k=1}^2 C_{jk} |\xi, \alpha_j\rangle \langle \xi, \alpha_k | e^{\eta a^{\dagger}(t)} e^{-\eta^* a(t)} \right\}, \quad (4.68)
\end{aligned}$$

sendo $N_{\perp} = (2SR)^{-1}$ e o operador densidade que representa o ECCO é dada por:

$$\begin{aligned}\rho_{\perp}(0) &= N_{\perp}^2 \left(-\exp(-|\alpha|^2) |\xi, \alpha\rangle + \exp(|\alpha|^2) |\xi, -\alpha\rangle \right) \\ &\quad - \left(\langle \xi, \alpha | \exp(-|\alpha|^2) + \langle \xi, -\alpha | \exp(|\alpha|^2) \right) \\ &= N_{\perp}^2 \sum_{j,k=1}^2 C_{jk} |\xi, \alpha_j\rangle \langle \xi, \alpha_j|,\end{aligned}\tag{4.69}$$

com o parâmetro de deslocamento $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\alpha$ e o coeficiente $C_{11} = \exp(-2|\alpha|^2)$, $C_{12} = C_{21} = -1$, e $C_{22} = \exp(2|\alpha|^2)$.

A função característica do ECCO é dada por:

$$C_{\perp}(\eta, t) = N_{\perp}^2 \sum_{j,k=1}^2 Tr C_{jk} |\xi, \alpha_j\rangle \langle \xi, \alpha_k | \exp(\eta a^{\dagger}(t)) \exp(-\eta^* a(t)),\tag{4.70}$$

analogamente as Eq. (2.49) e (2.58) a função característica do ECCO será dada por:

$$\begin{aligned}C_{\perp}(\eta, t) &= N_{\perp}^2 \sum_{j,k=1}^2 C_{jk} \langle \alpha_k | \alpha_j \rangle \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 w^*(t)^2 \mu^* \nu^* - \frac{1}{2}\eta^{*2} w(t)^2 \mu \nu\right) \\ &\quad \times \exp[\eta w^*(t) (\mu^* \alpha_k^* - \nu^* \alpha_j) - \eta^* w(t) (\mu \alpha_j - \nu \alpha_k^*) \\ &\quad - |\eta|^2 (|w(t)\nu|^2 + \epsilon)].\end{aligned}\tag{4.71}$$

e a função de Wigner por:

$$\begin{aligned}W_{\perp}(\gamma, t) &= \frac{N_{\perp}^2}{\pi} \sum_{j,k=1}^2 C_{jk} \langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle [K^2 - LL^*]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{KM_{jk}M_{kj}^* + \frac{1}{2}(LM_{kj}^{*2} + L^*M_{jk}^2)}{K^2 - LL^*}\right\}.\end{aligned}\tag{4.72}$$

A entropia linear do ECCO é dada por:

$$E_{\perp} = 1 - \pi \int d^2\gamma W_{\perp}^2(\gamma, t).\tag{4.73}$$

A entropia linear do ECCO preparado na cavidade 1 é obtida resolvendo a Eq. (4.73) usando a Eq. (4.72) e será dada por:

$$\begin{aligned}E_{\perp} &= 1 - N_{\perp}^4 \sum_{j,k=1}^2 \sum_{r,s=1}^2 C_{jk} C_{rs} \frac{\langle \xi, \alpha_j | \xi, \alpha_k \rangle \langle \xi, \alpha_r | \xi, \alpha_s \rangle}{2\sqrt{D}} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{K}{D} |w|^2 (B_{jk}B_{kj}^* + B_{rs}B_{sr}^*) - \frac{Lw^{*2}}{2D} (B_{kj}^{*2} + B_{sr}^{*2}) - \frac{L^*w^2}{2D} (B_{jk}^2 + B_{rs}^2)\right] \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{K(M_{ajk} + M_{ars})(T_{ajk} + T_{ars}) - \frac{1}{2}[L(T_{ajk} + T_{ars})^2 + L^*(M_{ajk} + M_{ars})^2]}{2D^2}\right\}.\end{aligned}\tag{4.74}$$

4.4.3 Estado QBIT

Para comparação com o campo na SECC, também analizaremos a entropia linear do campo na superposição de estado de zero e um fóton (QBIT) que representa superposição de estado de Fock, uma vez que estados de zero e um normalmente são tomados como base computacional.

Definindo o estado QBIT dado por $|\Psi\rangle_Q = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ o operador densidade que representa este estado é dado por:

$$\rho_Q(0) = \alpha^2 |1\rangle\langle 1| + \beta^2 |0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^* |1\rangle\langle 0| + c.c. \quad (4.75)$$

e o estado de QBIT evoluído dentro do reservatório no instante t é dado por:

$$\rho_Q(t) = \rho_{aa}(t) |1\rangle\langle 1| + \rho_{bb}(t) |0\rangle\langle 0| + \rho_{ab}(t) |1\rangle\langle 0| + c.c. \quad (4.76)$$

As equações de movimento dos elementos da matriz correspondente ao operador densidade são dadas por [6]:

$$\dot{\rho}_{aa}(t) = -(\bar{n}_\omega + 1)\Gamma\rho_{aa} + \bar{n}_\omega\Gamma\rho_{bb}, \quad (4.77)$$

$$\dot{\rho}_{ab}(t) = \dot{\rho}_{ba}^* = -(\bar{n}_\omega + \frac{1}{2})\Gamma\rho_{ab}, \quad (4.78)$$

$$\dot{\rho}_{bb}(t) = (\bar{n}_\omega + 1)\Gamma\rho_{aa} - \bar{n}_\omega\Gamma\rho_{bb}, \quad (4.79)$$

sendo $\bar{n}_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$ o número médio de fótons térmico no reservatório a uma temperatura T e Γ a constante de dissipação do reservatório.

Veja que $\dot{\rho}_{aa}(t) + \dot{\rho}_{bb}(t) = 0$, o que implica pela conservação da probabilidade $\rho_{aa}(t) + \rho_{bb}(t) = 1$, já que o estado tem apenas duas possibilidades.

Resolvendo as equações de movimento do estado QBIT, dadas pelas Eq. (4.77) - (4.79), com $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ e $\rho_{aa}(0) = \rho_{bb}(0) = \rho_{ab}(0) = \rho_{ba}(0) = 1/2$, a Eq. (4.76) ficará

$$\begin{aligned} \rho_Q(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\Gamma t} + 2\bar{n}_\omega}{(2\bar{n}_\omega + 1)} \right] |1\rangle\langle 1| \right. \\ & + \left[\frac{2\bar{n}_\omega + 2 - e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\Gamma t}}{(2\bar{n}_\omega + 1)} \right] |0\rangle\langle 0| \\ & \left. + e^{-(\bar{n}_\omega+\frac{1}{2})\Gamma t} (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \right\}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

que generaliza o resultado para o número médio de fótons térmico $\bar{n}_\omega = 0$, ou seja, à temperatura nula.

A entropia linear do estado QBIT é definida por:

$$E_Q = 1 - \text{Tr} \rho_Q^2(t). \quad (4.81)$$

Multiplicando o operador densidade dada pela Eq. (4.80) por ele mesmo, ficaremos

$$\begin{aligned} \rho_Q^2(t) = & \frac{1}{4} \left\{ \left[e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\gamma t} + \left[\frac{e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\gamma t} + 2\bar{n}_\omega}{2\bar{n}_\omega + 1} \right]^2 \right] |1\rangle \langle 1| \right. \\ & + \left[e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\gamma t} + \left[\frac{2\bar{n}_\omega + 2 - e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\gamma t}}{2\bar{n}_\omega + 1} \right]^2 \right] |0\rangle \langle 0| \\ & \left. + f(\bar{n}_\omega, t) (|1\rangle \langle 0| + g(\bar{n}_\omega, t) |0\rangle \langle 1|) \right\}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde $f(\bar{n}_\omega, t)$ e $g(\bar{n}_\omega, t)$ serão irrelevantes para o presente propósito, pois se substituirmos a Eq. (4.82) na Eq. (4.81) e tomarmos o traço a entropia linear do estado QBIT ficará:

$$\begin{aligned} E_Q = & 1 - \frac{1}{4} \left\{ 2e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\Gamma t} + \left[\frac{e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\Gamma t} + 2\bar{n}_\omega}{2\bar{n}_\omega + 1} \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[\frac{2\bar{n}_\omega + 2 - e^{-(2\bar{n}_\omega+1)\Gamma t}}{2\bar{n}_\omega + 1} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Na equação acima observamos para o número médio de fótons térmico $\bar{n}_\omega = 0$ a entropia linear do estado QBIT é nula para o instante inicial $t = 0$ ou para $t \rightarrow \infty$. Esta explicação se deve o fato que a entropia linear será nula sempre que o estado for um estado puro. Como estamos começando com estado puro no instante inicial $t = 0$, a entropia linear começa do zero, e uma vez que à temperatura zero absoluto o estado final será o estado de vácuo (estado puro), a entropia linear também irá para zero.

Note que para $\Gamma t \rightarrow \infty$ temos que a entropia linear do estado estado QBIT $E_Q = \frac{2\bar{n}_\omega(\bar{n}_\omega+1)}{(2\bar{n}_\omega+1)^2}$, e para o número médio de fótons térmico \bar{n}_ω muito grande a entropia linear do estado QBIT $E_Q \rightarrow 0.5$.

O operador densidade que representa o estado térmico é dada por [6]:

$$\rho_T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle \langle n|, \quad (4.84)$$

E a entropia linear do estado térmico será:

$$\begin{aligned} E_T &= 1 - \text{Tr} \rho_T^2 \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{2n}}{(1 + \langle n \rangle)^{2n+2}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

como o número médio de fótons térmico $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$, que nós dá $\frac{1+\langle n \rangle}{\langle n \rangle} = e^{\hbar\omega/k_B T}$ então a entropia linear do estado térmico será dado por:

$$E_T = 1 - \frac{1}{(1 + \langle n \rangle)^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\hbar\omega/k_B T}. \quad (4.86)$$

Usando $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$, teremos

$$\begin{aligned} E_T &= 1 - \frac{1}{(1 + \langle n \rangle)^2} \frac{1}{(1 - e^{-2\hbar\omega/k_B T})} \\ &= 1 - \frac{1}{\langle n \rangle^2 e^{2\hbar\omega/k_B T} (1 - e^{-2\hbar\omega/k_B T})} \\ &= 1 - \frac{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2}{e^{2\hbar\omega/k_B T} (1 - e^{-2\hbar\omega/k_B T})} \\ &= \frac{2(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)}{(e^{2\hbar\omega/k_B T} - 1)}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

logo, a entropia linear do estado térmico é dado por:

$$E_T = \frac{2}{(e^{\hbar\omega/k_B T} + 1)}, \quad (4.88)$$

porém, se

$$\rho_T = \sum_0^1 \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle \langle n|, \quad (4.89)$$

teremos que normalizar, pois estamos considerando apenas dois termos, assim o operador densidade do estado térmico com apenas dois termos, será dada por:

$$\rho_T = N_T \sum_{n=0}^1 \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle \langle n| \quad (4.90)$$

sendo $N_T = \frac{(1+\langle n \rangle)^2}{2\langle n \rangle + 1}$ a constante de normalização, com $n = 0$ para o estado $|0\rangle \langle 0|$ e $n = 1$ para o estado $|1\rangle \langle 1|$, o operador densidade do estado térmico com apenas dois termos, a uma temperatura T , será dada por:

$$\rho_T = \frac{\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} |1\rangle \langle 1| + \frac{\langle n \rangle + 1}{2\langle n \rangle + 1} |0\rangle \langle 0|. \quad (4.91)$$

Multiplicando a Eq. (4.91) por ela mesma e tomando o traço a entropia linear do estado térmico será dada por:

$$\begin{aligned} E_T &= 1 - Tr \rho_T^2(t) \\ &= 1 - \left[\left(\frac{\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} \right)^2 + \left(\frac{\langle n \rangle + 1}{2\langle n \rangle + 1} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.92)$$

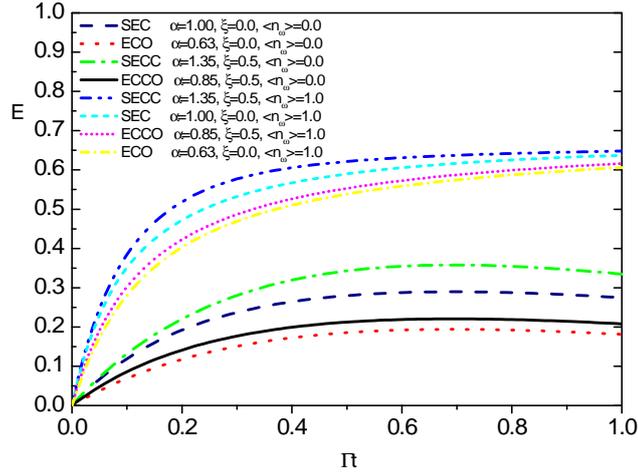


Figura 4.10: Entropia linear com temperatura nula e não nula para SEC, ECO, SECC e ECCO. Os parâmetros α e ξ foram escolhidos para que todos os estados tenham o mesmo número médio de fótons igual a 0.8

que é o mesmo resultado da entropia linear do estado QBIT dada pela Eq. (4.83) quando $\Gamma t \rightarrow \infty$, portanto o estado QBIT, como esperado, vai para o equilíbrio térmico com o reservatório à uma determinada temperatura T para $\Gamma t \rightarrow \infty$.

Para comparar a entropia linear para os diferentes estados evoluídos no tempo, primeiramente fixamos o número inicial médio de fótons para cada superposição de estado, uma vez que a coerência de uma superposição é sensível ao número médio fótons. Na Figura 4.10 temos o gráfico da entropia linear em função Γt para o campo na SECC, ECC, ECCO e ECO para temperatura nula e temperaturas não nulas, respectivamente. Como esperado, a temperatura reduz drasticamente a pureza, embora não na mesma taxa para cada superposição. Na verdade, esses números mostram que o ECO perde a pureza mais lentamente em comparação com os outros estados, sugerindo assim que é mais vantajoso codificar informações com esse estado quando o ambiente é considerado.

No entanto, um estudo preciso revela porque acontece o ritmo mais lento da perda de pureza do ECO : uma vez que as amplitudes de probabilidade para ECO é definida como $A = -\frac{\exp(-|\alpha|^2)}{2SR}$ e $B = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{2SR}$ e para grande número médio de fótons $|\alpha|^2$ a amplitude A tende a zero, e daí o estado inicial do ECO é quase o estado coerente. Como se sabe, estados coerentes são robustos em evolução em reservatório térmico, principalmente à temperatura zero,

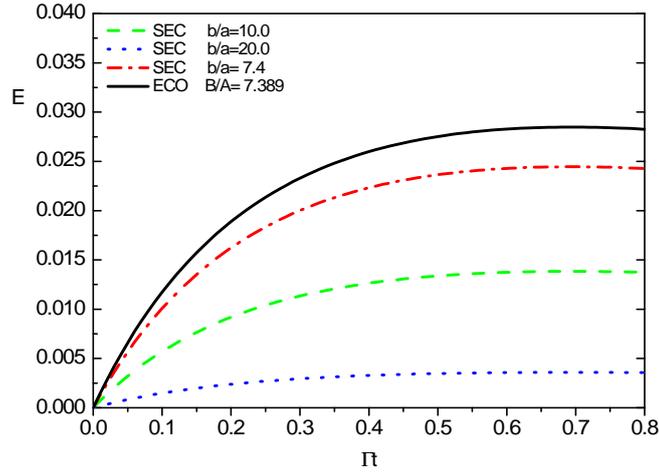


Figura 4.11: Entropia linear com temperatura nula para ECCO e SEC com $\alpha = 1$, com diferente amplitudes de probabilidades para SEC. Para ECCO, $B/A = 7.3891$ (sólida) e para SEC, $b/a = 7.4$ (pontilhada e tracejada), $b/a = 10$ (tracejada) e $b/a = 20$ (pontilhada).

quando ele perde excitação coerente. Este ponto está mais claro visto nas Figuras 4.11 e 4.12, que compara a entropia linear do ECO com a entropia linear do SEC à temperatura nula e à temperatura não nula, considerando diferentes amplitudes de probabilidade. Nota-se nestas Figuras que quando $A \rightarrow 0$, o comportamento da entropia linear para ECO e SEC torna-se semelhante.

A Figura 4.13 inclui a dependência da entropia linear em função Γt à temperatura nula e à temperatura não nula para o estado QBIT igualmente pesado, que tem inicialmente o número médio de fótons igual a 0.5. Nota-se que o estado QBIT igualmente pesado possui mais robustez em relação aos outros estados igualmente pesados estudados aqui, desde que os estados de todos os campos começam com o mesmo número médio de fótons.

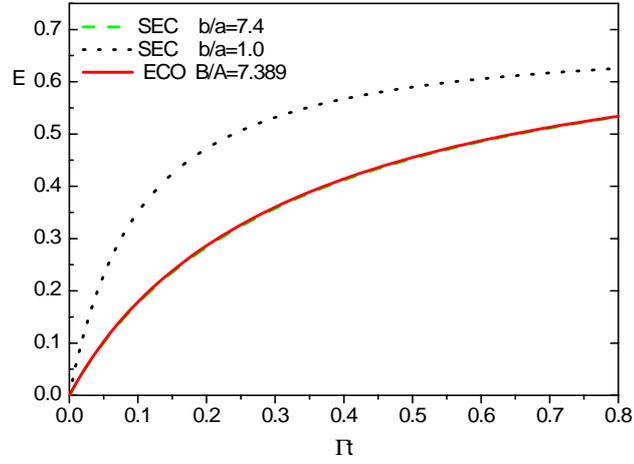


Figura 4.12: Entropia linear, considerando o reservatório com um número médio de ocupação $\bar{n}_\omega = 1.0$ para o campo na SEC igualmente pesado (pontilhada) e para o campo na SEC com $b/a = 7.4$ (tracejada) e ECCO com $B/A = 7.389$ (sólida). Todos com $\alpha = 1.0$.

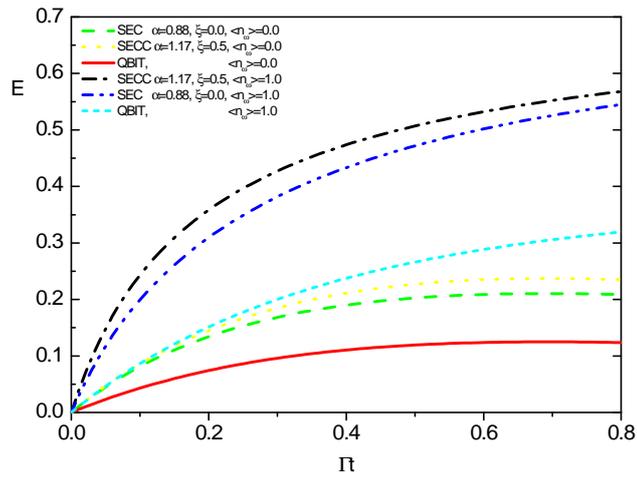


Figura 4.13: Entropia linear com temperatura nula e não nula o campo na SECC, SEC, e QBIT. Os parâmetros α e ξ foram escolhidos para que todos os estados tenham o mesmo número médio de fótons igual a 0.5 e igualmente pesados.

Capítulo 5

Conclusão

Propomos um esquema para a geração do campo eletromagnético no estado na superposição de estados coerentes comprimidos (SECC). Para preparar o campo na SECC numa cavidade que contém um campo preparado inicialmente no estado coerente comprimido (ECC) $|\xi, \alpha\rangle_1$, consideramos primeiramente um átomo de dois níveis inicialmente preparado no estado excitado $|e\rangle$ passando por uma primeira zona de Ramsey levando-o a superposição dos estados excitado e fundamental. Depois interagindo com o campo na cavidade numa interação dispersiva átomo-campo e o estado do átomo ficando emaranhado com o estado do campo dentro da cavidade. Então, passando o átomo numa segunda zona de Ramsey sofrendo de novo uma rotação arbitrária em seu estado e sendo detectado numa medida seletiva e finalmente com isto, conhecemos o estado do campo dentro da cavidade, assim completamos a engenharia de preparação do campo na superposição de estados coerentes comprimidos.

Para caracterizar o campo na SECC evoluído sob ação do reservatório, representado pelas paredes da cavidade, encontramos um resultado analítico para a função de Glauber-Sudarshan e para a função de Wigner. Apresentamos também alguns resultados numéricos para a função de Wigner, para a fidelidade levando em conta parâmetros realistas retirados de experimentos recentes em eletrodinâmica quântica de cavidades. Observamos que este estado apresenta valores negativos na função de Wigner, que é um efeito puramente quântico, e se preserva, visto nos resultados numéricos na fidelidade, no intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \lesssim 1.0$ e no intervalo do parâmetro de compressão $\xi \lesssim 1.0$ próximo a 90 %.

O procedimento do teletransporte do estado do campo preparado na primeira cavidade para uma segunda cavidade foi o seguinte: Um segundo átomo de dois níveis inicialmente preparado

na superposição de seus dois estados possíveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ por uma zona de Ramsey interagindo numa interação dispersiva com o estado do campo preparado na segunda cavidade no estado coerente comprimido $|\xi, \alpha\rangle_2$ e logo em seguida interagindo com o estado do campo preparado na primeira cavidade e por fim passando por uma última zona de Ramsey, então o estado do campo preparado na primeira cavidade, o estado do campo na segunda cavidade e o estado do segundo átomo ficam emaranhados. Fizemos uma operação unitária de descompressão através do operador de compressão $S^{-1}(\xi, \alpha)$ seguida da operação de inversão de deslocamento através do operador de deslocamento de Glauber $D^{-1}(\alpha)$ no estado do campo na primeira cavidade, o que faz que o estado do campo na primeira cavidade fica na superposição do estado de vácuo $|0\rangle$ com um estado diferente do vácuo $|-2\alpha\rangle$.

Para discriminarmos o estado do campo na primeira cavidade para sabermos o estado do campo na segunda cavidade, supomos um feixe de átomos com todos os átomos no estado fundamental e interagimos este feixe com o estado do campo na primeira cavidade. E, a idéia é simples, pois se todos os átomos do feixe de átomos forem detectados no estado fundamental o estado do campo na primeira cavidade estará no estado de vácuo $|0\rangle$ ou se, pelos menos um átomo do feixe for detectado no estado excitado, o estado do campo na primeira cavidade estará no estado diferente do vácuo $|-2\alpha\rangle$, discriminando o estado do segundo átomo fazendo uma detecção numa medida seletiva, então, o estado do campo na segunda cavidade é conhecido em um estado campo na superposição de estados coerentes comprimidos em que 50 % das possibilidades o estado do campo na segunda cavidade será igual ao estado do campo preparado na primeira cavidade.

Feito o teteletransporte observamos que os resultados numéricos na fidelidade chega a 90 %, no intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \lesssim 1.0$ e no intervalo do parâmetro de compressão $\xi \lesssim 1.0$. Notamos que quando o parâmetro de compressão é $\xi = 0.5$ a fidelidade do estado do campo para $\alpha = 0.5$ é maior que a fidelidade do estado quando $\alpha = 1.0$ como no caso do teletransporte do estado do campo na superposição de estados coerentes [53] e justamente o contrário, visto na Figura 2.5b, ou seja, a fidelidade do estado do campo para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ é maior que a fidelidade do estado quando o parâmetro de deslocamento for $\alpha = 0.5$ fixando parâmetro de compressão $\xi = 1.0$, esse comportamento é porque a coerência

da superposição de estados é sensível ao número médio de fótons, e o número médio de fótons para o campo na SECC com o parâmetro de compressão $\xi = 1.0$ e de deslocamento $\alpha = 0.5$ é maior que o número médio de fótons do campo na SECC para o parâmetro de deslocamento $\alpha = 1.0$ e de compressão $\xi = 1.0$. Por outro lado, nossos cálculos numéricos para a fidelidade mostram que quando o parâmetro de deslocamento $\alpha \gtrsim 1.5$ o processo de teletransporte se torna impraticável pois a fidelidade é muito baixa. É também verificando que, ao fixar o parâmetro de compressão $\xi = 1$, o número médio de fótons para o campo na SECC se torna crescente para o parâmetro de deslocamento $\alpha > 1.0$ resultando numa baixa fidelidade.

Enquanto que o efeito quântico de apresentar colapso e ressurgimento na inversão atômica foi para o intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \gtrsim 5.0$ e do parâmetro de compressão $\xi \lesssim 1.0$ no estado do campo na SECC preparado cavidade. Efeitos quânticos também se manifestam na evolução das propriedades dinâmicas deste estado preparado na cavidade caracterizado na estatística de fótons sub-Poissoniana ($Q(t) < 0$) no intervalo do parâmetro de deslocamento $\alpha \gtrsim 2.0$ e no intervalo do parâmetro de compressão de $0.25 \lesssim \xi \lesssim 0.75$ em condições ideais. Como exemplo, verificamos com o parâmetro de deslocamento $\alpha = 2.5$ e o com o parâmetro de compressão $\xi = 0.5$, pertencentes aos intervalos mencionados, o campo preparado na SECC na cavidade é caracterizado na estatística sub-Poissoniana em um intervalo de tempo considerado para $\Gamma t \simeq 0.4$, visto que a constante de dissipação da cavidade é $\Gamma \simeq 10^2 \text{ s}^{-1}$ com uma temperatura próxima de 0.9 K (que corresponde ao número médio de fótons térmico $\bar{n}_\omega = 0.4$ dentro da cavidade).

Verificamos, ainda, que há compressão na quadratura X_1 do campo preparado na cavidade para o parâmetro de deslocamento $\alpha \lesssim 1.0$ com o parâmetro de compressão $0.5 \lesssim \xi \lesssim 1.0$ e que há compressão na quadratura X_2 do campo para o parâmetro de deslocamento $0.5 \lesssim \alpha \lesssim 1.2$ com o parâmetro de compressão pequeno em torno de $\xi \lesssim 0.2$ em condições ideais.

Investigamos também a robustez dos vários estados do campo preparado na superposição de estados quando evoluídos em um reservatório térmico à temperatura 0 K e à temperatura não nula, por meio da entropia linear. As superposições estudadas aqui foram a superposição de estados coerentes (SEC), o estado coerente ortogonal (ECO), o estado coerente comprimido (ECC), o estado coerente comprimido ortogonal (ECCO), que introduzimos para generalizar

o ECO e o estado QBIT dado pela superposição de estado de zero e de um fóton. Através da análise da entropia linear, mostramos que, quando se fixa o número médio de fótons para os estados de superposição, o estado coerente ortogonal é o mais robusto contra a inevitável interação com o meio ambiente, diminuindo num ritmo mais lento do que os outros estados, mesmo quando a temperatura não nula é levada em conta. Este ritmo mais lento, mostrado pelo ECO, embora impressionante à primeira vista, é explicado quando olhamos suas amplitudes de probabilidade: uma vez que uma das componentes da superposição contribui muito pouco, o ECO é quase um estado coerente, que perde a excitação coerentemente à temperatura nula e a taxa mais baixa à temperaturas não nula. Vimos ainda que o estado QBIT, igualmente pesado, mantém maior grau de pureza sob influência do reservatório, em relação aos estados dos campos estudados neste trabalho, quando os campos tiverem o mesmo número médio de fótons inicial.

Mostramos que os feitos quânticos com o passar do tempo com dissipação e com aumento da temperatura, como esperados, tende a desaparecerem bem como a degradação do estado. O mais importante para o campo preparado na SECC na cavidade é que há efeitos quânticos, tanto na função de Wigner, na inversão atômica, quanto nas propriedades dinâmicas, e a fidelidade se mantém alta para parâmetros realistas em intervalos de tempos satisfatórios.

Apêndices

Apêndice A - Uma expressão para calcular interações efetivas

Para calcular interações efetivas a partir de hamiltonianos que apresentam todos os seus termos altamente oscilantes iremos recorrer a uma expressão criada por James e Jerke [8]. Para isto, faremos uma análise do hamiltoniano $H_2(t)$ por meio da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H_2(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{A1})$$

em que $H_2(t)$ depende necessariamente de t . Integrando a Eq. (A1) temos que

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} \left(|\Psi(0)\rangle + H_2(t) \int_0^t H_2(t') |\Psi(t')\rangle dt' \right), \quad (\text{A2})$$

substituindo a Eq. (A2) na Eq. (A1) temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \frac{H_2(t)}{i\hbar} |\Psi(0)\rangle + \frac{H_2(t)}{i\hbar} \int_0^t H_2(t') |\Psi(t')\rangle dt'. \quad (\text{A3})$$

A partir da operação realizada sobre a equação de Schrödinger podemos realizar um procedimento similar à aproximação de onda girante. Ou seja, iremos eliminar todos os termos oscilantes do lado direito da Eq. (A3), os quais estão associados à interação efetiva do sistema. Podemos, então, eliminar o termo oscilante $H_2(t) |\Psi(0)\rangle$ pois a dinâmica do sistema não muda e é possível realizar uma aproximação sobre $\int_0^t H_2(t') |\Psi(t')\rangle dt'$, retirando do integrando $|\Psi(t')\rangle$ supondo que o estado varia lentamente. Assim teremos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \left(\frac{H_2(t)}{i\hbar} \int_0^t H_2(t') dt' \right) |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{A4})$$

portanto,

$$\frac{H_2(t)}{i\hbar} \int_0^t H_2(t') dt' \stackrel{AOG}{=} H_{eff}, \quad (\text{A5})$$

sendo que a sigla *AOG* (Aproximação de Onda Girante), sobre o sinal de igualdade, indica que os termos oscilantes existentes em $\frac{H_2(t)}{i\hbar} \int_0^t H_2(t') dt'$ devem ser retirados.

Apêndice B - Formalismo de Glauber

Para estudar a evolução temporal do campo preparado na cavidade sob influência de um reservatório, vamos deduzir as principais equações do formalismo de Glauber a serem usadas para o tratamento de dissipação no processo de engenharia de preparação do campo em EQC. Vamos calcular a função característica, então calcularemos a função P Glauber-Sudarshan e a função de Wigner com dependência temporal.

O operador densidade [6] pode ser expandido em termos dos estados coerentes por:

$$\rho(\alpha) = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (\text{B1})$$

sendo $P(\alpha)$ a representação P de Glauber-Sudarshan, enquanto que a função característica é definida por:

$$C(\eta) = Tr \left\{ \rho(\alpha) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}. \quad (\text{B2})$$

Substituindo a Eq. (B1) na Eq. (B2), e como o estado coerente é auto-estado do operador de aniquilação, i.e., $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, a função característica pode ser escrita como:

$$C(\eta) = \int P(\alpha) e^{\eta\alpha^*} e^{-\eta^*\alpha} d^2\alpha \quad (\text{B3})$$

e, portanto, a função característica forma um par de transformada de Fourier com a função $P(\alpha)$ de Glauber-Sudarshan então,

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C(\eta) e^{\alpha\eta^* - \alpha^*\eta} d^2\eta. \quad (\text{B4})$$

Em sistemas abertos com dependência temporal a função característica pode ser escrita na forma normal ordenada por:

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ \rho_{AR}(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}, \quad (\text{B5})$$

onde $\rho_{AR}(t)$ representa o operador densidade do sistema e do reservatório no tempo t . Sendo $U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$ o operador de evolução temporal, e sabendo que $U(t)U^\dagger(t) = \hat{I}$, então

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ U(t) \rho_{AR}(0) U^\dagger(t) e^{\eta a^\dagger} U(t) U^\dagger(t) e^{-\eta^* a} \right\}, \quad (\text{B6})$$

como $Tr \{ABC\} = Tr \{CAB\} = Tr \{BCA\}$, então

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ U^\dagger(t) e^{\eta a^\dagger} U(t) U^\dagger(t) e^{-\eta^* a} U(t) \rho_{AR}(0) \right\}, \quad (\text{B7})$$

da identidade $e^{\xi A} F(B) e^{-\xi A} = F(e^{-\xi A} B e^{\xi A})$, $U^\dagger(t) \eta a^\dagger U(t) = \eta a^\dagger(t)$ e $U^\dagger(t) \eta^* a U(t) = \eta^* a(t)$. A função característica será:

$$C(\eta, t) = Tr \left\{ \rho_{AR}(t) e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\} = Tr \left\{ \rho_{AR}(0) e^{\eta a^\dagger(t)} e^{-\eta^* a(t)} \right\}, \quad (\text{B8})$$

sendo que operador $a(t)$ [53] é encontrado da equação de Heisenberg $\frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [a(t), H]$,

$$a(t) = w(t)a + \sum_k v_k(t) b_k, \quad (\text{B9})$$

sendo

$$w(t) = \exp \left[- \left(\frac{\Gamma}{2} + i\omega_\ell \right) t \right] \quad (\text{B9a})$$

e

$$v_k(t) = \frac{i\lambda \exp \left[- \left(\frac{\Gamma}{2} + i\omega_\ell \right) t \right] - \exp(\omega_k t)}{\frac{\Gamma}{2} + i(\omega_k - \omega_\ell)} \quad (\text{B9b})$$

sendo Γ constante de dissipação da cavidade e hamiltoniano H é dado pela Eq. (2.1). Note que a frequência do campo na cavidade é modificada para $\omega_\ell = \omega + \chi$ quando a interação átomo-campo ocorre com o átomo no estado excitado e se mantém $\omega_\ell = \omega$ quando o átomo está no estado fundamental.

Substituindo $a(t)$ dada pela Eq. (B9) na Eq. (B8), a função característica ficará

$$\begin{aligned} C(\eta, t) &= Tr_{AR} \left\{ \rho_{AR}(0) e^{\eta(w^*(t)a^\dagger + \sum_k v_k^*(t)b_k^\dagger)} e^{-\eta^*(w(t)a + \sum_k v_k(t)b_k)} \right\} \\ &= Tr_{AR} \left\{ \rho_A(0) e^{\eta w^*(t)a^\dagger} e^{-\eta^* w(t)a} \rho_R(0) e^{\eta \sum_k v_k^*(t)b_k^\dagger} e^{-\eta^* \sum_k v_k(t)b_k} \right\} \\ &= Tr_A \rho_A(0) e^{\eta w^*(t)a^\dagger} e^{-\eta^* w(t)a} C_R(\eta, t), \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

sendo a função característica do reservatório é dada por:

$$\begin{aligned} C_R(\eta, t) &= Tr_R \left\{ \rho_R(0) e^{\eta \sum_k v_k^*(t)b_k^\dagger} e^{-\eta^* \sum_k v_k(t)b_k} \right\} \\ &= Tr_R \prod_k \left\{ \rho_R(o) e^{\eta v_k^*(t)b_k^\dagger} e^{-\eta^* v_k(t)b_k} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

mas

$$\rho_R(o) = \int P(\beta_k) |\beta_k\rangle \langle \beta_k| d^2\beta_k, \quad (\text{B12})$$

e a função característica do reservatório será dada por:

$$C_R(\eta, t) = Tr_R \prod_k \int P(\beta_k) |\beta_k\rangle \langle \beta_k| e^{\eta v_k^*(t)b_k^\dagger} e^{-\eta^* v_k(t)b_k} d^2\beta_k, \quad (\text{B13})$$

tomando o traço na Eq. (B13) temos

$$C_R(\eta, t) = \prod_k \int P(\beta_k) e^{\eta v_k^*(t) \beta_k^*} e^{-\eta^* v_k(t) \beta_k} d^2 \beta_k, \quad (\text{B14})$$

Para um modo a função $P(\beta_k)$ [41] do reservatório, é dada por:

$$P(\beta_k) = \frac{e^{-\frac{|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}}}{\pi \langle n_k \rangle}, \quad (\text{B15})$$

sendo $\langle n_k \rangle = (e^{\hbar \omega_k / K_B T} - 1)^{-1}$ o número médio de fótons térmicos dentro da cavidade.

Substituindo a Eq. (B15) na Eq. (B14) e esta na Eq. (B10) a função característica

$$C(\eta, t) = \text{Tr}_{A\rho_A}(0) e^{\eta w^*(t) a^\dagger} e^{-\eta^* w(t) a} \prod_k \int d^2 \beta_k \frac{e^{-\frac{|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}}}{\pi \langle n_k \rangle} e^{\eta v_k^*(t) \beta_k^*} e^{-\eta^* v_k(t) \beta_k} \quad (\text{B16})$$

usando a identidade $\int d^2 \beta e^{-a|\beta|^2 - b\beta - c\beta^*} = \frac{\pi}{a} e^{\frac{bc}{a}}$ teremos a função característica dada por:

$$C(\eta, t) = \text{Tr}_{A\rho_A}(0) e^{\eta w^*(t) a^\dagger} e^{-\eta^* w(t) a} e^{-|\eta|^2 \sum_k |v_k(t)|^2 \langle n_k \rangle}. \quad (\text{B17})$$

De posse da função característica, podemos encontrar o operador densidade na representação diagonal do estado coerente com dependência temporal de acordo com a Eq. (B1) por:

$$\rho(\alpha, t) = \int P(\alpha, t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \quad (\text{B18})$$

previamente calculada a função $P(\alpha, t)$ de Glauber-Sudarshan de acordo com a Eq. (B4) por:

$$P(\alpha, t) = \frac{1}{\pi^2} \int C(\eta, t) e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} d^2 \eta, \quad (\text{B19})$$

e a função de Wigner [6] $W(\gamma, t)$ dada por:

$$W(\gamma, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta e^{\eta^* \gamma - \eta \gamma^*} C(\eta, t) e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}. \quad (\text{B20})$$

Apêndice C - Fidelidade e Entropia Linear

Podemos, através da fidelidade, observar o quanto um estado evoluído se afasta do estado original e através da entropia linear verificar o grau de pureza de um estado evoluído. Iremos, então, demonstrar a seguir, que tanto a fidelidade quanto a entropia linear podem ser escritas em termos da função de Wigner

A fidelidade é definida por:

$$\mathbf{F} = Tr [\rho(\alpha, t_0) \rho(\alpha, t)], \quad (\text{C1})$$

substituindo o operador densidade $\rho(\alpha, t_0)$ e $\rho(\alpha, t)$ de acordo com a Eq. (B18) na Eq. (C1) e nesta colocando a função $P(\alpha, t)$ de Glauber-Sudarshan dada pela Eq. (B19) a fidelidade ficará

$$\mathbf{F} = Tr \frac{1}{\pi^4} \int \int \int \int d^2\gamma d^2\beta d^2\eta C(\eta, t) e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} |\gamma\rangle \langle\gamma| C(\eta', t_0) e^{\beta\eta'^* - \beta^*\eta'} |\beta\rangle \langle\beta|, \quad (\text{C2})$$

tomando o traço teremos,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\pi^4} \int \int \int \int d^2\gamma d^2\beta d^2\eta d^2\eta' C(\eta, t) C(\eta', t_0) e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{\beta\eta'^* - \beta^*\eta'} \langle\gamma|\beta\rangle \langle\beta|\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{\pi^4} \int \int \int \int d^2\gamma d^2\beta d^2\eta d^2\eta' C(\eta, t) C(\eta', t_0) e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{\beta\eta'^* - \beta^*\eta'} e^{-|\gamma|^2 - |\beta|^2 + \gamma^*\beta + \beta^*\gamma} \\ &= \frac{1}{\pi^4} \int \int \int \int d^2\gamma d^2\beta d^2\eta d^2\eta' C(\eta, t) C(\eta', t_0) e^{-|\gamma|^2 + \gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{-|\beta|^2 + (\eta'^* + \gamma^*)\beta + (-\eta' + \gamma)\beta^*}, \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

da identidade $\int d^2\beta e^{-a|\beta|^2 - b\beta - c\beta^*} = \pi e^{\frac{bc}{a}}/a$ a fidelidade será dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\pi^3} \int \int \int d^2\gamma d^2\eta d^2\eta' C(\eta, t) C(\eta', t_0) e^{-|\gamma|^2 + \gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{(\eta'^* + \gamma^*)(-\eta' + \gamma)} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int \int \int d^2\gamma d^2\eta d^2\eta' C(\eta, t) C(\eta', t_0) e^{\gamma\eta^* - \gamma^*\eta} e^{\gamma\eta'^* - \gamma^*\eta'} e^{-|\eta'|^2}, \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

como $W(\gamma, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta e^{\eta^*\gamma - \eta\gamma^*} C(\eta, t) e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}$ e $|\eta'| = |\eta|$ a fidelidade será

$$\mathbf{F} = \pi \int d^2\gamma W(\gamma, t) W(\gamma, t_0). \quad (\text{C5})$$

Fazendo $t_0 = t$ na Eq. (C1) a entropia linear do estado evoluído em termo da função de Wigner será dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 1 - Tr \rho^2(\alpha, t) \\ &= 1 - \pi \int d^2\gamma W^2(\gamma, t). \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

Bibliografia

- [1] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [2] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996), L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev.* **A53**, 1295 (1996).
- [3] R. Eijnisman e P. Nussenzveig, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 90 (1997).
- [4] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **50**, 1903 (1983).
- [5] W. Herbert, T. H. V. Benjamin, G. E. Berthold e B. Thomas, Rep. Prog. Phys. **69**, 1325 (2006).
- [6] M. O. Scully e M. S. Zubary, Quantum Optics (Cambridge Univ. press, 1997).
- [7] O. P. Fabiano, Tese de doutorado, Engenharia de Interações e de Reservatórios, Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos, (2008).
- [8] D. F. V. James e J. Jerke, Canadian Journal of Physics **85**, 625 (2007).
- [9] T. F. George e H. F. Arnouldos (eds) (2002) , Theoretical Physics, Part 2 (Horizons on World Physics vol. 243) (NewYork: NewScience).
- [10] D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **33**, 1397 (1974).
- [11] J. Peerina, V. Peerinová e J. Kodousek, Opt. Commun. **49**, 210 (1984).
- [12] H. J. Kimble, M. Dagenais e L. Mandel Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977).
- [13] D. J. Wineland, J. J. Bollinger e W. M. Itano, Phys. Rev. **A50**, 67 (1994).

- [14] M. A. Nielsen , I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Publisher: Cambridge University Press; 1 edition (September 2000).
- [15] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Józsa, A. Peres e W. Wootters , Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [16] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 25 (1982).
- [17] S. L. Braunstein e H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).
- [18] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. **A60**, 2759 (1999);
C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, R. M. Serra, e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. **A68**,
R061801 (2003).
- [19] N. G. de Almeida, R. Napolitano e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. **A62**, R10101 (2000).
- [20] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. **A50**, R895
(1994).
- [21] D. Bowmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eible, H. Weinfurter e A. Zeilinger, Nature
(London) **390**, 575 (1997).
- [22] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik,
Science **282**, 706 (1998).
- [23] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki e A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005).
- [24] J. F. Sherson, H. Krauter, R. K. Olsson, B. Julsgaard, K. Hammerer, I. Cirac e E. S.
Polzik, Nature (London) **443**, 557 (2006).
- [25] M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. **A55**, R3287 (1997).
- [26] M. Ikram, S.Y. Zhu e M. S. Zubairy, Phys. Rev. **A62**, 022307 (2000).
- [27] J. M. Raimond, M. Brune, e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **79**, 1964 (1997); M. Weidinger,
B. T. H. Varcoe, R. Heerlein, e H. Walther, *ibid.* **82**, 3795 (1999).
- [28] G. Pires, N. G. de Almeida, A. T. Avelar e B. Baseia, Phys. Rev. **A70**, 025803 (2004).

- [29] S. B. Zheng, Phys. Rev. **A69**, 064302 (2004).
- [30] G. Pires, A. T. Avelar, B. Baseia e N. G. Almeida, Phys. Rev. **A71**, R060301 (2005).
- [31] N. G. de Almeida, M. H. Y. Moussa e R. D. J. Napolitano, Phys. Rev. **A80**, 033801 (2009).
- [32] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. **A64**, R050301 (2001).
- [33] D. Gottesman e I. L. Chuang, Nature (London) **402**, 390 (1999).
- [34] J. S. Sales e N. G. de Almeida, Phys. Rev. **A83**, 062121 (2011).
- [35] J. Chen, Q. Gu e W. Peng, Modern Applied Science **3**, 37 (2009).
- [36] J. S. Sales, L. F. Silva e N. G. Almeida, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 245504 (2010).
- [37] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [38] H. P. Yuen, Phys. Rev. **A13**, 2226 (1976).
- [39] S. B. Zheng e G. C. Guo, Chin. Phys. Lett. **14**, 273 (1997).
- [40] P. B. Monteiro, B. Baseia, A. T. Avelar e J. M. C. Malbouisson, Braz. J. Phys. **35**, 369 (2005).
- [41] L. Mandel e E. Wolf, Optical Coherence e Quantum Optics, Editora Cambridge (1995).
- [42] J. I. Kim, K. M. F. Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, Phys. Rev. Lett. **82**, 4737 (1999).
- [43] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Editora John Wiley & Sons (1990).
- [44] Z. Z. Xin, D. B. Wang, M. Hirayama e K. Matumoto, Phys. Rev. **A50**, 2865 (1994).
- [45] Y. A. Barbosa, G. C. Marques e B. Baseia, Phys. Rev. **A280**, 346 (2000).
- [46] M. Paulina e A. M. Tudor, Phys. Rev. **A47**, 4474 (1993).

- [47] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [48] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **79**, 1964 (1996)
- [49] J. S. Sales, L. F. Silva e N. G. de Almeida, Phys. Rev. **A83**, 034302 (2011).
- [50] C. C. Gerry e H. Ghost, Phys. Lett. **A229**, 17 (1982).
- [51] H. J. Carmichael e D. F. Walls, J. Phys. **B9**, 1199 (1976).
- [52] L. Y. Hu e H. Y. Fan, Phys. Scr. **79**, 035004 (2009).
- [53] I. P. de Queirós , W. B. Cardoso e N. G. de Almeida J. Phys. **B40**, 21 (2007).