Universidade Federal de Goiás

Campus Catalão

Curso de Matemática

ANÁLISE: UMA INTRODUÇÃO

Prof. André Luiz Galdino

Ouvidor

2011

Sumário

Introdução

Além da libertação da geometria e da libertação da álgebra, um terceiro movimento matemático profundamente significativo teve lugar no século XIX. Esse terceiro movimento, que se materializou lentamente, tornou-se conhecido como *aritmetização da análise* .

Quando se entende apenas parcamente a teoria subjacente a uma certa operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e, talvez, ilógica . O executante, desinformado das possíveis limitações da operação, é levado a usá-la em exemplos nos quais ela não se aplica necessariamente. Quase todo dia os professores de matemática se deparam com erros dessa natureza cometidos por alunos. Assim, um aluno de álgebra elementar, convencido firmemente de que $a^0 = 1$ para todo número real a, põe que $0^0 = 1$, ao passo que outro admite que a equação ax=b sempre tem exatamente uma única solução real para um par de números reais dados a e b. Além disso, um aluno que faz trigonometria pode pensar que a fórmula

$$\sqrt{1 - sen^2 x} = cos x$$

se verifica para todo x. Um aluno de cálculo, que desconheça as integrais impróprias, pode obter um resultado errado aplicando de maneira aparentemente correta as regras formais da integração ou pode chegar a resultados paradoxais aplicando a certas séries infinitas convergentes resultados que só valem para séries infinitas absolutamente convergentes. Foi isso essencialmente o que aconteceu com a análise durante o século seguinte à invenção do cálculo. Tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto, e carecendo de um entendimento real dos seus fundamnetos, os matemáticos manipularam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição. O resultado só poderia ser uma acumulação de absurdos, até que, como reação natural ao emprego desordenado do intucionismo e do formalismo, alguns matemáticos conscieciosos se sentiram na obrigação de tentar a difícil tarefa de estabelecer uma fundamentação rigorosa para a análise.

A primeira sugestão de um remédio real para o estado insatisfatório dos fundamentos da análise veio de Jean-le-Rond d'Alembert(1717-1783), ao observar muito corretamente, em 1754, que era necessária uma teoria dos limites; mas até 1821 não se verificou um desenvolvimento sólido dessa teoria. O mais antigo matemático de primeiro plano a efetivamente tentar uma rigorização do cálculo foi o ítalo-francês Joseph Louis Lagrage(1736-1813). A tentativa, baseada na representação de uma função por uma expansão em série de Taylor, ficou muito longe de ser bem sucedida, pois ignorava questões necessárias sobre convergência e divergência. Essa tentativa foi publicada em 1797 no monumental trabalho de Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques*. Por ser talvez Lagrange o matemático mais importante do século XVIII, seu trabalho teve uma influência profunda nas pesquisas matemáticas posteriores; com o trabalho de Lagrange teve início a longa e difícil tarefa de banir o intucionismo e o formalismo da análise.

No século XIX o corpo da análise continuou a se erguer, mas sobre alicerces cada vez mais profundos. Sem dúvida, deve-se a Gauss o mérito de ter laborado mais do que qualquer matemático de seu tempo para romper com as idéias intuitivas e estabelecer padrões de rigor mais elevados para a matemática. Ademais , no tratamento das séries hipergeométricas feito por ele em 1812 encontra-se o que geralmente se considera como a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da questão da convergência de uma série infinita.

O primeiro grande progresso se deu em 1821, quando o matemático francês Augustin-Louis Cauchy(1789-1857) pôs em prática e com êxito a sugestão de d'Alembert de desenvolver uma teoria dos limites aceitável e definir então continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos do conceito de limite. São essas definições, em essência, embora formuladas mais cuidadosamente que encontramos hoje nos textos elememtares de cálculo. Certamente, o conceito de limite é essencial e indispensável para o desenvolvimento da análise, pois convergência e divergência de séries também dependem desse conceito. O rigor de Cauchy inspirou outros matemáticos a se unirem no esforço para escoimar a análise do formalismo e do intucionismo.

A procura de um entendimento mais profundo dos fundamentos da análise ganhou um relevo extraordinário em 1874 com a publicação de um exemplo, da lavra do matemático alemão Karl Weierstrass, de uma função contínua não-derivável ou, o que é equivalente, de uma curva contínua que não admite tangente em nenhum de seus pontos. Georg Bernhard Riemann inventou uma função que é contínua em todos os valores irracionais da variável mas descontínua para os valores racionais. Exenplos como esses pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a análise. A teoria dos limites fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. De fato, o sistema dos números reais tinha sido mais ou menos admitido sem maiores cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. E é claro que a teoria dos limites, continuidade e diferenciablidade dependem mais de propriedades recônditas dos números do que se supunha então. Assim, Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança. Esse notável programa, conhecido como *arimetização da análise*, revelou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores, e hoje a análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais.

Os matemáticos foram consideravelmente além do estabelecimento do sistema dos números reais como o fundamento da análise. Pode-se também fazer com que a geometria euclidiana se baseie no sistema dos números reais através de sua interpretação analítica e foi demonstrado pelos matemáticos que a maior parte dos ramos da geometria é consistente se a geometria euclidiana é consistente. Ademais, como o sistema dos números reais , ou alguma parte dele, pode servir para interpretar tantos ramos da álgebra, parece evidente que também se pode fazer depender uma boa parte da álgebra desse sistema. De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da matemática.

Uma vez que se pode fazer com o grosso da matemática existente se alicerce no sistema dos números reais, é natural a curiosidade de saber se seus fundamentos podem penetrar mais fundo ainda. Nos fins do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind(1831-1916), Georg

Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932), esses fundamentos se assentaram no muito mais simples e básico sistema dos números naturais. Isto é, esses matemáticos mostraram como o sistema dos números reais, e portanto o grosso da matemática, pode ser deduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais. Então, no princípio do século XX, mostrou-se que o sistema dos números naturais pode ser definido em termos de conceitos da teoria de conjuntos, e assim o grosso da matemática pode ser fundamentado sobre uma plataforma na teoria dos conjuntos. Especialistas em lógica, como Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) empenharam-se em aprofundar ainda mais esses fundamentos, deduzindo a teoria dos conjuntos de um embasamento no cálculo proposicional da lógica, embora nem todos os matemáticos entendam que esse passo tenha sido dado com êxito.

Texto retirado do livro
Introdução à História da Matemática
de Howard Eves.

Capítulo 1

Números Reais

Como vimos na seção anterior o conjunto dos números reais é fundamental no estudo da matemática, em particular da análise. Com base nisto faremos uma lista das principais propriedades dos números reais, as quais serão admitidas sem serem demonstradas. Porém, antes definiremos os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

1.1 Números naturais e inteiros

O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ é usado para contagens. De tão natural, $\mathbb{N}$ é chamado de conjunto dos números naturais, o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática.

Admitiremos conhecidos os conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (dos números inteiros) bem como suas propriedades algébricas de soma e multiplicação e sua relação de ordem $\leq$.

No conjunto $\mathbb{N}$ valem dois princípios fundamentais: o "*Princípio da Boa Ordem*" e o "*Princípio de Indução*", do qual falaremos com mais detalhes mais adiante. Também provaremos que estes dois princípios são equivalentes.

Princípio da Boa Ordem: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui elemento mínimo, ou seja, se $B \subset \mathbb{N}$ com $B \neq \emptyset$, então existe $n \in B$ tal que $n \leq m$ para todo $m \in B$.

Princípio de Indução: Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $1 \in A$;

(b) $n \in A$ implica que $n + 1 \in A$. Então $A = \mathbb{N}$.

O Princípio da Indução (e suas variantes) é usado para demonstrar que certas propriedades são verdadeiras para todo número natural. A estratégia é a seguinte. "Definimos o conjunto A constituído pelos números naturais que possuem uma certa propriedade P. A seguir, mostra-se que A satisfaz (a) e (b) do Princípio de Indução. Daí, concluímos que $A = \mathbb{N}$ e, portanto, que P é verificada por todo número natural". Este tipo de argumento é chamado de demonstração por indução.

Teorema 1.1.1 [Boa Ordem = Indução]: Vale o Princípio da Boa Ordem se, e somente se, vale o Princípio de Indução.

Demonstração: Suponha válido o "Princípio da Boa Ordem". Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo (a) e (b) do Princípio de Indução. Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \mathbb{N}$. Isto significa que existe algum elemento de $\mathbb{N}$ que não pertence a A e, portanto, o conjunto $B = A^c$ é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordem, B possui um elemento mínimo $m \in B$. Com certeza $m > 1$ pois como $1 \in A$, $1 \notin B = A^c$. Assim, $m - 1$ é um natural menor que m. Pela minimalidade de m, temos que $m - 1 \notin B$ e portanto $m - 1 \in A$. De (b) concluímos que $m = (m - 1) + 1 \in A$, o que é absurdo.

Suponha válido o "Princípio da Indução". Seja $B \subset \mathbb{N}$ não vazio. Suponhamos por absurdo que B não possua elemento mínimo. Em particular, $1 \in B$ (senão 1 seria elemento mínimo de B). Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N}; n < m \forall m \in B\}$$

Observamos inicialmente que $A \cap B = \emptyset$. De fato, se $A \cap B \neq \emptyset$, então existe $n \in A \cap B$. Tendo $n \in A$ temos também $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, em particular, tomando $m = n \in B$ obtemos $n < n$ o que é absurdo. Concluímos que $A \cap B = \emptyset$.

Mostraremos a seguir que $A = \mathbb{N}$. Vejamos agora que isto é suficiente para concluir a demonstração. Neste caso temos $\emptyset = A \cap B = \mathbb{N} \cap B = B$ contradizendo a hipótese $B \neq \emptyset$.

Mostremos, por indução, que $A = \mathbb{N}$. Já sabemos que $1 \notin B$ e portanto $1 < m$ qualquer que seja $m \in B$, ou seja, $1 \in A$. Tomemos $n \in A$. Por definição de A temos $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, logo $n + 1 \leq m$ para todo $m \in B$. Se $n + 1 \in B$ então $n + 1$ é um elemento mínimo de B. Como, por hipótese, B não possui elemento mínimo, segue que $n+1 \notin B$ e portanto $n+1 < m$ para qualquer $m \in B$. Concluímos que $n+1 \in A$. Pelo Princípio da Indução $A = \mathbb{N}$. ■

1.2 Números racionais

Os números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$, são chamados de números racionais e representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Podemos escrever esta definição como

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

É fácil o leitor notar que $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$ que por sua vez contém $\mathbb{N}$.

Façamos agora, um estudo, pouco mais detalhado, sobre os números racionais.

Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois números racionais quaisquer, a soma e o produto de tais números são dados por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{db}$$

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dizemos que o número racional $\frac{p}{q}$ é positivo se $p.q \in \mathbb{N}$. Se $p.q \in \mathbb{N}$ e $p \neq 0$ dizemos, então, que $\frac{p}{q}$ é estritamente positivo. O número racional a é estritamente menor que o número racional b, ou que b é estritamente maior que a, e escrevemos $a < b$, ou respectivamente $b > a$, se existe um número racional t estritamente positivo tal que $b = a + t$. A notação $a \leq b$ é usada para indicar a afirmação "$a < b$ ou $a = b$". A notação $a \geq b$ é equivalente a $b \leq a$. Observe que a positivo equivale a $a \geq 0$ e que se $a \leq 0$, dizemos que a é negativo.

Considerando os números racionais x, y e z, a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as seguintes propriedades:

Associativa

(A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (M1) $(xy)z = x(yz)$

Comutativa

(A2) $x + y = y + x$ (M2) $xy = yx$

Existência de elemento neutro

(A3) $x + 0 = x$ (M3) $x \cdot 1 = x$

Existência de oposto

(A4) Para todo racional x existe um único racional y tal que $x+y=0$. Tal y denomina-se *oposto* de x e indica-se por $-x$. Assim, $x + (-x) = 0$.

Existência de inverso

(M4) Para todo racional $x \neq 0$ existe um único racional y tal que $x \cdot y = 1$. Tal y denomina-se *inverso* de x e indica-se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Assim, $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributiva da multiplicação em relação à adição

(D) $$x(y + z) = xy + xz.$$

Reflexiva

(O1) $$x \leq x.$$

Anti-simétrica

(O2) $$x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ então } x = y.$$

Transitiva

(O3) $$x \leq y \text{ e } y \leq z \text{ então } x \leq z.$$

Quaisquer que sejam os racionais x e y

(O4) $$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Compatibilidade da ordem com a adição

(OA) $$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém.

Compatibilidade da ordem com a multiplicção

(OM) $$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém.

Nota 1.2.1:

1. O símbolo ($\Rightarrow$) que aparece em (OA) e (OM) significa "então" ou "implica".

2. Seja K um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos e suponhamos que em K estejam definidas duas operações indicadas por $+$ e $\cdot$; se a terna (K,+,$\cdot$) satisfaz as propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) e (D), diremos que (K,+,$\cdot$) é um *corpo*. Se, além disso, K estiver definida uma relação ($\leq$) de modo que a (K,+,$\cdot$, $\leq$) satisfaça todas as 15 propriedades anteriormente listadas, então diremos que (K,+,$\cdot$, $\leq$) é um *corpo ordenado*. Consequentemente ($\mathbb{Q}$,+,$\cdot$, $\leq$) é um corpo ordenado, ao passo que ($\mathbb{Z}$,+,$\cdot$, $\leq$) não é um corpo ordenado, pois é fácil ver que (M4) não se verifica.

1.3 Números Irracionais

A seguir, vamos mostrar que

Lema 1.3.1:

Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2. Em outras palavras, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Antes de demonstrar o Lema 1.3.1, vamos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.3.2:

(1) Se "a" for ímpar, então a^2 também é ímpar;

(2) Se a^2 for par, então "a" também é par.

Demonstração:

1. Como a é ímpar, a é da forma $a = 2k + 1$, com k inteiro. Então:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

   como $2k^2 + 2k$ é inteiro, resulta a^2 ímpar.

2. Por hipótese, a^2 é par. Se a fosse ímpar, por (1), teríamos a^2 também ímpar, que contraria a hipótese. Assim,

$$a^2 \quad par \quad \Rightarrow \quad a \quad par.$$

■

Demonstração do Lema 1.3.1:

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, que exista uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que $(\frac{a}{b})^2 = 2$; então:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 \quad par \quad \Rightarrow \quad a \quad par;$$

sendo a par, será da forma $a = 2p$, p inteiro. De $a^2 = 2b^2$ temos:

$$4p^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 2p^2 = b^2.$$

Assim, b^2 é par e, portanto, b também o é. Sendo a e b pares, a fração $\frac{a}{b}$ é redutível, o que nos leva a uma contradição. ■

Números como $\sqrt{2}$, não-racionais, são chamados irracionais e a partir desse número podemos construir uma infinidade de números irracionais. Com efeito, qualquer que seja o número inteiro n, não-nulo, $n\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/n$ são números irracionais. De fato, se para algum n, $n\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}/n$ fosse racional teriamos:

$$n\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad ou \quad \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$$

onde p e $q \in \mathbb{Z}$.

Se $n\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ for verdadeira então:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{nq}.$$

Como $\frac{p}{nq}$ é um número racional, temos que $\sqrt{2}$ é um número racional, o que é uma contradição. Do mesmo modo a igualdade $\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$ também não pode ser verdadeira, pois, se fosse teriamos

$$\sqrt{2} = \frac{np}{q}.$$

Outros exemplos clássicos de números irracionais são: o π da Geometria Elementar; o número e, base dos logarímos neperianos; $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$, etc. Em geral, se um número natural não é um quadrado perfeito, suas raizes quadradas são números irracionais.

Provemos, agora, a seguinte proposição:

Proposição 1.3.3: Se $a \neq 0$ é racional e "s" é irracional, então, $a + s$ e $a \cdot s$ são irracionais.

Demonstração:

Sabemos que se b é racional, então $a+b$ e $a \cdot b$ são racionais. Suponhamos, por contradição, que $a \cdot s$ seja racional. Então, $a \cdot s = p$, onde $p \in \mathbb{Q}$ e como $a \neq 0$, temos $s = \frac{p}{a}$, ou seja, s é racional, pois é o produto de p pelo racional $1/a$, o que é uma contradição, pois s é irracional, por hipótese.

Agora suponhamos que $a + s$ seja racional. Então, $a + s = p$, onde $p \in \mathbb{Q}$ e como $\mathbb{Q}$ é um corpo, temos $s = p + (-a)$, ou seja, s é racional, pois é a soma de p com o racional $-a$, o que é uma contradição, pois, por hipóteses, s é irracional.

■

1.4 Números Reais

O conjunto de todos os números, racionais e irracionais, é chamado conjunto dos *números reais* e indicamos por $\mathbb{R}$.

Admitiremos que a quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é um *corpo ordenado*, isto é, satisfaz todas as propriedades: (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) recomendamos ao leitor rever tais propriedades.

Vejamos agora, em forma de exemplos, outras propriedades dos números reais.

Exemplo 1.4.1:

Se para quaisquer reais x, y, z e w tivermos $x \leq y$ e $z \leq w$ então

$$x + z \leq y + w,$$

ou seja, somando-se membro a membro desigualdades de mesmo sentido, obtém-se outra de mesmo sentido.

Solução:

Pela propriedade (OA) temos que

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \qquad (1)$$

e

$$z \leq w \quad \Rightarrow \quad y + z \leq y + w \qquad (2)$$

De (1) e (2) e da propriedade transitiva obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$x + z \leq y + w.$$

O exemplo a seguir caracteriza uma propriedade dos números reais chamada de *Lei do cancelamento*.

Exemplo 1.4.2:

Se para quaisquer reais x, y, z tivermos $x + z = y + z$ então

$$x = y.$$

Solução:

Somando-se $-z$ a ambos os membros da igualdade $x + z = y + w$, obtemos:

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

Pela propriedade associativa temos,

$$x + [z + (-z)] = y + [z + (-z)].$$

Daí,

$$x + 0 = y + 0,$$

ou seja,

$$x = y.$$

Como queriamos demonstrar.

Exemplo 1.4.3:

Se para quaisquer reais x, y, z e w tivermos $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq w$ então

$$xz \leq yw,$$

ou seja, multiplicando-se membro a membro desigualdades de mesmo sentido e de números positivos, obtém-se desigualdade de mesmo sentido.

Solução:

Pela propriedade (OM) vem que:

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz$$

e

$$0 \leq z \leq w \quad \Rightarrow \quad yz \leq yw$$

donde, pela propriedade (O3), obtém-se

$$xz \leq yw.$$

Faremos a seguir uma lista de outras propriedades dos números reais, cujas demonstrações omitiremos, pois, trata-se de tarefa um tanto árida e não é o que mais importa aqui. Mesmo porque, suas demonstrações podem ser obtidas facilmente das propriedades já vistas até o momento.

Quaisquer que sejam os reais x, y, z e w tem-se:

(a) $x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + z < y + z$;

(b) $z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^{-1} > 0$;

(c) $z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -z < 0$;

(d) se $z > 0, x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz < yz$;

(e) se $z < 0, x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz > yz$, ou seja, multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, o sentido da desigualdade muda;

(f) se $0 \leq x < y$ e $0 \leq z < w$ então $xz < yw$.

(g) $0 < x < y \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;

(h) Uma e somente uma das condições abaixo é verdadeira:

$$x < y \quad ou \quad x = y \quad ou \quad x > y.$$

Esta propriedade é conhecida como *Tricotomia*;

(i) $xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $y = 0$.

Esta propriedade conhecida como *Anulamento do produto* diz que um produto é nulo se, e somente se, um dos fatores for nulo.

Exemplo 1.4.4: Supondo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ prove que:

(a) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;

(b) $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$;

(c) $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Solução:

(a) De $0 \leq x < y$ e $0 \leq x < y$ e pela propriedade (f) temos:

$$x^2 < y^2.$$

(b) Deixamos este a cargo do leitor.

(c) Por (a), $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$. Suponhamos, agora $x^2 < y^2$; se $x \geq y$, por (b) teríamos $x^2 \geq y^2$, contradição. Assim, $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$. Fica provado, deste modo, que quaisquer que sejam os reais $x \geq 0$ e $y \geq 0$

$$x < y \Longleftrightarrow x^2 < y^2.$$

1.5 Módulo de um número real

Se x é um número real, o módulo de x (ou valor absoluto de x) é o número $|x|$ definido por :

$$|x| = x \quad se \quad x \geq 0;$$

$$|x| = -x \quad se \quad x < 0.$$

Decorrem imediatamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades:

$$|x| \geq 0;$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| \geq x$$

Na proposição seguinte estão outras propriedades importantes do valor absoluto de um número real.

Proposição 1.5.1:

Quaisquer que sejam os números reais a, b e x, tem-se:

1. $|x|^2 = |x^2| = x^2$;

2. $|ab| = |a|\,|b|$;

3. $|a+b| \leq |a| + |b|$(Desigualdade Triangular);

4. Se $a > 0$, $\quad |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$;

5. $|x| = \sqrt{x^2}$;

6. $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$;

7. $|a - b| \leq |a - x| + |x - b|$.

Demonstração:

1. Sendo $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\left|x^2\right| = x^2,$$

pela definição de valor absoluto. Resta mostrar que

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x \geq 0$, temos

$$|x| = x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = x^2.$$

Se $x < 0$,

$$|x| = -x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

2. Do item 1 temos que:

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2 |b|^2 ,$$

ou seja,

$$|ab| = |a| |b| .$$

3. Provaremos, agora, a chamada desigualdade triangular e na sua prova faremos uso do fato

$$|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a| |b| = (|a| + |b|)^2.$$

Ou seja,

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2,$$

donde obtemos

$$|a+b| \leq |a|+|b|\,.$$

4. Suponhamos que $|x| \leq a$. Se $x \geq 0$, temos

$$x = |x| \leq a.$$

Sendo $x \geq 0$, é claro que $x \geq -a$, de modo que, neste caso,

$$-a \leq x \leq a.$$

Se $x \leq 0$, então $x \leq a$ e

$$-x = |x| \leq a.$$

Mas $-x \leq a$ é equivalente a $x \geq -a$, de modo que

$$-a \leq x \leq a.$$

Portanto, provamos que

$$|x| \leq a \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Para provarmos a recíproca, também distiguiremos os casos $x \geq 0$ e $x < 0$. Suponhamos que

$$-a \leq x \leq a.$$

Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em

$$x \leq a \quad e \quad x \geq -a.$$

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá

$$|x| \leq a.$$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos

$$|x| \leq a.$$

Logo,

$$-a \leq x \leq a \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a.$$

5. Antes de provarmos esta parte, faremos uma observação sobre o síbolo $\sqrt{x}$, sendo x um número real positivo. É comum usar $\sqrt{x}$ para indicar uma das raizes de x, sem especificar qual dela, ou seja, colocar

$$\sqrt{x^2} = x.$$

Tal notação pode conduzir a uma contradição, vejamos:
Usando a fórmula $\sqrt{x^2} = x$, temos

$$\sqrt{3^2} = 3 \quad e \quad \sqrt{(-3)^2} = -3.$$

Mas

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}.$$

Logo,

$$3 = -3 \quad (absurdo?!?!)$$

Para evitar este fato usaremos, sistematicamente, o símbolo $\sqrt{x}$ para indicar a raiz quadrada positiva de x. A raiz quadrada negativa de x será indicada por $-\sqrt{x}$. Assim especificado, temos que:

$\sqrt{x^2}$ é a raiz quadrada positiva de x^2, isto é, é o número positivo cujo quadrado é x^2 e o número $|x|$ satisfaz tais condições, ou seja,

$$|x| \geq 0 \quad e \quad |x|^2 = x^2.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2} = |x|\,.$$

6. Em virtude da desigualdade triangular, temos

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|\,,$$

o que nós dá

$$|a| - |b| \leq |a-b|\,. \qquad (I)$$

Pelo mesmo motivo, temos

$$|b| - |a| \leq |b-a|\,.$$

Ora, é evidente que

$$|a-b| = |b-a|\,.$$

Consequentemente

$$|b| - |a| \leq |a-b| \quad ou \quad |a-b| \geq -(|a|-|b|). \qquad (II)$$

De (I) e (II) e do item 4 concluímos que

$$||a| - |b|| \leq |a-b|\,.$$

A outra desigualdade, é óbvia, e deixamos a cargo do leitor.

7. Esta última afirmação resulta, também da aplicção da desigualdade triangular à soma $a-b = (a-x)+(x-b)$, pois,

$$|a-b| = |(a-x)+(x-b)| \leq |a-x| + |x-b|\,,$$

ou melhor,

$$|a-b| \leq |a-x| + |x-b|\,.$$

Como queriamos demonstrar.

$\blacksquare$

Corolário 1.5.2:

Dado um número real positivo a, qualquer que seja o número real x, temos:

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \geq a \qquad ou \qquad x \leq -a.$$

Demonstração:

Seja $|x| \geq a$. Suponhamos que exista um número real x que não satisfaz a condição

$$x \geq a \qquad ou \qquad x \leq -a.$$

Mas x não satisfaz esta última condição se, e somente se,

$$-a < x < a$$

o que, pelo item 4 da proposição 1.2, é equivalente a

$$|x| < a$$

contradizendo nossa hipótese.

Reciprocamente, se

$$x \geq a \qquad ou \qquad x \leq -a$$

então

$$|x| \geq a.$$

De fato, x não satisfaz a condição

$$|x| \geq a$$

se, e somente se, x satisfaz a condição

$$|x| < a$$

novamente, pelo item 4 da proposição 1.2, $|x| < a$ é equivalente a

$$-a < x < a,$$

o que nos a uma contradição da hipótese

$$x \geq a \qquad ou \qquad x \leq -a.$$

Portanto, esta demonstrado o corolário.

$\blacksquare$

Corolário 1.5.3:

Dados a, b, $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|x - a| \leq b$$

se, e somente se,

$$a - b \leq x \leq a + b.$$

Demonstração:

Com efeito, pelo item 4 da proposição 1.2, $|x - a| \leq b$ é equivalente a

$$-b \leq x - a \leq b.$$

Somando a a ambos os membros dessa desigualdade obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$a - b \leq x \leq a + b.$$

$\blacksquare$

Nota 1.5.4:

Todas as afirmações da proposição 1.2 e de seus corolários são ainda verdadeiras com $<$ em lugar de $\leq$ e $>$ em lugar de $\geq$, como se verifica facilmente.

1.6 Máximo, Mínimo, Supremo e Ínfimo de um Conjunto

O conjunto dos números reais, como podemos observar, possui infinitos subconjuntos, dentre os quais destacarremos os *intervalos*.

Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

1. Intervalos Limitados

   (a) Fechado

   $$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

   (b) Fechado à esquerda

   $$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$

   (c) Fechado à direita

   $$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

   (d) Aberto

   $$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$

2. Intervalos Ilimitados

   (a) Semi-reta direita fechada, de origem b

   $$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$$

   (b) Semi-reta direita aberta, de origem b

   $$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$

   (c) Semi-reta esquerda fechada, de origem a

   $$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$$

(d) Semi-reta esquerda aberta, de origem a

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$$

(e) Intervalo aberto ou fechado

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

este intervalo também é conhecido como *intervalo total*.

3. Intervalo degenerado

$$[a, a]$$

este inervalo consiste em um único ponto a.

Proposição 1.6.1:

Todo intervalo não-degenerado é um conjunto infinito.

Demonstração:

Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado temos que, se $x < y$, então,

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Assim, se I for um intervalo de extremos a, b, com $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ em I, tomando

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = \frac{a+x_1}{2}, .., x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}, ...$$

dessa forma obtemos

$$a < ... < x_3 < x_2 < x_1 < b$$

e assim esta completa a demonstração.

■

Seja A um subconjunto dos números reais. Dizemos que A é *limitado superiormente* quando existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $a \in A$. Cada $x \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se uma *cota superior* de A.

Analogamente, dizemos que A é *limitado inferiormente* quando existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq a$ para todo $a \in A$. Um elemento $y \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se uma *cota inferior* de A.

Assim, um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é *limitado* quando é limitado superior e inferiormente, isto é, quando existem x, $y \in \mathbb{R}$ tais que $A \subset [x, y]$.

Sendo A um subconjunto dos números reais, o maior elemento de A, quando existe, é chamado de *máximo* de A e indica-se por $max(A)$ e o menor elemento de A, quando existe, chama-se *mínimo* de A e indica-se por $min(A)$.

Seja A um subconjunto dos números reais, ou seja, $A \subset \mathbb{R}$. Um elemento $y \in \mathbb{R}$ chama-se *supremo* do subconjunto A quando y é a menor das cotas superiores de A em $\mathbb{R}$.

Assim, para que $y \in \mathbb{R}$ seja supremo do subconjunto A, escrevemos $y = sup(A)$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:

1. Par todo $a \in A$ tem-se $a \leq sup(A)$;

2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \geq a$ para todo $a \in A$, então $c \geq sup(A)$;

3. Se $c < sup(A)$ então existe $a \in A$ tal que $c < a < sup(A)$.

Resulta da definição que, o supremo de um conjunto, quando existe, é único. De fato, se dois elementos y e $y' \in \mathbb{R}$ satisfazem as condições acima, deve-se ter $y \leq y'$ e $y' \leq y$, ou seja, $y = y'$.

Analogamente, um elemento $x \in \mathbb{R}$ chama-se *ínfimo* de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente, quando x é a maior das cotas inferiores de B. Para que x seja ínfimo de $B \subset \mathbb{R}$, escrevemos $x = inf(B)$, é necessário e suficiente que as condições abaixo sejam satisfeitas:

1. Para todo $b \in B$ tem-se $inf(B) \leq b$;

2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq b$ para todo $b \in B$, então $c \leq inf(B)$;

3. Se $c \geq inf(B)$ então existe $b \in B$ tal que $inf(B) < b < c$.

Deixamos a cargo do leitor provar que o ínfimo de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$, quando existe, é único.

Exemplo 1.6.2:

Se $A = \emptyset$ então todo $x \in \mathbb{R}$ é cota superior de A. Como não existe menor elemento, respectivamente maior elemento, no corpo ordenado $\mathbb{R}$, segue-se que o conjunto $\emptyset$ não possui supremo, respectivamente ínfimo, em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.6.3:

Se $A \subset \mathbb{R}$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo, se A possuir um elemeto mínimo, ele será seu ínfimo. Reciprocamente, se $sup(A)$ pertence a A então é o maior elemento de A; se $inf(A)$ pertencer a A, será o seu menor elemento. Em particular, todo subconjunto finito $A \subset \mathbb{R}$ possui inf e sup. Outro exemplo:

se $A = (-\infty, a]$ e $B = [b, +\infty)$, temos $inf(B) = b$ e $sup(A) = a$.

Exemplo 1.6.4:

Dados $a < b$ em $\mathbb{R}$, seja $A = (a, b)$ o intervalo aberto com esses extremos. Tem-se $inf(A) = a$ e $sup(A) = b$. Com efeito, a é, evidentemente, uma cota inferior de A. Provemos agora que nenhum $c \in \mathbb{R}$ com $a < c$ é cota inferior de A. Isto é claro se $c \geq b$. Por outro lado, se $a < c < b$ então $x = \frac{a+c}{2}$ é um elemento de A, com $a < x < c$, o que prova que c não é cota inferior de A. Assim $a = inf(A)$. De modo análogo se mostra que $b = sup(A)$. Neste caso, tem-se $sup(A) \notin A$ e $inf(A) \notin A$.

Exemplo 1.6.5:

Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 2 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$. Como $x > 2$ nos leva a $x^2 > 4$ temos que $x \notin X$, concluímos, então, que $X \subset [0, 2]$, logo X é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado, $Y \subset (0, +\infty)$, de modo que Y é limitado inferiormente.

Note que o conjunto X possui $inf(X) = 0$, pois 0 é o menor elemento de X. Entretanto, não existe $sup(X)$, assim como não existe $inf(Y)$ em $\mathbb{Q}$ e são estas afirmações que mostraremos agora. Para isto, estabeleceremos os seguintes fatos:

(A) *O conjunto X não possui elemento máximo.*

Com efeito, dado $x \in X$, isto é, dado um número racional não-negativo cujo quadrado é inferior a 2, tomamos um número racional $r < 1$ tal que

$$0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1}. \tag{1.1}$$

Afirmamos que $x + r$ ainda pertence a X. De fato, de $r < 1$ segue-se $r^2 < r$. Da desigualdade (1.1) segue-se

$$r(2x + 1) < 2 - x^2.$$

Por conseguinte,

$$(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2.$$

Assim, dado qualquer $x \in X$, existe um número maior, $x + r \in X$.

(B) *O conjunto Y não possui elemento mínimo.*

De fato, dado qualquer $y \in Y$, temos $y > 0$ e $y^2 > 2$. Logo podemos obter um número racional r tal que

$$0 < r < \frac{y^2 - 2}{2y}.$$

Então $2ry < y^2 - 2$ e daí

$$(y - r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2.$$

Observa-se também que

$$r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y},$$

donde $r < y$, isto é, $y - r$ é positivo. Assim, dado $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $y - r \in Y$ com $y - r < y$.

(C) Se $x \in X$ *e* $y \in Y$, *então* $x < y$.

Com efeito, tem-se $x^2 < 2 < y^2$ e, portanto, $x^2 < y^2$. Como x e y são ambos positivos, conclui-se que $x < y$.

Usando os fatos de (A), (B) e (C) mostraremos que, entre os números racionais, não existem $sup(X)$ nem $inf(Y)$. Veja, Se existisse $a = sup(X)$, então seria forçosamente $a > 0$. Não poderia ser $a^2 < 2$, porque isto obrigaria $a \in X$ e, então, a seria o elemento máximo de X, que não existe, por (A). Tampouco poderia ser $a^2 > 2$, porque isto faria $a \in Y$. Como, em virtude de (B), Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$. Consequentemente usando (C), concluiríamos que $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = sup(X)$.

Assim, se existir $a = sup(X)$, deverá ser $a^2 = 2$. Mas, pelo Lema 1.3.1, não existe nenhum número racional com esta propriedade. Concluímos que em $\mathbb{Q}$ o conjunto X não possui supremo.

Um raciocínio inteiramente análogo, baseado nos fatos (A), (B) e (C), mostraria que o número $b = inf(Y)$, se existir, deve satisfazer $b^2 = 2$, e, portanto, Y não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Ao mesmo tempo, estes argumentos mostram que, se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, possua supremo, existirá, neste dito corpo, um elemento $a > 0$ cujo quadrado ï¿$\frac{1}{2}$ 2. Com efeito, tal corpo, sendo ordenado contém $\mathbb{Q}$, logo contém o conjunto X e nele existirá $a = sup(X)$, cujo quadrado, não podendo ser menor nem maior do que 2, deverá ser igual a 2, ou seja, $a = \sqrt{2}$.

Tudo isto, nos leva ao conjunto dos números reais, o qual possui a seguinte propriedade:

Propriedade do Supremo

Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.

Esta propriedade nos diz que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado *completo*, o qual contém $sup(X)$, assim como $inf(Y)$.

Segue imediatamente dessa propriedade que, no conjunto dos reais, todo conjunto não-vazio $A \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui um ínfimo. Com efeito, dado A, seja $B = -A$, isto é, $B = \{-a; a \in A\}$. Então B é não-vazio e limitado superiormente; logo existe $x = sup(B)$. Como se vê facilmente, tem-se $-x = inf(A)$.

Propriedade de Arquimedes

Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então, existe pelo menos um número natural n tal que

$$nx > y.$$

Demonstração

Suponhamos, por absurdo, que para todo natural n, $nx \leq y$. Consideremos então o conjunto

$$A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}.$$

A é não vazio, pois $1 \cdot x = x \in A$, e limitado superiormente por y, logo admite supremo. Seja s o supremo de A. Como $x > 0$, $s - x < s$; assim, evidentemente $s - x$ não é cota superior de A; logo existe um número natural m tal que

$$s - x < mx$$

e daí

$$s < (m+1)x$$

que é uma contradição, logo, $nx > y$ para algum natural n.

■

Como aplicação, imediata, da propriedade de Arquimedes temos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.6.6:

(a) Para todo $x > 0$, existe pelo menos um número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.

(b) Para todo número real x existe pelo menos um número natural n tal que $n > x$.

Solução

(a) Como $x > 0$, pela propriedade de Arquimedes, existe um número natural n tal que $nx > 1$ e, portanto, $\frac{1}{n} < x$. O leitor deve observar que $nx > 1$ nos leva a $n \neq 0$.

(b) Como $1 > 0$, pela propriedade de Arquimedes, existe um número natural n tal que $n > x$.

1.7 Princípio de Indução Finita

O conjunto dos números naturais possui uma importante propriedade que enuciaremos a seguir. Porém antes vale ressaltar que $P(n)$ indicará uma proposição, que pode ser falsa ou verdadeira, associada ao número natural n. Por exemplo:

$$2^n > n$$

$$n + 1 = n$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

são proposições associadas ao número natural n.

A propriedade a qual nos referimos é chamada *princípio de indução finita* que será por nós admitido e cujo enunciado é o seguinte:

Princípio de Indução Finita

Sejam a um número natural dado e $P(n)$ uma proposição associada a cada número natural n, $n \geq a$. Suponhamos que

(i) $P(n)$ seja verdadeira para $n = a$;

(ii) para todo número natural $k \geq a$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq a$.

Como interessante aplicação desse princípio, vamos estabelecer a seguinte desigualdade, conhecida como *Desigualdade de Bernoulli.*

Exemplo 1.7.1:

Quaisquer que sejam o número $x \geq -1$ e o número $n \geq 1$, vale a seguinte desigualdade

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Solução

Para $n = 1$, é óbvio.

Vamos provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$. Para isso partimos de $P(k)$, isto é,

$$(1+x)^k \geq 1+kx.$$

Multiplicando esta desigualdade pelo número não negativo $1+x$, obtemos:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2.$$

Como $kx^2 \geq 0$, podemos desprezar este termo, obtendo $P(k+1)$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Isto completa a demonstração, pois sabemos que $P(1)$ é verdadeira e que $P(k)$ implica $P(k+1)$, concluimos, então, pelo princípio de indução finita, que a desigualdade é verdadeira para todo número natural n.

Vejamos mais alguns exemplos de aplicação desse princípio.

Exemplo 1.7.2:

Prove que $10^n > n$ para todo número natural $n \geq 1$.

Solução

Para $n = 1$, a proposição é verdadeira pois

$$10 > 1.$$

Provemos, agora, que para todo $k \geq 1$

$$10^k > k \Rightarrow 10^{k+1} > k+1.$$

De fato

$$10^k > k \Rightarrow 10^{k+1} > 10k > k+1$$

ou seja,

$$10^k > k \Rightarrow 10^{k+1} > k+1.$$

Segue do princípio de indução finita que, para todo número natural $n \geq 1$,

$$10^n > n.$$

Exemplo 1.7.3:

Seja $P(n)$, $n \geq 0$ a proposição $n+1=n$.

Observe que, para todo $k \geq 0$,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

pois, se $k+1=k$, somando 1 aos dois membros, obtém-se $(k+1)+1=k+1$. Entretanto, não existe um número natural a que torne $P(n)$ verdadeira, pois se existisse um número natural a que tornasse $P(n)$ verdadeira, teríamos $a+1=a$ e, pela lei do cancelamento, $1=0$ (absurdo !?!?).

Portanto o princípio de indução finita não se aplica, pois a hipótese (i) não se verifica.

Exemplo 1.7.4:

Para todo número natural $n \geq 1$

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(1+n)}{2}.$$

Solução

Seja $P(n)$ a proposição acima. Para $n=1$, $P(n)$ é verdadeira, pois o primeiro membro é igual a 1 e o segundo é igual a $\frac{1(1+1)}{2}=1$. Provemos, que, para todo $k \geq 1$,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

$P(k)$ é a proposição

$$1+2+3+...+(k-1)+k=\frac{k(1+k)}{2}$$

e $P(k+1)$ é a proposição

$$1+2+3+...+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)(2+K)}{2}.$$

Somando $k+1$ aos dois membros de $P(k)$, vem:

$$1+2+3+...+(k-1)+k+(k+1)=\frac{k(1+k)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+1(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(2+k)}{2}.$$

Portanto, para todo $k \geq 1$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Como as hipóteses (i) e (ii) do princípio de indução finita estão verificadas, resulta que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

Exemplo 1.7.5:

Prove, por indução finita, que

$$1 + t + t^2 + ... + t^n = \frac{1 - t^n + 1}{1 - t},$$

com $t \neq 1$, para todo número natural $n \geq 1$.

Solução

Seja $P(n)$ a proposição acima. Para $n = 1$

$$\frac{1 - t^1 + 1}{1 - t} = \frac{1 - t^2}{1 - t} = 1 + t$$

logo $P(n)$ é verdadeiro para $n = 1$. $P(k)$ é a proposição

$$1 + t + t^2 + ... + t^k = \frac{1 - t^k + 1}{1 - t}$$

e $P(k+1)$

$$1 + t + t^2 + ... + t^k + t^k + 1 = \frac{1 - t^k + 2}{1 - t}.$$

Provemos que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq 1$; somemos $t^k + 1$ aos dois membros de $P(k)$:

$$1 + t + t^2 + ... + t^k + t^k + 1 = \frac{1 - t^k + 1}{1 - t} + t^k + 1 = \frac{1 - t^k + 2}{1 - t}.$$

Portanto, para todo $k \geq 1$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Segue do princípio de indução finita que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Exemplo 1.7.6:

Prove que $\quad n! > 2^n - 1 \quad$ para todo número natural $n \geq 3$.

Solução

Para $n = 3$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ e $2^2 = 4$, logo, $3! > 2^2$. Assim a proposição é verdadeira para $n = 3$. Para todo $k \geq 3$, temos

$$k! > 2^k - 1 \Rightarrow 2(k!) > 2 \cdot 2^k - 1 \Rightarrow (k+1) \cdot (k!) > 2^k;$$

como $(k+1) \cdot (k!) = (k+1)!$ resulta

$$k! > 2^k - 1 \Rightarrow (k+1)! > 2^k$$

para todo $k \geq 3$. Segue do princípio de indução finita que a proposição é verdadeira para todo $n \geq 3$.

1.8 Exercícios

1. Prove que

$$|x + y| = |x| + |y|$$

se, e somente se, x e y são ambos negativos ou ambos positivos.

2. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que:

(a) $-b < x < a \Leftrightarrow |2x + b - a| < a + b$.

(b) $-2b < x + a - b < 2a \Leftrightarrow |x| < a + b$.

3. Justifique ou dê contra-exemplo para as implicações seguintes:

(a) $a \neq b \Rightarrow |a| \neq |b|$.

(b) $|a| \neq |b| \Rightarrow a \neq b$.

4. Seja $Y \subset \mathbb{Q}$. Mostre que o conjunto das frações do tipo

$$\frac{1}{2^n},$$

com $n \in N$, possui $inf(Y) = 0$ e $sup(Y) = \frac{1}{2}$.

5. Use a propriedade do supremo para provar a existência da raiz n-ésima positiva de qualquer número $a > 0$, com $a \neq 1$.

6. Prove, por indução finita, que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

para todo $n \geq 0$.

7. Para que valores de n a afirmação dada é verdadeira? Justifique sua resposta por indução finita.

(a) $3^n > n!$.

(b) $n^2 > n + 1$.

8. Sejam u e v dois números reais, com $u > v > 0$. Prove que

(a) $u^n - v^n > (u - v)^n$.

(b) Usando (a) prove que

$$\sqrt[n]{u - v} > \sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{v}$$

para todo natural $n \geq 2$.

Capítulo 2

Seqüências de Números Reais

Na Análise os conceitos e resultados mais importantes se referem a limites, direto ou indiretamente. Daí, num primeiro momento, estudaremos os limites de seqüências de números reais, os quais são mais simples, mais adiante, estudaremos os limites de derivadas, seqüências de funções e outros.

Intuitivamente, podemos pensar numa seqüência $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ de números reais como sendo uma seqüência de pontos da reta e o seu limite como sendo um ponto do qual os pontos a_n tornam e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice n suficientemente grande.

2.1 Noções Preliminares

Uma *seqüência de números reais* é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $f(n)$ será representado por a_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, e chamado o *termo geral*, ou *n-ésimo termo* da seqüência.

É comum usarmos as notações (a_n) , $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, ...)$ ou simplesmente a_n para reprensentar uma seqüência. Usaremos ainda a notação $\{a_n\}$ para indicar o *conjunto de valores* da seqüência. Essa distinção é importante, pois uma seqüência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito.

Exemplo 2.1.1:

A seqüência

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$$

é infinita, com

$$a_n = -(-1)^n = (-1)^{n-1}.$$

Mas observe que seu conjunto de valores possui somente dois valores, +1 e -1, ou seja,

$$\{a_n\} = \{+1, -1\}.$$

De acordo com a definição que demos anteriormente, o índice de uma seqüência (a_n) começa em $n = 1$, ou seja a_1 é seu primeiro termo. Observe, o leitor, que a seqüência de termo geral

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

só faz sentido para $n = 4, 5, 6, ...$ de modo que seu primeiro termo é a_4. Não pense, o leitor, que isto seja um obstáculo, pois podemos, e faremos, uma *translação de índices* de forma que o primeiro termo da seqüência tenha índice $n = 1$. De fato, definindo a seqüência

$$b_n = a_{n+4} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

a seqüência fica definida a partir de $n = 1$.

Seja (a_n) uma seqüência. Dizemos que (a_n) é *crescente* se

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n ...,$$

isto é, se $a_n < a_{n+1}$ Agora se

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n ...,$$

isto é, se $a_n > a_{n+1}$ dizemos que a seqüência é *decrescente.*

A seqüência (a_n) é *não-crescente* se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n ...$$

e *não-decrescente* se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n ...$$

Se uma seqüência satisfaz qualquer uma dessas propriedades ela é dita *monótona.*

Uma seqüência a_n é dita ser *limitada superiormente* se existir um número real β tal que , para todo número natural n, temos

$$a_n \leq \beta.$$

De maneira análoga dizemos que uma seqüência a_n é *limitada inferiormente* se existir um número real α tal que, para todo número natural n, temos

$$a_n \geq \alpha.$$

Se existirem reais α e β tais que, para todo número natural n, temos

$$\alpha \leq a_n \leq \beta,$$

dizemos que a_n é uma seqüência *limitada.* Note que uma seqüência é limitada se, e somente se, ela é limitada superiormente e inferiormente. Em outra palavras, uma seqüência é limitada se todos os seus termos pertencem ao intervalo $[\alpha, \beta]$.

Lema 2.1.2:

A seqüência (a_n) de números reais é limitada se, e somente se, $(|a_n|)$ é limitada.

Demonstração:

Observe que todo intervalo $[\alpha, \beta]$ está contido num intervalo maior da forma $[-c, c]$ com $c > 0$, basta o leitor fazer $c = max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Uma vez que $a_n \in [-c, c]$ é o mesmo que $|a_n| \leq c$, a seqüência (a_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|a_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto (a_n) é limitada se, e somente se, $(|a_n|)$ é limitada.

■

Dada uma seqüência $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, uma *subseqüência* de f é a restrição de f a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_i, ...\}$ de $\mathbb{N}$. Escrevemos $f' = (a_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ..., a_{n_i}, ...)$ ou $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ para representar uma subseqüência.

Lema 2.1.3:

Uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona é limitada se, e somente se, possui uma subseqüência limitada.

Demonstração:

Se a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona é limitada, é fácil ver que toda subseqüência é limitada.

Seja $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq ... \leq a_{n_k} \leq ... \leq b$ uma subseqüência limitada da seqüência não-decrescente (a_n). Note que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $n_k > n$ e, portanto, $a_n \leq a_{n_k} \leq b$. Logo $a_n \leq b$ para todo n. Conseqüentemente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

■

Exemplo 2.1.4:

Sendo $(a_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência constante $(1, 1, 1, 1, ...)$, obviamente ela é limitada, não-decrescente e não-crescente.

Exemplo 2.1.5:

Sendo $(a_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência $(1, 2, 3, 4, ..., n, ...)$, que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.

Exemplo 2.1.6:

Se para n par temos $a_n = 0$ e n ímpar temos $a_n = 1$, obtemos uma seqüência limitada e não monótona que é $(1, 0, 1, 0, 1, ...)$.

Exemplo 2.1.7:

Seja $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é a seqüência

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$$

que é monótona decrescente e limitada.

Exemplo 2.1.8:

Consideremos a seqüência $(a^1, a^2, a^3, a^4, ..., a^n, ...)$ das potências de a, com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $a = 0$ ou $a = 1$, temos obviamente uma seqüência constante.

(ii) Se $0 < a < 1$, a seqüência é decrescente e limitada. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ por a^n obtemos

$$a^{n+1} < a^n,$$

e assim a seqüência é decrescente. Observe, o leitor, que todos os termos dessa seqüência são positivos e portanto

$$0 < a^n < 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, em outra palavras esta seqüência é limitada.

(iii) Se $-1 < a < 0$, a seqüência (a^n) não é monótona, pois seus termos são alternadamente positivos e negativos, respectivamentnte se n é par ou ímpar, contudo, a seqüência é limitada. De fato, como $|a^n| = |a|^n$ e $0 < |a| < 1$, pelo item (ii) e Lema 2.1 conclui-se a afirmação.

(iv) Se $a = -1$ temos a seqüência $(-1, 1, -1, 1, ...)$ cuja análise é trivial.

(v) Se $a > 1$ obtemos uma seqüência crescente ilimitada. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a > 1$ por a^n obtemos $a^{n+1} > a^n$, logo a seqüência é crescente. Quanto a ser ilimitada, observe que $a = 1 + h$ com $h > 0 \in \mathbb{R}$ e fazendo uso da desigualdade de Bernoulli concluimos que $a^n > 1 + nh$. Note também que dado qualquer número real b, podemos achar n tal que $a^n > b$, para isto, basta tomar

$$n > \frac{b-1}{h}.$$

Donde obtemos

$$1 + nh > b$$

que por sua vez nos leva a $a^n > b$. Portanto, a seqüência (a^n) e crescente ilimitada.

(vi) Se $a < -1$ a seqüência (a^n) não é monótona, pois seus termos são alternadamente positivos e negativos, e é ilimitada superior e inferiormente. Com efeito, seus termos de ordem par, $a^{2n} = (a^2)^n$, constituem, pelo item v, uma subseqüência crescente, ilimitada superiormente, de números positivos. Enquanto isso, seus termos de ordem ímpar, $a^{2n+1} = a(a^{2n})$, constituem uma subseqüência decrescente, ilimitada inferiormente, pelo item v.

2.2 Limite de uma Seqüência

Intuitivamente, dizer que o número real L é limite da seqüência (a_n) significa afirmar que, à medida que o índice n cresce, os termos a_n tornam-se e se mantém tão próximo de L quanto se deseje. Dizer que a_n vai-se tornando tão próximo de L quanto se deseje significa dizer que $|a_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ε, por menor que seja, desde que façamos o índice n suficentemente grande. Dizemos que o número real L é o *limite* da seqüência (a_n) de números reais, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \qquad \lim a_n = L \qquad ou \qquad a_n \to L.$$

Quando $\lim a_n = L$, diz-se que a seqüência (a_n) *converge* para L, ou *tende* para L. Uma seqüência que possui limite chama-se *convergente*, caso contrário, *divergente*.

Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 2.2.1:

Diz-se que uma seqüência (a_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número n_o tal que

$$n > n_o \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica

$$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Observe que se $\lim a_n = L$ então qualquer intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, de centro L e raio $\varepsilon > 0$, contém os termos a_n da seqüência, com exceção no máximo de um número finito de índices n. Com efeito, dado o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, com $\lim a_n = L$, obtemos

$$n_o \in \mathbb{N} : n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$n > n_o \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Assim, fora do intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_o}$.

Reciprocamente, se qualquer intervalo de centro L contém todos os a_n, salvo talvez para um número finito de índices n, então $\lim a_n = L$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ conterá todos os a_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_o o maior índice n tal que $a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Então

$$n > n_o \quad \Rightarrow \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

ou seja

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Isto prova que $\lim a_n = L$.

Exemplo 2.2.2:

Prove, segundo a definição, que a seqüência

$$(a_n) = (\frac{n}{n+1}) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \frac{n}{n+1}, ...)$$

converge para o número 1.

Solução:

Note que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Logo, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_o = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon,$$

o que vem de encontro com a definição 2.1, como queriamos.

Exemplo 2.2.3:

Calcule o ponto de convergencia da seqüência, abaixo

$$a_n = \frac{3n}{n + sen(2n)}.$$

Solução:

Antes de calcularmos o pedido, observemos que:

(i) Dividindo o numerador e denominador por n e lembrando que $[sen(2n)]/n \to 0$, vemos que o ponto procurado é 3;

(ii) é fácl, também, ver que

$$|n + sen(2n)| \geq n - |sen(2n)| \geq n - 1.$$

Assim,

$$|a_n - 3| = \frac{3\,|sen(2n)|}{|n + sen(2n)|} \leq \frac{3}{|n + sen(2n)|} \leq \frac{3}{n - |sen(2n)|} \leq \frac{3}{n-1}.$$

Portanto, dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos que

$$|a_n - 3| \leq \frac{3}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Consequentemente o ponto de convergencia da seqüência é 3, pois

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o = 1 + \frac{1}{\varepsilon} : n > n_o \Rightarrow |a_n - 3| < \varepsilon.$$

Demonstraremos, agora, que uma seqüência não pode possuir dois limites distintos, ou seja, se o limite existe ele é único.

Teorema 2.2.4:

Se $\lim a_n = L$ e $\lim a_n = L_1$ então $L = L_1$.

Demonstração:

Suponhamos que $L \neq L_1$ e tomemos

$$\varepsilon < \frac{|L - L_1|}{2}.$$

Se $\lim a_n = L$, então, para um certo n_1 temos

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Da mesma forma se, $\lim a_n = L_1$, então, para um certo n_2 temos

$$n > n_2 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon.$$

Seja $n_o = max\{n_1, n_2\}$, de forma que $n > n_o$ nos leva simultaneamente a $n > n_1$ e $n > n_2$. Assim, $n > n_o$ implica que

$$|L - L_1| = |(L - a_n) + (a_n - L_1)| \leq |L - a_n| + |L_1 - a_n| < 2\varepsilon < |L - L_1|,$$

o que é aburdo. Logo, $L = L_1$.

■

Este teorema nos dá a *Unicidade do limite.*

Se insistirmos em calcular limites pela definição, isto pode tornar-se um trabalho muito complicado. Porém com esta definição podemos estabelecer propriedades que torna este trabalho um pouco menos complicado, como veremos daqui por diante.

Teorema 2.2.5:

Se $\lim a_n = L$ então toda subseqüência de (a_n) converge para o limite L.

Demonstração:

Seja $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ..., a_{n_i}, ..)$ uma subseqüência de (a_n). Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Como os índices da subseqüência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_o} > n_o$. Então

$$n_i > n_{i_o} \Rightarrow n_i > n_o \Rightarrow |a_{n_i} - L| < \varepsilon.$$

Logo $\lim a_{n_i} = L$.

■

Corolário 2.2.6:

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = L$.

Demonstração:

Com efeito, $(a_{1+k}, a_{2+k}, a_{3+k}, a_{4+k}, ..., a_{n+k}, ...)$ é uma subseqüência de (a_n) e pelo teorema anterior seu limite é L.

■

Nota 2.2.7:

Este último corolário nos diz que o limite de uma seqüência não se altera quando dela retiramos um número finito de termos. Mas geral, é o teorema anterior a este corolário, que diz que podemos retirar um número infinito de termos de uma seqüência, desde que se conserve uma infinidade de índices, de modo a restar uma subseqüência, que o limite, ainda, se mantém.

Teorema 2.2.8:

Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração:

Seja (a_n) uma seqüência que converge par L. Então dado qualquer $\varepsilon > 0$, exite $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Isto quer dizer que a partir do índice $n = n_o + 1$, a seqüência é certamente limitada: à direta por $L + \varepsilon$ e à esquerda por $L - \varepsilon$. Falta, então , acrescentarmos os termos restantes da seqüência, para isto, basta considerarmos, dentre todos os números

$$a_1, a_2, ..., a_n, L-\varepsilon, L+\varepsilon,$$

aquele que é o menor de todos, digamos A, e aquele que é o maior de todos, digamos B e então será verdade, para todo n, que

$$A \leq a_n \leq B,$$

como queriamos demonstrar.

∎

Quando uma seqüência não é limitada, seus elementos podem se espalhar por toda a reta, distanciando-se uns dos outros, como acontece com $a_n = n$, $a_n = 1-n$ ou $a_n = (-1)^n(2n+1)$.

Se a seqüência for limitada, estando seus elementos confinados a um intervalo $[A, B]$, eles são forçados a se acumularem em um ou mais "lugares"desse intervalo. Isto é o que nos diz o "Teorema de Bolzano-Weierstrass", enuciado a seguir, cuja demonstração está baseada na propriedade do supremo. Para mais detalhes, vinde [**1**], pg. 36.

Teorema 2.2.9: de Bolzano-Weierstrass

Toda seqüência limitada (a_n) possui uma subseqüência convergente.

Demonstração:

Como a seqüência é limitada, existe um número positivo M tal que, para todos os índices n, $-M < a_n < M$. Seja X o conjunto dos números x tais que existe uma infinidade de elementos da seqüência à direita de x, isto é, $x < a_n$ para uma infinidade de índices n. É claro que $-M \in X$ e M é uma cota superior de X. Tratando-se, pois, de um conjunto não vazio e limitado superiormente, X possui supremo, que designamos por A.

Vamos provar que existe uma subseqüência convergindo para A. Começamos provando que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos índices n tais que $A - \varepsilon < a_n$ e somente um número finito satisfazendo $A + \varepsilon < a_n$. De fato, sendo A o supremo de X, existe $x \in X$ à direita de $A-\varepsilon$ e infinitos a_n à direita desse x, portanto à direita de $A-\varepsilon$; ao mesmo tempo, só pode existir um número finito de elementos $a_n > A + \varepsilon$; do contrário, qualquer número entre A e $A + \varepsilon$ estaria em X.

Seja $\varepsilon = 1$ e a_{n_1} um elemento da seqüência no intervalo $(A - 1, A + 1)$. Em seguida, seja a_{n_2}, com $n_2 > n_1$, um elemento da seqüência no intervalo $(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2})$. Em seguida, seja

a_{n_3}, com $n_3 > n_2$, um elemento da seqüência no intervalo $(A - \frac{1}{3}, A + \frac{1}{3})$. Continuando com esse raciocinio, construimos uma subseqüência $(x_j) = (a_{n_j})$, que certamente converge para A, pois $|x_j - A| < \frac{1}{j}$. E assim a demonstração esta completa.

■

"Além de sua importância, tanto teórico como prática, o teorema abaixo teve papel histórico relevante. Foi tentando prová-lo *de maneira puramente aritmética* que Dedekind(1858) verificou a imposibilidade de fazê-lo sem antes possuir uma teoria matemática satisfatória dos números reais."

Teorema 2.2.10:

Toda seqüência monótona limitada é convergente.

Demonstração:

Consideremos, para fixar as idéias, a seqüência $(a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...)$ não-decrescente limitada. A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, ou seja, seu conjunto de valores possui supremo S. Afirmamos que $\lim a_n = S$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $S - \varepsilon < S$, o número $S - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos a_n. Logo existe algum $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon < a_{n_o}$. Como a seqüência é monótona,

$$n > n_o \Rightarrow a_{n_o} \leq a_n$$

e, portanto,

$$S - \varepsilon < a_n.$$

Como $a_n \leq S$ para todo n, vemos que

$$n > n_o \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon.$$

Assim completamos nossa demonstração.

■

Corolário 2.2.11:

Se uma seqüência monótona (a_n) possui uma subseqüência convergente, então (a_n) é convergente.

Demonstração:

Com efeito, pelo Lema 2.2, a seqüência monótona (a_n) é limitada e consequentemente pelo teorema anterior esta demonstrado o corolário.

■

2.3 Operações com limites

Mostraremos agora algumas operações, soma, multiplicação e divisão, dos limites de seqüências.

Teorema 2.3.1:

Se $\lim a_n = 0$ e (b_n) é uma seqüência limitada, $\lim a_n.b_n = 0$. Iste resultado é válido, ainda, que $\lim b_n$ não exista.

Demonstração:

Sendo (b_n) limitada, existe $c > 0$ tal que $|b_n| < c$ prar todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim a_n = 0$, podemos encontrar $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Logo,

$$n > n_o \Rightarrow |a_n.b_n| = |a_n| \, . \, |b_n| < \frac{\varepsilon}{c}.c = \varepsilon.$$

Isto nos montra que $a_n.b_n \to 0$.

■

Exemplo 2.3.2:

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(nx)}{n} = 0.$$

Solução:

De fato,

$$\frac{sen(nx)}{n} = sen(nx).\frac{1}{n}.$$

Como

$$|sen(nx)| \leq 1,$$

em outras palavras, é limitado e

$$\frac{1}{n} \to 0,$$

pelo teorema anterior, temos o resultado desejado.

Lema 2.3.3:

Sendo $\lim b_n = y$, com $y \neq 0$, então, salvo um númro finito de índices n, tem-se $b_n \neq 0$.

Demonstração:

Com efeito, sendo $y \neq 0$, podemos tomar um intervalo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ de centro y, tal que $0 \notin (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Para isto, tome $\varepsilon = |y|$.

Então existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow b_n \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

isto é

$$n > n_o \Rightarrow b_n \neq 0.$$

■

Teorema 2.3.4:

Seja $\lim a_n = x$ e $\lim b_n = y$, então:

(a) $\lim(a_n + b_n) = x + y$ e $\lim(a_n - b_n) = x - y$;

(b) $\lim(a_n.b_n) = x.y$;

(c) $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{x}{y}$ se $y \neq 0$.

Demonstração:

(a) Sendo $\lim a_n = x$ e $\lim b_n = y$ temos, respectivamente que, existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_o = max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_o$, nos leva a $n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_o$ implica:

$$|(a_n + b_n) - (x + y)| = |(a_n - x) + (b_n - y)| \leq |a_n - x| + |b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Com isto provamos que $\lim(a_n + b_n) = x + y$. De maneira análoga se prova a diferença.

(b) Observe que

$$a_n b_n - xy = a_n b_n - a_n y + a_n y - xy = a_n(b_n - y) + (a_n - x)y.$$

Pelo teorema 2.3, (a_n) é uma seqüência limitada e pelo item *(a)* $\lim(b_n - y) = 0$. Logo pelo teorema 2.5,

$$\lim[a_n(b_n - y)] = 0.$$

De maneira análoga temos,

$$\lim[(a_n - x)b] = 0.$$

Dessa forma temos, pelo item *(a)*

$$\lim(a_n b_n - xy) = \lim[a_n(b_n - y)] + \lim[(a_n - x)b] = 0,$$

donde obtemos

$$\lim(a_n.b_n) = x.y.$$

Para que a seqüência $\frac{a_n}{b_n}$ tenha sentido, ou seja, para que ela seja formada, limitamo-nos aos índices n suficientemente grandes de modo que $b_n \neq 0$.

(c) Note, pelo item anterior, que $b_n y \to y^2$, ou seja, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow b_n y > \frac{y^2}{2}.$$

Para ver isto, basta tomar $\varepsilon = \frac{y^2}{2}$ e achar o n_o correspondente. Daí, para todo $n > n_o$, $\frac{1}{b_n y}$ é um número positivo inferior a $\frac{2}{y^2}$. Logo, a seqüência $(\frac{1}{b_n y})$ é limitada. Veja bem,

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{x}{y} = \frac{ya_n - xb_n}{b_n y} = (ya_n - xb_n)\frac{1}{b_n y}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}(ya_n - xb_n) = xy - xy = 0,$$

segue do teorema 2.5 que

$$\lim(\frac{a_n}{b_n} - \frac{x}{y}) = 0,$$

e portanto

$$\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{x}{y}.$$

■

Exemplo 2.3.5:

Calcule o limite da seqüência de números reais

$$a_n = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

onde $x > 0$.

Solução:

Note que esta seqüência é decrescente se $x > 1$, crescente se $x < 1$ e limitada em qualquer um dos casos. Portanto, existe

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = L.$$

Sem sombra de dúvida temos $L > 0$. De fato,

(i) Se $0 < x < 1$, então $L = sup\{x^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\} \geq x$.

(ii) Se $x > 1$ então $x^{\frac{1}{n}} > 1$, para todo n, logo $L = inf\{x^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\} \geq 1$

Podemos afirmar com toda certeza que

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Com efeito, consideremos a subseqüência

$$(x^{\frac{1}{n(n+1)}}) = (x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{6}}, x^{\frac{1}{12}}, ...).$$

Pelo teorema 2.2 e pelo item *(c)* do teorema 2.6 obtemos

$$L = \lim x^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\lim x^{\frac{1}{n}}}{\lim x^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{L}{L} = 1.$$

Exemplo 2.3.6:

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{\frac{1}{n}}.$$

Solução:

Primeiramente, vamos verificar se este limite existe. Para tanto, basta provar que a seqüência é monótona.

A seqüência em questão é uma seqüência de números reais positivos, portanto limitada inferiormente. Vejamos se é monótona:

Para que seja

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

é necessário e suficiente que

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

isto é, que

$$n > (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Isto de fato ocorre para todo $n \geq 3$, pois sabemos que

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 3 \qquad (verifique!!!)$$

seja qual for n. Assim concluímos que a seqüência dada por $\sqrt[n]{n}$ é decrescente a partir do seu terceiro termo.

Note que $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, logo ela cresce em seus três primeiros passos, só então começando a decrescer. Assim $(\sqrt[n]{n})$ é limitada e monótona decrescente a partir do seu terceiro termo. Portanto seu limite existe.

Seja $\lim n^{\frac{1}{n}} = L$. Como a seqüência é monótona decrescente temos que $L = inf\{n^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\}$. Uma vez que $n^{\frac{1}{n}} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $L \leq 1$. Em particular, $L > 0$. Considerando a subseqüência $(2n)^{\frac{1}{2n}}$, temos

$$L^2 = \lim[(2n)^{\frac{1}{2n}}]^2 = \lim[(2n)^{\frac{1}{n}}] = \lim[2^{\frac{1}{n}}.n^{\frac{1}{n}}] = \lim 2^{\frac{1}{n}}.\lim n^{\frac{1}{n}} = L.$$

Como $L \neq 0$, de $L^2 = L$ obtemos $L = 1$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

2.4 Critério de Convergência de Cauchy

Um "critério de convergência"já foi dado antes, Teorema 2.4 (*Toda seqüência monótona limitada é convergente*), ou seja, um teorema que nos permite saber, em certos casos, se uma dada seqüência é convergente, mesmo sem conhecermos o valor desse limite. Mas é claro que muitas seqüências convergentes não são monótonas, de modo que aquele critério de convergência não é o mais geral possível. Em contraste, o teorema seguinte é de caráter geral, é um critério de convergência, que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de qualquer seqüência de números reais. Este critério é conhecido como *Critério de Convergência de Cauchy*.

Definição 2.4.1:

Uma seqüência de números reais (a_n) é dita ser uma *uma seqüência de Cauchy* se ela satisfaz a seguinte condição:

dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_o$ e $n > n_o$ implicam $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Note, o leitor, que comparando esta definição com a definição de limite observamos que, na definição de limite, exige-se que os termos a_n se aproximem arbitrariamente de um número real L, dado a priori. Enquanto que, para (a_n) ser uma seqüência de Cauchy, exige-se que seus termos a_m e a_n, para valores suficientemente grandes dos índices m e n, se aproximem arbitrariamente uns dos outros, ou seja, impõe-se, apenas, uma condição sobre os termos da própria seqüência.

Lema 2.4.2:

Toda seqüência de Cauchy é limitada.

Demonstração:

Seja (a_n) uma seqüência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_o \Rightarrow |a_m - a_n| < 1.$$

Em particular,

$$n \geq n_o \Rightarrow |a_{n_o} - a_n| < 1,$$

ou seja,

$$n \geq n_o \Rightarrow a_n \in (a_{n_o} - 1, a_{n_o} + 1).$$

Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto

$$\{a_1, a_2, ..., a_{n_o} - 1, a_{n_o} + 1\}.$$

Então $a_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (a_n) é limitada.

■

Lema 2.4.3:

Se uma seqüência de Cauchy (a_n) possui uma subseqüência convergindo para $L \in \mathbb{R}$ então $\lim a_n = L$.

Demonstração:

Sendo (a_n) uma seqüência de Cauchy temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_o \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja (a_{n_i}) uma subseqüência de (a_n) convergindo para L. Então existe $n_1 > n_o$ tal que $|a_{n_1} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$n > n_o \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Com isso mostramos que $\lim a_n = L$.

■

Teorema 2.4.4: Critério de Convergência de Cauchy

Uma seqüência de números reais é convergente se, e somente se, é Cauchy.

Demonstração:

Seja (a_n) uma seqüência tal que $\lim a_n = L$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n_o \Rightarrow |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m, n > n_o \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto (a_n) é uma seqüência de Cauchy.

Reciprocamemte, seja (a_n) uma seqüência de Cauchy. Pelo Lema 2.4, ela é limitada. Consequentemente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subseqüência convergente. Finalmente do Lema 2.5 temos que (a_n) converge. Isto completa a demonstração do teorema.

■

2.5 Limites Infinitos

Certas seqüências, embora não convergentes, apresentam um comportamento tanto quanto regular, a saber, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes ou arbitrariamente pequenos com o crescer do índice. Seqüências com estas propriedades, dizemos que *diverge para mais infinito* ou *para menos infinito* respectivamente.

Definição 2.5.1:

Seja (a_n) uma seqüência de números reais. Dizemos que "a_n diverge, ou tende , para mais infinito", e escrevemos $\lim a_n = +\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow a_n > A.$$

Em outra palavras, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $a_n < A$.

Analogamente, dizemos que "a_n diverge, ou tende , para menos infinito", e escrevemos $\lim a_n = -\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow a_n < -A.$$

Em outra palavras, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $a_n > -A$.

É fácil ver que $\lim a_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim -a_n = +\infty$. Portanto, se $\lim a_n = +\infty$ então (a_n) é limitada inferiormente mas é ilimitada superiormente. Da mesma forma, se $\lim a_n = -\infty$ então (a_n) é ilimitada inferiormente mas limitada superiormente. Note, o leitor, que se $\lim a_n = +\infty$ então toda subseqüência de (a_n) também tende para $+\infty$.

Exemplo 2.5.2:

(a) Se $a_n = n$ então obviamente $\lim a_n = +\infty$.

(b) Seja $a_n = x^n$ com $x > 1$. Dessa forma $x = 1 + h$ com $h > 0$. Então dado $A > 0$, obtemos

$$x^n = (1+h)^n > 1 + nh > A$$

desde que se tome

$$n > \frac{A-1}{h}.$$

Logo, se escolhermos um inteiro $n_o > \frac{A-1}{h}$, teremos

$$n > n_o \Rightarrow x^n > A.$$

(c) Para cada $p \in \mathbb{N}$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

De fato, a seqüência $(1, 2, 3, 4, ...)$ possui $(1, 2^p, 3^p, 4^p, ...)$ como subseqüência.

(d) Para cada $p \in \mathbb{N}$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = +\infty.$$

Com efeito, porque a seqüência

$$(1, 2^{\frac{1}{p}}, 3^{\frac{1}{p}}, 4^{\frac{1}{p}}, ...)$$

é crescente e possui a subseqüência ilimitada $(1, 2, 3, 4, ...)$.

(e) A seqüência $a_n = (-1)^n.n$ não tem limite $+\infty$ nem $-\infty$ pois é ilimitada nos dois sentidos.

(f) A seqüência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ...)$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente mas não tem limite igual a $+\infty$ porque possui uma subseqüência constante.

Proposição 2.5.3:

Dada uma seqüência não-decrescente (a_n), ou ela é convergente, se for limitada, ou ela é divergente, ou seja $\lim a_n = +\infty$, se for ilimitada.

Demonstração:

Se (a_n) for limitada é convergente como já vimos anteriormente. Agora, sendo (a_n) ilimitada, dado $A > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_o} > A$. Como (a_n) é não-decrescente,

$$n > n_o \Rightarrow a_n \geq a_{n_o} > A.$$

Isto completa a demonstração.

■

Vejamos, agora, algumas operações aritmética com limites infinitos.

Teorema 2.5.4:

(a) Se $\lim a_n = +\infty$ e (b_n) é limitada inferiormente, então, $\lim(a_n + b_n) = +\infty$;

(b) Se $\lim a_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $b_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $\lim a_n.b_n = +\infty$.

(c) Seja $a_n > 0$ para todo n. Então

$$\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n} = +\infty;$$

(d) Sejam (a_n) e (b_n) seqüências de números positivos. Então:

(i) se existe $c > 0$ tal que $a_n > c$ para todo n e se $\lim b_n = 0$ tem-se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty;$$

(ii) se (a_n) é limitada e $\lim b_n = +\infty$ então $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Demonstração:

(a) Seja $A > 0$ dado. Sendo (b_n) limitada inferiormente, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe também $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow a_n > A - c.$$

Segue-se que

$$n > n_o \Rightarrow a_n + b_n > A - c + c = A,$$

donde $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

(b) Dado $A > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow a_n > \frac{A}{c}.$$

Logo

$$n > n_o \Rightarrow a_n.b_n > \frac{A}{c}.c = A$$

e, portanto, $\lim(a_n.b_n) = +\infty$.

(c) Supondo $\lim a_n = 0$ e dado $A > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{A}$$

e, portanto, $\frac{1}{a_n} > A$. Logo

$$\lim(\frac{1}{a_n}) = +\infty.$$

Reciprocamente, se $\lim(\frac{1}{a_n}) = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

e, portanto, $0 < a_n < \varepsilon$. Consequentemente $\lim a_n = 0$.

(d)

(i) Dado $A > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow 0 < b_n < \frac{c}{A}.$$

Então

$$n > n_o \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > \frac{c}{\frac{c}{A}} = A.$$

Portanto,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

(ii) Sendo (a_n) limitada, existe $k > 0$ tal que $a_n < k$ para todo n e dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow b_n > \frac{k}{\varepsilon}.$$

Então

$$n > n_o \Rightarrow 0 < \frac{a_n}{b_n} < \frac{k}{\frac{k}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

e assim

$$\lim(\frac{a_n}{b_n}) = 0.$$

E a demonstração do teorema esta completa.

■

Exemplo 2.5.5:

Considere $x > 1$ e prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty.$$

Solução:

Como $x > 1$ temos que $a = 1 + h$, com $h > 0$. Assim

$$x^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh = \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

Logo,

$$\frac{x^n}{n} \geq \frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2}h^2$$

para $n \geq 2$. Como

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2}h^2) = +\infty$$

segue que

$$\lim \frac{x^n}{n} = +\infty.$$

Como queriamos.

De maneira, análoga prova-se que para todo $p \in \mathbb{N}$ e $x > 1$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n^p} = +\infty.$$

Esta prova deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 2.5.6:

Mostre que para todo número real $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x!}{x^n} = +\infty.$$

Solução:

Seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n_o}{x} > 2$ e $k = \frac{n_o!}{x^{n_o}}$. Para todo $n > n_o$, teremos

$$\frac{x!}{x^n} = k \cdot \frac{n_o + 1}{x} \cdot \frac{n_o + 2}{x} \cdot ... \cdot \frac{n}{x} > k \cdot (2)^{n-n_o}.$$

Daí segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x!}{x^n} = +\infty.$$

Este exemplo mostra que o fatorial de n cresce mais rápido do que x^n, seja qual for $x > 0$ fixo, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x!} = 0.$$

2.6 Exercícios

1. Seja a seqüência

$$x_n = 1 + a + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$. Prove que esta seqüência é crescente e limitada para todo n.

2. Prove que a seqüência com $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ dada por

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$$

para todo $n = 1, 2, 3, 4, ...$ é limitada.

3. Prove que se, $\lim x_n = a > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_o \Rightarrow x_n > 0$.

4. Sejam (x_n) e (y_n) seqüências convergentes. Prove que se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

5. Sejam $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

6. Seja (x_n) a seqüência definida por

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda \, |x_{n+1} - x_n|$$

para $o < \lambda < 1$. Prove que (x_n) é uma seqüência de Cauchy, e portanto convergente.

7. Usando o exercício anterior prove que:

$$\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) > \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Capítulo 3

Noções de Topologia

O leitor deve ter observado, no decorrer deste texto, que a Análise Matemática se fundamenta nos números reais. Partindo desse princípio, faremos um estudo das funções reais de uma variável real de maneira puramente analítica, ao contrário do que acontece nos cursos de Cálculo onde o estudo é feito apoiando-se na intuição geométrica. Mas, não pense o leitor, que as idéias geométricas serão abandonadas, pois serão usadas como guia importante da intuição, na busca dos caminhos da construção lógica.

Em qualquer estudo de Topologia é indispensável a noção de conjunto e é, por isso, que veremos agora algumas noções básicas de conjunto e é claro que o leitor já conhece várias delas. Todos os conjuntos aqui considerados são conjuntos de números reais, ou seja, são *subconjuntos* de $\mathbb{R}$. Fiquemos atentos para as notações:

1. $x \in A$ significa x pertence a A ou x é elemento de A;

2. $A \subset B$ significa A é um subconjunto de B ou todo elemento de A está em B;

3. $A = B$ é o mesmo que $A \subset B$ e $B \subset A$ simultaneamente;

4. Dados dois conjuntos A e B,

   (a) $A \cap B$ significa, interseção, o conjunto de todos os elementos que estão em A e em B simultaneamente;

   (b) $A \cup B$ significa, união, o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos A e B.

5. O símbolo $\emptyset$ significa um conjunto sem qualquer elemento, ou seja, vazio.

Vejamos algumas propriedades e definições sobre conjuntos.

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Definimos o *complementar* de um conjunto A, indicado por A^c, como sendo o conjunto dos elementos que não estão em A, ou melhor,

$$A^c = \mathbb{R} - A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}.$$

Observe o leitor que $\mathbb{R}^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = \mathbb{R}$.

Em relação a um outro conjunto B, o complementar de A é definido como

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}.$$

É facil ver que $B - A = B \cap A^c$. Temos ainda as chamadas *leis de De Morgan* para dois conjuntos A e B,

1. o complementar da união é a interseção dos complementares

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c;$$

2. o complementar da interseção é a união dos complementares

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

A união e a interseção de conjuntos se estende a mais de dois conjuntos e, em geral, a uma quantidade ilimitada qualquer. Assim, dada uma *família* qualquer $(A_i)_{i\in I}$ de conjuntos sua união e sua interseção são definidas como

$$\cup\{A_i : i \in I\} = \{x : x \in A_i \quad para \quad algum \quad i \in I\};$$

$$\cap\{A_i : i \in I\} = \{x : x \in A_i \quad para \quad todo \quad i \in I\}.$$

De agora por diante sempre que falarmos em “ número ”sem qualquer especificação, entenderemos tratar-se de um número real. Como os números reais são representados por pontos de uma reta, através de suas abscissas, usaremos a palavra “ ponto ”em lugar de “ número ”, ou seja, “ *ponto* x ”significa “ *número* x ”.

O conjunto dos números reais é o *espaço topológico*, isto é, é um conjunto equipado com estruturas que permite falar em limites e continuidade de funções, mais frequentemente utilizado e por isso o mais importante.

Passemos a estudar, nesse momento, as principais propriedades topológicas dos subconjutos da reta.

Definição 3.0.1:

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in A$ chama-se *ponto interior* de A quando existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$.

O conjunto de todos os pontos interiores a A é indicado por $int(A)$ e chamado o *interior de* A . É fácil ver que $int(A) \subset A$ e que se $A \subset B$ então $int(A) \subset int(B)$.

Lema 3.0.2:

Para que $x \in A$, $A \subset \mathbb{R}$, seja um ponto interior do conjunto A é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

Demonstração:

Se $x \in (a, b) \subset A$, seja ε o menor dos números positivos $x-\varepsilon$ e $x+\varepsilon$. Então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, b)$, logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

■

Outra maneira de exibirmos este lema é a que segue:

x é um ponto interior do conjunto A se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|y - x| < \varepsilon$ implica $y \in A$.

De fato, $|y - x| < \varepsilon$ significa que y pertence ao intervalo aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Exemplo 3.0.3:

(1) Se $A = (a, b)$, ou $A = (-\infty, b)$ ou $A = (a, +\infty)$, então $int(A) = A$. De fato, no primeiro caso, para todo $x \in A$ temos $x \in (a, b) \subset A$. No segundo caso, dado arbitrariamente $x \in A$ escolhemos $a < x$ e temos $x \in (a, b) \subset A$. O terceiro caso é análogo ao segundo.

(2) Sejam $A = [a, b]$, $B = [c, +\infty)$ e $C = (-\infty, d]$. Então $int(A) = (a, b)$, $int(B) = (c, +\infty)$ e $int(C) = (-\infty, d)$. Com efeito, para cada $x \in (a, b)$ temos $x \in (a, b) \subset A$ logo $(a, b) \subset int(A)$. Por outro lado $a \notin int(A)$, porque todo intervalo aberto contendo a possuirá pontos á esquerda de a, logo não estará contido em $[a, b]$. Do mesmo modo, o ponto b não é interior ao intervalo $[a, b]$. Logo o interior de $[a, b]$ é o intervalo aberto (a, b). O mesmo acontece com $A_1 = [a, b)$ e $A_2 = (a, b]$, ou seja, $int(A_1) = (a, b)$ e $int(A_2) = (a, b)$. De maneira análoga prova-se as afirmações feitas para B e C.

Definição 3.0.4:

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $int(A) = A$.

Em outras palavras, A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$.

Exemplo 3.0.5:

(1) O conjunto vazio é aberto. Com efeito, um conjunto A só não é aberto quando existe em A algum ponto que não seja interior. Como o conjunto vazio não possui ponto algum, somos forçados a admitir que $\emptyset$ é aberto.

(2) Obviamente, a reta $\mathbb{R}$ inteira é um conjunto aberto.

(3) Seja $A = (0, 1) \cup (2, 5)$. Então A é um conjuto aberto da reta.

De fato, para todo $x \in A$ tem-se $x \in (0, 1)$ ou $x \in (2, 5)$. Em qualquer um dos casos, existe um intervalo aberto que contém x e está contido em A.

(4) Um intervalo é um conjunto aberto se, e somente se, é um intervalo aberto. Deixamos a cargo do leitor a verificação deste fato.

Teorema 3.0.6:

(a) Se $A_1 \subset \mathbb{R}$ e $A_2 \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A_1 \cap A_2$ é aberto.

(b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

é um conjunto aberto.

Demonstração:

(a) seja $x \in A_1 \cap A_2$. Então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Logo existem intervalos tais que $x \in (a_1, b_1) \subset A_1$ e $x \in (a_2, b_2) \subset A_2$. Sejam a o maior dos números a_1, a_2, e b o menor dos números b_1, b_2. Então $x \in (a, b) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \subset A_1 \cap A_2$. Assim, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é interior e portanto esta interseção é um conjunto aberto.

(b) Seja $x \in A = \bigcup A_\lambda$. Então existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, podemos obter um intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$. Como $A_\lambda \subset A$, temos $x \in (a, b) \subset A$. Logo todo ponto $x \in A$ é interior e consequentemente A é aberto.

■

Corolário 3.0.7:

Se $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ então $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

Demonstração:

A demonstração é de fácil obtenção, basta aplicarmos $n - 1$ vezes o teorema anterior, obtendo assim $A_1 \cap A_2$ aberto, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$ aberto, ..., $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap, ..., \cap A_{n-1}) \cap A_n$ aberto. Com isso esta demonstrado o corolário.

■

Observação 3.0.8:

A interseção de um número infinito de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. De fato, consideremos os conjuntos abertos

$$A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Note que $0 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $0 \in \bigcap A_n$. Por outro lado, se $x \neq 0$ então $|x| > 0$ e, portanto, existe n tal que $0 < \frac{1}{n} < |x|$, ou seja,

$$x \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = A_n.$$

Assim se $x \neq 0$ então $x \notin \bigcap A_n$. Isto significa que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\},$$

mas o conjunto $\{\ 0\ \}$ não é aberto.

Exemplo 3.0.9:

(a) Todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ é uma reunião de intervalos abertos. Com efeito, para cada $x \in A$, escolhamos um intervalo aberto I_x tal que $x \in I_x \subset A$. Isto pode ser escrito assim: $\{x\} \subset I_x \subset A$. Tomando reuniões, temos

$$\bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A,$$

ou seja,

$$A \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A,$$

o que nos dá

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x.$$

(b) Seja $F = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ um conjunto finito de números reais. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Então

$$\mathbb{R} - F = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, x_3) \cup ... \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty).$$

Daí concluímos que $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Em outras palavras, o complementar de todo conjunto finito é aberto. De modo, análogo, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é aberto, pois

$$\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

é uma reunião de conjuntos abertos.

Definição 3.0.10:

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado *ponto de acumulação* do conjunto A quando todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro "$a$", contém algum ponto $x \in A$ *diferente* de "a".

De outra maneira, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \qquad 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de A é, as vezes, chamado de *derivado* de A, e indicado por A'.

Exemplo 3.0.11:

(1) Sendo $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ seu fecho é $A' = \{0\}$. De modo geral, se $\lim x_n = a$ e $a \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, pondo $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$, temos $A' = \{a\}$.

(2) $(a, b)' = [a, b)' = (a, b]' = [a, b]$.

Definição 3.0.12:

Um ponto "a"de um conjunto A diz-se *isolado* se não for ponto de acumulçãode A, ou seja, para que "a"seja um ponto isolado é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \{a\}$

Exemplo 3.0.13:

Todo ponto $a \in \mathbb{Z}$ é um ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

Definição 3.0.14:

Dizemos que um ponto "a"é *aderente* a um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ quando "a"for limite de uma seqüência de pontos de $x_n \in A$.

O conjunto de todos os pontos aderente a A é chamado *fecho* do conjunto A e representado por $\bar{\text{A}}$.

É fácil ver que, se $A \subset B$ então $\bar{\text{A}} \subset \bar{\text{B}}$ e que $A \subset \bar{\text{A}}$ para todo A.

Exemplo 3.0.15:

(1) Todo ponto $a \in A$ é aderente a A. De fato, tomando a seqüência de pontos,

constante, $x_n = a$, temos:

$$\lim x_n = a.$$

(2) Podemos ter um ponto a aderente a A sem que a pertença a A. Com efeito, seja $A = (0, +\infty)$, então $0 \notin A$, mas 0 é aderente a A, pois $\lim frac1n = 0$, onde $\frac{1}{n} \in A$ para todo n.

(3) O fecho do intervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado $[a, b]$. Com efeito, os pontos a e b são aderentes ao intervalo aberto (a, b) pois

$$\lim_{n\to\infty} a + \frac{1}{n} = a \qquad \lim_{n\to\infty} b - \frac{1}{n} = b.$$

Mas observe, o leitor, que se $a < x_n < b$ e $\lim x_n = c$ então $a \leq c \leq b$. Portanto, todo ponto aderente ao intervalo aberto (a, b) pertence ao intervalo fechado $[a, b]$.

É claro que $[a, b]$ é também o fecho dos intervalos semi-abertos $[a, b)$ e $(a, b]$, assim como, o fecho de $[a, b]$ é o proprio $[a, b]$.

Teorema 3.0.16:

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração:

Se a é aderente a A então $\lim x_n = a$ com $x_n \in A$ para todo n. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo n suficientemente grande. Logo $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Reciprocamente, supondo satisfeita a condição

$$A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in A$ tal que

$$x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}).$$

Isto define uma seqüência de pontos $x_n \in A$ tais que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Logo $\lim x_n = a$ e então a é aderente a A.

■

Definição 3.0.17:

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *fechado* se, e somente se, todo ponto aderente a A pertence a A, ou seja, quando o conjunto A coincide com o conjunto $\bar{A}$ ($A = \bar{A}$).

Teorema 3.0.18:

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Demonstração:

Temos que F é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a F pertence a F. Se $a \in \mathbb{R} - F$ então a não é aderente a F, mas isso acontece se, e somente se, existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $I \cap F = \emptyset$, mas isso se, e somente se, $a \in I \subset \mathbb{R} - F$ também se, e somente se, a é interior a $\mathbb{R} - F$, ou seja, se, e somente se, $\mathbb{R} - F$ é aberto.

■

Corolário 3.0.19:

(a) $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.

(b) Se $F_1, F_2, F_3, ..., F_n$ são fechados então $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup ... \cup F_n$ é fechado.

(c) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$$

é um conjunto fechado.

Demonstração:

(a) É óbvio, $\mathbb{R}$ é o complementar do aberto $\emptyset$, e $\emptyset$ é o complementar do aberto $\mathbb{R}$.

(b) Sendo $F_1, F_2, F_3, ..., F_n$ fechados temos, $\mathbb{R} - F_1, \mathbb{R} - F_2, \mathbb{R} - F_3, ..., \mathbb{R} - F_n$ abertos, isto implica que $(\mathbb{R} - F_1) \cap (\mathbb{R} - F_2) \cap (\mathbb{R} - F_3) \cap ... \cap (\mathbb{R} - F_n) = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup ... \cup F_n)$ é aberto, ou seja, $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup ... \cup F_n$ é fechado.

(c) Sendo cada F_λ fechado implica cada $\mathbb{R} - F_\lambda$ aberto que por sua vez implica $\bigcup_\lambda (\mathbb{R} - F_\lambda) = \mathbb{R} - \bigcap_\lambda F_\lambda$ aberto, ou seja,

$$F = \bigcap_{\lambda} F_\lambda$$

é fechado.

■

Observação 3.0.20:

A reunião de uma família arbitrária de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado. De fato, tome $A \subset \mathbb{R}$ qualquer conjunto que não seja fechado. É fácil ver, que todo conjunto A é a reunião dos seus pontos, ou seja,

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}.$$

Cada ponto $x \in A$ forma um conjunto fechado $\{x\}$ mas a reunião A não é um fechado.

Teorema 3.0.21:

O fecho de todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

Demonstração:

Seja $x \in \mathbb{R}-\bar{A}$ um ponto qualquer. Dessa forma x não é aderente a A, ou seja, existe um intervalo aberto I com $x \in I$ e $I \cap A = \emptyset$ e que, para todo $y \in I$ vale $y \in \mathbb{R}-\bar{A}$. Logo $I \subset \mathbb{R}-\bar{A}$. Isto mostra que todo ponto $x \in \mathbb{R}-\bar{A}$ é ponto interior, ou seja, que $\mathbb{R}-\bar{A}$ é aberto. Portanto, $\bar{A}$ é fechado.

■

3.1 Exercícios

1. Prove que um ponto a é aderente ao conjunto A se, e somente se, para todo intervalo aberto I contendo a tem-se $I \cap A \neq \emptyset$.

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e $B \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Prove que $a = inf(A)$ é aderente a A e $b = sup(B)$ é aderente a B.

3. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que as seguintes afirmações são verdadeiras:

   (a) $a \in A'$, ou seja, a é um ponto de acumulação de A;

   (b) $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma seqüência de A, dois a dois distintos;

   (c) todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos de A.

4. Usando o exercício anterior prove que, se $A' \neq \emptyset$ então A é infinito.

5. Prove que para todo $A \subset \mathbb{R}$, tem-se $\bar{A}=A \cup A'$. Ou seja, fecho de um conjunto A é obtido acrescentando-se a A os seus pontos de acumulação.

6. Usando o exercício 5 prove que:

A é fechado se, e somente se, $A' \subset A$;

Capítulo 4

Limite e continuidade de Funções

De forma mais geral, retornaremos agora a noção de limite. Em vez de seqüências, como estudamos anteriormente, vamos considerar funções reais $f : D \to \mathbb{R}$, definidas em subconjuntos arbitrários $D \subset \mathbb{R}$. Damos a seguir o conceito geral de função:

Definição 4.0.1:

Uma função " $f : D \to Y$ "é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.

Nosso estudo se ressumirá somente em funções cujos domínios sejam subconjuntos dos números reais, principalmente intervalos. O contradomínio será sempre o mesmo, o conjunto dos números reais e para indicar que uma função associa o elemento y ao elemento x escrevemos $y = f(x)$. Então quando for usada a notação $y = f(x)$, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, chamada *variável independente*. y é a *imagem de* x *pela função* f, chamada *variável dependente*.

Definição 4.0.2:

Uma função f com domínio D é dita *limitada à esquerda* ou *limitada inferiormente* se existe um número A tal que $A \leq f(x)$ para todo $x \in D$ e *limitada à direita* ou *limitada superiormrnte* se existe um número B tal que $f(x) \leq B$ para todo $x \in D$.

Uma função que é limitada à esquerda e à direita simultaneamente é dita *limitada*, ou seja, existe um número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$.

Definição 4.0.3:

Dizemos que uma função g é *extenção* de uma função f, ou que f é restrição de g, se o domínio de f está contido no domínio de g e as duas funções coincidem no domínio de f.

Definição 4.0.4:

Dizemos que uma função f com domínio D é *injetiva* ou *invertível* se

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

isto equivale a dizer que

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Em outra palavras, isto significa que cada elemento da imagem de f provém de um único elemento x no domínio de f, $y = f(x)$.

Definição 4.0.5:

Chamamos de *função inversa* da função f, a qual é indicada por f^{-1}, a função que leva $y \in f(D)$ no elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

É fácil o leitor notar que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in D$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(D)$.

Definição 4.0.6:

Seja f uma função definida num intervalo. Dizemos que f é

(a) *crescente* se $x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$;

(b) *decrescente* se $x > x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;

(c) *não-decrescente* se $x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$;

(d) *não-crescente* se $x > x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$

Em qualquer um desses casos f é chamada de *função monótona.*

Definição 4.0.7:

Uma função $f : D \to Y$, com domínio D, é dita *sobrejetiva* se $f(D)$ coincide com seu contradomínio Y.

4.1 Limite e continuidade

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos neste caso que f é uma função real de uma variável real.

Definição 4.1.1:

Dada uma função f com domínio D, seja x_o um ponto de acumulação de D. Dizemos que o número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a x_o se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, \quad 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Indicamos o limite de uma função por:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L, \quad f(x) \to L \quad com \quad x \to x_o, \quad ou \quad \lim f(x) = L.$$

Está última omitimos a indicação " $x \to x_o$ "e será usada quando não houver nenhuma dúvida.

Podemos reescrever a definição de limite como sendo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in D, \quad 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 4.1.2:

(1) Ao considerarmos o limite $\lim_{x \to x_o} f(x)$, não exigimos que x_o pertença ao domínio da função f.

(2) A exclusão do ponto $x = x_o$ na definição de limite é natural, pois o limite L nada tem a ver com o valor $f(x_o)$. O conceito de limite é utilizado para caracterizar o comportamento da função $f(x)$ nas proximidades do valor x_o, porém mantendo-se sempre diferente de x_o.

A definição que faremos a seguir, função contínua, é o tema central da Topologia. Após definir a noção de função contínua, demonstraremos algumas de suas propriedades mais elementares.

Definição 4.1.3:

Dizemos que a função f é contínua no ponto x_o se existir o limite de $f(x)$ com x tendendo a x_o e esse limite for igual a $f(x_o)$. Dizemos também, que f é contínua em seu domínio, ou simplesmente contínua, se ela for contínua em todos os pontos desse domínio.

Vejamos agora algumas das principais propriedades do limite de uma função.

Teorema 4.1.4:

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$. Se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_o} f(x) = L_2,$$

então $L_1 = L_2$.

Demonstração:

Por definição, dado quaquer $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que para $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < |x - x_o| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como $x_o \in D'$, podemos obter $y \in D$, tal que $0 < |y - x_o| < \delta$. Então

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(y)| + |f(y) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, portanto $L_1 = L_2$.

$\blacksquare$

Teorema 4.1.5:

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$. Para que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L,$$

é necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

para toda seqüência de pontos $x_n \in D - \{x_o\}$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_o$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad e \quad que \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_o,$$

com $x_n \in D - \{x_o\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, \quad 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Existe também $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow |x_n - x_o| < \delta.$$

Donde obtemos que

$$n > n_o \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Reciprocamente, suponhamos que não se tenha

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_n \in D$ com

$$0 < |x_n - x_o| < \frac{1}{n} \quad e \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Então $x_n \to x_o$, mas não se tem

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L,$$

o que nos leva a uma contradição. Portanto, termina aqui a demonstração.

■

Afim de facilitar algumas demonstrações, que estão por vir, estudaremos agora o limite de uma função composta.

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$, $y_o \in E'$,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = y_o$$

e

$$\lim_{y \to y_o} g(y) = L.$$

Para que tenha sentido falar em $g(f(x))$, $x \in D$, supomos que $f(D) \subset E$. É razoável esperar, nestas condições, que

$$\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = L.$$

Com efeito, x_o é ponto de acumulação do domínio da função $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Logo, tem sentido considerar

$$\lim_{x \to x_o} g(f(x)).$$

Além disso, como $g(y)$ tende para L quando y tende para y_o, é plausível imaginar que isto ocorre, em particular, para y da forma $y = f(x)$. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.6:

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, e $f(D) \subset E$. Sejam $x_o \in D'$ e $y_o \in E' \cap E$, com g contínua em y_o . Se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = y_o$$

e

$$\lim_{y \to y_o} g(y) = L,$$

então

$$\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = L.$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $y \in E$,

$$|y - y_o| < \eta \Rightarrow |g(y) - L| < \varepsilon.$$

A partir de η, obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \eta.$$

Então, $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \varepsilon,$$

o que nos dá o resultado desejado, ou seja,

$$\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = \lim_{y \to y_o} g(y) = L.$$

$\blacksquare$

Deixamos a cargo do leitor provar que as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ são contínuas.

Exemplo 4.1.7:

Se $\lim_{x\to x_o} f(x) = L$ então

$$\lim_{x\to x_o} [f(x)]^2 = L^2.$$

Solução:

Como $h(y) = y^2$ é contínua temos

$$\lim_{x\to x_o} [f(x)]^2 = \lim_{y\to L} y^2 = L^2.$$

Exemplo 4.1.8:

Seja $g : D \to \mathbb{R}$ e suponha $g(x) \neq 0$, para todo $x \in D$, $L \neq 0$ e $\lim_{x\to x_o} g(x) = L$. Prove que

$$\lim_{x\to x_o} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}.$$

Solução:

Seja

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{y}$$

onde $y = g(x)$, $x \in D$.

Como $h(y) = \frac{1}{y}$ é contínua em todo $y \neq 0$ temos

$$\lim_{x\to x_o} \frac{1}{g(x)} = \lim_{y\to L} \frac{1}{y} = \frac{1}{L}.$$

Teorema 4.1.9: do Confronto

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$. Se, para todo $x \in D$, $x \neq x_o$, for $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, tivermos

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = L.$$

Demonstração:

Por defintção, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e

$$0 < |x - x_o| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

donde obtemos

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = L.$$

■

Teorema 4.1.10:

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$.Se k for uma constante

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = M$$

então

(a)

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x).$$

(b)

$$\lim_{x \to x_o} (k \cdot f(x)) = k \cdot L = k \cdot \lim_{x \to x_o} f(x).$$

(c)

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M = \lim_{x \to x_o} f(x) \cdot \lim_{x \to x_o} g(x).$$

(d) Se $M \neq 0$ então

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

(e) Se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$$

e existe uma constante A tal que $|g(x)| \leq A$ para todo $x \in D - \{x_o\}$ então

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = 0,$$

mesmo que não exista

$$\lim_{x \to x_o} g(x).$$

Demonstração:

(a) Seja $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_o} g(x) = M$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_o| < \delta$ implica

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notemos que,

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Assim,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x).$$

(b) Se $k = 0$ é óbvio. Se $k \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Logo,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \varepsilon.$$

Ou melhor

$$\lim_{x \to x_o} (k \cdot f(x)) = k \cdot L = k \cdot \lim_{x \to x_o} f(x).$$

(c) Confiaremos ao leitor a verificação da seguinte igualdade:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}([f(x) = g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2).$$

Temos também que

$$\lim_{x\to x_o}[f(x)+g(x)]^2 = [\lim_{x\to x_o}(f(x)+g(x))]^2 = (L+M)^2$$

e

$$\lim_{x\to x_o}[f(x)-g(x)]^2 = [\lim_{x\to x_o}(f(x)-g(x))]^2 = (L-M)^2.$$

Concluímos daí que

$$\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = \frac{1}{4}([L+M]^2-[L-M]^2) = LM.$$

(d)

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_o} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = L\cdot\frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

(e) Uma vez que $|g(x)| \leq A$ para todo $x \in D - \{x_o\}$ temos

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq A\,|f(x)|\,.$$

Logo para todo $x \in D - \{x_o\}$

$$-A\,|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq A\,|f(x)|\,.$$

Note que

$$\lim_{x\to x_o} A\,|f(x)| = 0 \quad e \quad \lim_{x\to x_o} -A\,|f(x)| = 0,$$

pois

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

Pelo teorema do confronto obtemos o resultado desejado

$$\lim_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

■

Como consequência imediata deste teorema temos o seguinte:

Teorema 4.1.11:

(a) Se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $x_o \in D$, então $f+g$, $f-g$, $k\cdot f$ e $f\cdot g$ são contínuas nesse mesmo ponto. Se $g(x_o) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é contínua no ponto x_o.

(b) A composta de duas funções contínuas é contínua. Ou seja, se $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ são contínuas nos pontos $x_o \in D$, $y_o = f(x_o) \in E$, respectivamente, e além disso, $f(D) \subset E$, então $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto x_o.

Teorema 4.1.12: Critério de Cauchy para Funções

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $x_o \in D'$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Para que exista $\lim_{x\to x_o} f(x)$ é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$, tal que, para $x, y \in D$, com $0 < |x - x_o| < \delta$, $0 < |y - x_o| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demonstração:

Se existe

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L,$$

então, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$, tal que $x, y \in D$

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < |y - x_o| < \delta \Rightarrow |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}\, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Daí,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, dada uma seqüência arbitária de números reais $x_n \in D - \{x_o\}$ com $\lim x_n = x_o$, a seqüência $(f(x_n))$ é de Cauchy. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ fornecido pela hipótese. Existe então $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_o \Rightarrow 0 < |x_m - x_o| < \delta \quad e \quad 0 < |x_n - x_o| < \delta$$

e, portanto,

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Logo $(f(x_n))$ é convergente e pelo teorema 4.2, existe

$$\lim_{x\to x_o} f(x).$$

Como queriamos demonstrar.

■

4.2 Limites laterais

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_o \in D'_+$. Queremos que o leitor saiba que a notação D'_+ representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita de D, ou seja, $x_o \in D'_+$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ vale $D \cap (x_o, x_o + \delta) \neq \emptyset$. De maneira análoga, a notação D'_- representa o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de D, ou seja, $x_o \in D'_-$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ vale $D \cap (x_o - \delta, x_o) \neq \emptyset$.

Definição 4.2.1:

(a) Considerando x_o, ponto de acumulação à direita do domínio da função $f : D \to \mathbb{R}$ temos:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in D, \quad x_o < x < x_o + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Este limite, quando existe, é chamado de *limite lateral à direita* de f, em x_o.

(b) Considerando, agora, x_o, ponto de acumulação à esquerda do domínio da função $f : D \to \mathbb{R}$ temos:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in D, \quad x_o - \delta < x < x_o \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Este limite, quando existe, é chamado de *limite lateral à esquerda* de f, em x_o.

Exemplo 4.2.2:

Calcule o limite, à direita e à esquerda da função f, em 1, sendo

$$f(x) = x^2, \quad se \quad x < 1$$

$$f(x) = 2x, \quad se \quad x > 1$$

Solução:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1.$$

Teorema 4.2.3:

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_o \in D'_+ \cap D'_-$. Então existe

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L.$$

Demonstração:

Se existe o limite ordinário, evidentemente, existem os limites laterais e coincidem com o primeiro.

Reciprocamente, se

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L.$$

então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in D \cap (x_o, x_o + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$x \in D \cap (x_o - \delta_2, x_o) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D - \{x_o\} \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

■

Como consequência imediata desse teorema temos o seguinte:

Teorema 4.2.4:

A condição necessária e suficiente para que uma função seja contínua num ponto x_o de seu domínio, que seja ponto de acumulação à direita e à esquerda dessse domínio, é que os limites laterais da função existam nesse ponto e sejam ambos iguais a $f(x_o)$.

4.3 Teorema do Valor Intermediário

Uma função contínua num intervalo não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários, isto é o que nos diz o próximo teorema:

Teorema 4.3.1: do Valor Intermediário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração:

Seja $A = \{x \in [a, b] : f(x) < d\}$. A é não vazio pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de A é maior do que todos os outros. Com efeito, seja $k \in A$. Como $f(k) < d$, vemos que $k \neq b$ e, portanto, $k < b$. Tomando $\varepsilon = d - f(k)$, a continuidade de f no ponto k nos dá um $\delta > 0$, de forma que $[k, k + \delta) \subset [a, b]$, tal que, para todo $x \in [k, k + \delta)$ tem-se $f(x) < f(k) + \varepsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[k, k + \delta)$ pertencem a A. Agora ponhamos $c = sup(A)$. Como c é o limite de uma seqüência de pontos $x_n \in A$, temos $f(c) = \lim f(x_n) \leq d$. Como A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga concluir que $f(c) = d$.

■

Corolário 4.3.2:

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo I. Então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração:

Com efeito, sejam

$$A = inf_{x \in I} f(x) \quad e \quad B = sup_{x \in I} f(x).$$

Não se aflinja, o leitor, está notação é simbólica. Podemos ter $A = -\infty$, se f for ilimitada inferiormente em I, ou $B = +\infty$, se f for ilimitada superiormente em I. Afirmamos que $f(I)$ é um intervalo, cujos extremos são A e B. Em outras palavras, dado y com $A < y < B$, deve existir $x \in I$ tal que $y = f(x)$. De fato, pelas definições de inf e de sup existem $a, b \in I$ tais que $f(a) < y < f(b)$. Pelo teorema do valor intermediário temos que exite um ponto x, entre a e b, tal que $f(x) = y$. Como queriamos.

■

Teorema 4.3.3:

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, sua imagem $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $I = [a, b]$. Sabemos que $f(a) \neq f(b)$. Para uma melhor compreenção, vamos supor que $f(a) < f(b)$. Nestas condições, afirmamos que f é crescente. De fato, se não fosse f crescente, existiriam pontos $x < y$ em $[a, b]$ tais que $f(x) > f(y)$. Temos então duas possibilidades:

(i) $f(a) < f(y)$

(ii) $f(a) > f(y)$.

No primeiro caso, temos

$$f(a) < f(y) < f(x)$$

e pelo teorema do Valor intermediário existirá $c \in (a, x)$ com $f(c) = f(y)$, em contradição com a hipótese de f ser injetiva.

No segundo caso, temos

$$f(y) < f(a) < f(b)$$

e mais uma vez , pelo teorema do Valor intermediário existirá $c \in (y, b)$ com $f(c) = f(a)$, em contradição com a injetividade de f. Com isto demonstramos que toda função contínua injetiva, definida num intervalo, é monótona.

Temos, pelo corolário anterior que $J = f(I)$ é um intervalo. Finalmente, temos evidentemente que a inversa de uma função monótona é monótona. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f seja crescente, de forma que f^{-1} também é. Seja $a = f^{-1}(b)$, assim $f(a) = b$. Se a for interior ao intervalo I, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' > 0$, com $\varepsilon' \leq \varepsilon$, tal que $(a - \varepsilon', a + \varepsilon') \subset I$. Ora,

$$f[(a - \varepsilon', a + \varepsilon')] = (b - \delta_1, b + \delta_2).$$

Seja agora δ o menor dentre δ_1 e δ_2, de sorte que

$$f^{-1}[(b - \delta, b + \delta)] \subset (a - \varepsilon', a + \varepsilon') \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

com isto provamos que f^{-1} é contínua no ponto b. Um raciocínio análogo se aplica no caso em que b é um dos extremos do intervalo J.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração quando f^{-1} for decrescente, uma vez que a mesma é análoga à anterior. ■

Observação 4.3.4:

Sendo f uma função contínua, injetiva e monótona, o intervalo $J = f(I)$ é aberto, ou fechado, ou semi-aberto se o intervalo I é, respectivamente, aberto, ou fechado, ou semi-aberto. Com efeito, sendo f monótona injetiva, $a \in I$ é um extremo de I se, e somente se, $f(a)$ é um extremo de J.

4.4 Limites no infinito e limites infinitos

Definição 4.4.1:

(a) Sejam $D \subset \mathbb{R}$, ilimitado superiormente, e $f : D \to \mathbb{R}$. Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 : \quad x \in D, \quad x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

(b) Sejam $D \subset \mathbb{R}$, ilimitado inferiormente, e $f : D \to \mathbb{R}$. Escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 : \quad x \in D, \quad x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < -A$.

Quardando as devidas adaptações, evidentes, todos os resultados obtidos para o limite quando $x \to x_o$ são validas aqui.

Exemplo 4.4.2:

Calcule

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}.$$

Solução:

Note, o leitor, que quanto maior o valor de x, mais próximo de zero estará $\frac{1}{x}$. Assim, dado qualquer $\varepsilon>0$ e tomando $A=\frac{1}{\varepsilon}$

$$x>A\Rightarrow 0<\frac{1}{x}<\varepsilon$$

e, portanto,

$$x>A\Rightarrow 0-\varepsilon<\frac{1}{x}<0+\varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Observe, o leitor, que

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

mas não existe

$$\lim_{x\to+\infty}e^x.$$

Para englobarmos situações como esta, definiremos " limites infinitos".

Definição 4.4.3:

(a) Sejam $D\subset\mathbb{R}$, $x_o\in D'$ e $f:D\to\mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=+\infty$$

quando, para todo $A>0$ dado, existe $\delta>0$ tal que

$$x\in D,\quad 0<|x-x_o|<\delta\Rightarrow f(x)>A.$$

(b) Sejam $D\subset\mathbb{R}$, $x_o\in D'$ e $f:D\to\mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=-\infty$$

quando, para todo $A>0$ dado, existe $\delta>0$ tal que

$$x\in D,\quad 0<|x-x_o|<\delta\Rightarrow f(x)<-A.$$

Exemplo 4.4.4:

(a)

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{(x - x_o)^2} = +\infty,$$

pois, dado qualquer $A > 0$, basta tomar $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ que obtemos

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow 0 < (x - x_o)^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{(x - x_o)^2} > A.$$

(b) Sem sombra de dúvida temos

$$\lim_{x \to x_o} \frac{-1}{(x - x_o)^2} = -\infty.$$

4.5 Descontinuidade de uma função

Dada $f : D \to \mathbb{R}$, um *ponto de descontinuidade* ou, simplesmente, uma descontinuidade, da função f é um ponto $a \in D$ tal que f não é contínua nesse ponto.

Em outras palavras, $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de $f : D \to \mathbb{R}$ se existe um número $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe um $x_\delta \in D$ com $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

As descontinuidades de uma função costumam ser classificadas em três tipos: *removível, de primeira espécie e de segunda espécie.* A descontinuidade removível é aquela que pode ser eliminada por uma conveniente definição da função no ponto considerado, como por exemplo

Exemplo 4.5.1:

A função

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

possui uma descontinuidade removível em $x = 0$, pois, ela possui limite igual a 1 quando $x \to 0$, apenas não está adequadamente definida nesse ponto.

A descontinuidade é de primeira espécie ou do tipo salto quando a função possui, no ponto considerado, limites à direita e à esquerda , mas esses limites são distintos.

Exemplo 4.5.2:

A função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

possui limites laterais

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1,$$

pois coincide com $x+1$ em $(0, +\infty)$ e com $x-1$ em $(-\infty, 0)$. Logo, esta função possui uma descontinuidade de primeira espécie em $x = 0$.

Finalmente, descontinuidade é de segunda espécie quando a função tende a $\pm\infty$ no ponto considerado, ou não tem limite nesse ponto.

Exemplo 4.5.3:

A função

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

possui limites iguais a $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente, se $x \to a^+$ e $x \to a^-$. Conseqüêntemente, $f(x)$ possui uma descontinuidade de segunda espécie em $x = a$.

4.6 Exercícios

1. Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D'$. Prove que se existe

$$\lim_{x \to x_o} f(x)$$

então f é limitada numa vizinhança de x_o, isto é, existem $A > 0$, $\delta > 0$ tais que

$$0 < |x - x_o| < \delta, \quad x \in D \quad \Rightarrow |f(x)| < A.$$

2. Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $g,f : D \to \mathbb{R}$ e $x_o \in D'$. Prove que se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = M$$

com $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

3. Prove que se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L > 0$$

então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$,

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, com $x \neq x_o$,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = M.$$

Prove que $L \leq M$.

5. Prove que:

(a) Para que exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$ é necessário que exista $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ e independa da seqüência de números $x_n \in D - \{x_o\}$ com

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_o.$$

(b) Para que exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$ é suficiente que exista $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ e para toda seqüência de números $x_n \in D - \{x_o\}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_o.$$

6. Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, uma função monótona limitada, $x_0 \in D'_+$ e $x_1 \in D'_-$. Mostre que existem os limites laterais

$$L = \lim_{x \to x_o^+} f(x) \quad e \quad M = \lim_{x \to x_o^-} f(x)$$

De posse do Teorema do Valor Médio resolva os exercícios 7, 8 e 9 seguintes.

7. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua que só assume valores inteiros. Mostre que f é constante.

8. Mostre que todo polinômio real $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_1 x^1 + a_0$$

de grau ímpar, ou seja, $a_n \neq 0$ e n ímpar, possui uma raiz real, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

9. Prove que

$$\sqrt[n]{y}$$

existe para todo $y \geq 0$.

10. Prove que:

(a) Toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $[c, +\infty)$, possui limite com $x \to \infty$;

(b) Toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $(-\infty, c]$, possui limite com $x \to -\infty$;

11. Seja f uma função monótona e limitada, definida num intervalo I, do qual $x = a$ é ponto de acumulação à direita ou à esquerda. Mostre que $f(x)$ tem limite com $x \to a^+$ ou $x \to a^-$, respectivamente.

Capítulo 5

Derivadas de Funções Reais

Vamos estudar, neste capítulo, as derivadas de funções reais de uma variável. Evidentemente suponhamos que o leitor já tenha tido um contato, num curso de Cálculo, com as derivadas e suas aplicações mais elementares.

5.1 Definição e Propriedades da Derivada

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 5.1.1:

Dizemos que f é *derivável* em $x_o \in I$ quando existe o limite

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Para indicar esse limite usamos a notação $f'(x_o)$, ou melhor,

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Geometricamente, a derivada $f'(x_o)$ representa a incliniação, ou coeficiente angular, da *reta tangente* ao gráfico de f que passa pelos pontos $(x_o, f(x_o))$ e $(x, f(x))$. Em outras palavras, a reta de equação

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

é, por definição, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_o, f(x_o))$ cujo coeficiente angular é a derivada de f em x_o.

Fazendo $x = x_o + h$ podemos reescrever a derivada como segue:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Sendo x_o extremo esquerdo ou direito de um intervalo onde f seja definida podemos definir, de maneira análoga, as *derivadas laterais, à direita e à esquerda*, respectivamente por:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Portanto, dizer que uma função f é derivavel num ponto $x_0 \in I$, onde f está definida, significa que existe, no ponto x_o, as derivadas laterais de f e elas são iguais. Agora, caso x_o seja um dos extremos, existe apenas, no ponto x_o, aquela derivada lateral que faz sentido.

A seguir daremos alguns exemplos que deixaremos para o leitor verificar a sua veracidade, coisa esta que não é difícil, bastanto usar a definição de derivada.

Exemplo 5.1.2:

(1) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$f'(a) = 0$$

para todo $a \in \mathbb{R}$, isto é, a derivada de uma constante é nula.

(2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Então, para todo $x_o \in \mathbb{R}$ a derivada $f'(x_o) = a$. Ora, para todo $x_o \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_o) = a(x - x_o)$$

isto implica que

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = a.$$

(3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como sendo $f(x) = x^2$. Afirmamos que $f'(x_o) = 2x_o$. De fato,

$$f(x_o + h) = (x_o + h)^2 = x_o^2 + 2x_oh + h^2,$$

assim

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=2x_o+h.$$

(4) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado por $f(x)=|x|$. A função f não possui derivada no ponto $x_o=0$. Com efeito, se $x\neq 0$ então

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\pm 1,$$

1 se $x>0$ e -1 se $x<0$. Logo existem as derivadas laterais $f'(0^+)=1$ e $f'(0^-)=-1$, mas não existe $f'(0)$, pois $f'(0^+)\neq f'(0^-)$.

Entretanto, para $x_o\neq 0$, existe a derivada $f'(x_o)$, como vimos ela vale 1 se $x_o>0$ e -1 se $x_o<0$.

Lema 5.1.3:

Dada uma função f, a condição necessária e suficiente para que f seja derivável em x_o é que

$$f(x_o+h)=f(x_o)+L\cdot h+r(h),$$

com

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Demonstração:

Se a função f é derivável em um ponto x_o, escreveremos

$$r(h)=f(x_o+h)-f(x_o)-f'(x_o)\cdot h.$$

Então para todo $h\neq 0$ temos

$$f(x_o+h)=f(x_o)+f'(x_o)\cdot h+r(h),$$

com

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Reciprocamente, dada uma função f, suponhamos que exista uma constante L tal que se possa escrever

$$f(x_o+h)=f(x_o)+L\cdot h+r(h),$$

com

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0.$$

Assim temos que

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = L + \frac{r(h)}{h}$$

e, portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = L,$$

ou seja, existe a derivada $f'(x_o)$ e é igual a L. Assim termina a demonstração.

■

Note que a constante L, se existir com aquela propriedade, é única e igual a $f'(x_o)$.

Podemos, ainda, escrever a condição do lema anterior como segue:

$$f(x_o+h) = f(x_o) + [f'(x_o)+\eta(h)]h,$$

com

$$\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0.$$

A função η será definida para todo h tal que $x_o+h\in D_f$, também para $h=0$. Para $h\neq 0$, teremos

$$\eta(h) = \frac{r(h)}{h} = f(x_o+h) - f(x_o)h - f'(x_o).$$

Para $h=0$, faremos $\eta(h)=0$. Assim a continuidade da função η no ponto 0 equivale à existência da derivada $f'(x_o)$.

Vamos agora, à algumas propriedades da derivada.

Teorema 5.1.4:

Toda função f derivável num ponto x_o é contínua nesse ponto.

Demonstração:

Sendo f derivável no ponto x_o, existe o limite

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.$$

Consequentemente, existe o seguinte limite

$$\lim_{x\to x_o}[f(x)-f(x_o)] = \lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot(x-x_o)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim_{x \to x_o} (x - x_o) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

e f é contínua em x_o, como queriamos.

■

Usando a definição de derivada, o leitor, facilmente prova que se f e g são deriváveis num ponto x, então $f+g$ também é derivável nesse ponto e $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$, ou seja, a derivada da soma é a soma das derivadas de cada parcela. É igualmente fácil provar que $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, onde k é uma constante real. Isto é, a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Teorema 5.1.5:

Se f e g são deriváveis num ponto x_o, então:

(a) $f \cdot g$ também é derivável nesse ponto e

$$[f \cdot g]'(x_o) = f(x_o)' \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g(x_o)'.$$

(b) Se $g(x_o) \neq 0$, temos que $\frac{f}{g}$ é derivável em x_o e

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x_o) = \frac{g(x_o)f(x_o)' - f(x_o)g(x_o)'}{[g(x_o)]^2}.$$

Demonstração:

(a) Observe o leitor que

$$f(x)g(x) - f(x_o)g(x_o) = f(x)g(x) - f(x_o)g(x) + f(x_o)g(x) - f(x_o)g(x_o)$$

Logo por definição

$$[f \cdot g]'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)g(x) - f(x_o)g(x_o)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)g(x) - f(x_o)g(x) + f(x_o)g(x) - f(x_o)g(x_o)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot g(x) + f(x_o) \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}\right]$$

$$= f(x_o)' \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g(x_o)'.$$

Observe que, pelo fato de g ser derivável em x_o, g será contínua em x_o e, assim,

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o).$$

(b) Se $g(x_o) \neq 0$, vem que

$$\left[\frac{1}{g(x_o)}\right]' = \frac{-g(x_o)'}{[g(x_o)]^2}.$$

De fato,

$$\left[\frac{1}{g(x_o)}\right]' = \lim_{x \to x_o} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_o)}}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} -\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_o)} = \frac{-g(x_o)'}{[g(x_o)]^2}.$$

Do item (a), regra do produto, obtemos

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x_o) = \left[f \cdot \frac{1}{g}\right]'(x_o) = f'(x_o) \cdot \frac{1}{g(x_o)} + f(x_o) \cdot \left[\frac{1}{g}\right]'(x_o)$$

ou melhor,

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x_o) = \frac{f'(x_o)}{g(x_o)} - \frac{f(x_o)g(x_o)'}{[g(x_o)]^2} = \frac{g(x_o)f(x_o)' - f(x_o)g(x_o)'}{[g(x_o)]^2}.$$

Completando assim a demonstração.

■

Teorema 5.1.6: Regra da Cadeia

Consideremos uma função composta $g \circ f$, definida num intervalo I, com $f(I) \subset D_g$. Suponhamos que f seja derivável num ponto $x_o \in I$ e g derivável em $y_o = f(x_o)$. Então a função composta $g(f(x))$ é derivável no ponto x_o e

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Demonstração:

Sendo f e g deriváveis temos, pelo Lema 5.1,

$$f(x_o + h) = f(x_o) + [f'(x_o) + \eta_1(h)]h,$$

com

$$\lim_{h\to 0} \eta_1(h) = 0,$$

$$g(y_o + k) = g(y_o) + [g'(y_o) + \eta_2(k)]k,$$

com

$$\lim_{k\to 0} \eta_2(k) = 0,$$

Pondo

$$k = f(x_o + h) - f(x_o) = [f'(x_o) + \eta_1(h)]h,$$

temos $y_o + k = f(x_o + h)$ assim

$$g(f(x_o + h)) = g(y_o + k) = g(y_o) + [g'(y_o) + \eta_2(k)]k$$

$$= g(y_o) + [g'(y_o) + \eta_2(k)] \cdot [f'(x_o) + \eta_1(h)]h$$

$$= g(y_o) + [g'(y_o) \cdot f'(x_o) + \theta(h)]h,$$

com

$$\theta(h) = \eta_2(f(x_o + h) - f(x_o)) \cdot [f'(x_o) + \eta_1(h)] + g'(y_o) \cdot \eta_1.$$

Como f é contínua no ponto x_o e η_2 é contínua no ponto 0 , temos

$$\lim \eta_2(f(x_o + h) - f(x_o)) = 0$$

logo

$$\lim_{k\to 0} \theta(h) = 0,$$

o que prova o teorema.

■

Teorema 5.1.7: Derivada de uma Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo $I = (a, b)$, com $f'(x)$ sempre positivo ou sempre negativa nesse intervalo. Então sua inversa $x = g(y)$ é derivável no intervalo $J = f(I)$ e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demonstração:

Sejam $y_o \in J$, $y \in J$, $x_o = g(y_o)$ e $x = g(y)$. Então

$$\frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} = \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}.$$

Sabemos que J é um intervalo aberto, assim podemos fazer y variar em toda uma vizinhança de y_o, ao mesmo passo que x estará variando em toda uma vizinhaça de x_o. Fazendo $y \to y_o$ implicará que $x \to x_o$, pois g é contínua. Logo,

$$\lim_{y \to y_o} \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} = \frac{1}{\lim_{x \to x_o} [\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}]}.$$

Portanto temos o resultado desejado

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

■

Exemplo 5.1.8:

Seja função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$. Está Função é uma bijeção contínua, com inversa contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Temos que $f'(x_o) = 3x_o^2$. Consequentemente, $f'(x_o) \neq 0$ para $x_o \neq 0$ mas $f'(0) = 0$. Logo g não possui derivada no ponto $0 = f(0)$. Para $x_o \neq 0$ e $y_o = x_o^3$ temos, pelo teorema anterior, que

$$g'(y_o) = \frac{1}{3x_o^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y_o^2}}$$

Evidentemente, este resultado não tem nenhum sentido para $y_o = 0$.

5.2 Teorema do Valor Médio

Definição 5.2.1:

(i) Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ possui *máximo local* no ponto $x_o \in D$ quando existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_o).$$

Agora se,

$$x \in (D - x_o) \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_o),$$

dizemos que f possui um máximo local *estrito* no ponto x_o.

(ii) Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ possui *mínimo local* no ponto $x_o \in D$ quando existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x) \geq f(x_o).$$

Agora se,

$$x \in (D - x_o) \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_o),$$

dizemos que f possui um mínimo local *estrito* no ponto x_o.

Teorema 5.2.2:

Se f é uma função derivável num ponto $x = c$, onde ela assume valor máximo ou valor mínimo, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Seja c um ponto de máximo. Note que para $|h|$ suficientemente pequeno, $f(c+h) - f(c) \leq 0$ e temos que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

é ≤ 0 se $h > 0$ e ≥ 0 se $h < 0$. Consequentemente, o limite dessa razão com $h \to 0$ só pode ser zero, donde obtemos $f'(c) = 0$. Com raciocínio análogo prova-se o mesmo quando c é um ponto de mínimo.

■

Estamos na eminência de enuciar o Teorema do Valor Médio, que, pelas várias consequências, é o resultado central do Cálculo Diferencial.

Teorema 5.2.3: de Rolle

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, derivável nos pontos interiores, com $f(a) = f(b)$, então sua derivada se anula em algum ponto interior, ou seja, $f'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.

Demonstração:

Se f for constante, então f' se anula em todos os pontos interiores, e não há nada a fazer. Agora se f não for constante, terá que assumir valores maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo f contínua num intervalo fechado, f assume um valor máximo e um valor mínimo. Então, se f assumir valores maiores do que $f(a)$, ela assumirá seu máximo num ponto interior c e se assumir valores menores do que $f(a)$, assumirá seu mínimo num ponto interior c. Em qualquer uma das hipóteses, pelo teorema anterior, $f'(c) = 0$. Como queriamos demonstrar.

■

Exemplo 5.2.4:

(i) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$. Temos que $f(0) = f(1)$ e que f é derivável em $(0, 1)$ mas $f'(x) = 1$ para qualquer $0 < x < 1$, pois, f não é contínua em $[0, 1]$.

(ii) Seja agora $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Sem dúvida, a função f é contínua em $[-1, 1]$ e além disso temos que $f(-1) = f(1)$, porém não existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Isto porque a função f não é derivável no ponto 0.

(ii) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Como vemos f é contínua em $[-1, 1]$ mas é derivável apenas no intervalo aberto $(-1, 1)$. Contudo, podemos aplicar o Teorema de Rolle a esta função. No ponto $x = 0$, temos $f'(0) = 0$.

Vamos então ao Teorema do Valor Médio.

Teorema 5.2.5: do Valor Médio

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável nos pontos interiores, então existe um ponto interior $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração:

Defina a função F com sendo

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que está função se anula nos pontos $x = a$ e $x - b$, ou seja, $f(a) = f(b) = 0$. Então pelo Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Isto implica que

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ou melhor

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}.$$

■

Nota 5.2.6:

Geometricamente, isto significa que existe um número c entre a e b, tal que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Este teorema é válido, ainda que, a e b sejam substituidos por dois números quaisquer x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, não importando qual desses dois números é o maior, isto é,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2),$$

onde c é um número conveniente entre x_1 e x_2.

O Teorema do Valor Médio tem importantes consequências. Ele nos permite saber, por exemplo, se uma função é crescente ou decrescente, conforme sua derivada seja positiva ou negativa, respectivamente. Assim, se uma função tem derivada positiva em todo intervalo (a, b), obtemos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

assim f é uma função crescente. Agora se a derivada for negativa em (a, b), obtemos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

assim f é uma função decrescente.

Exemplo 5.2.7:

Seja f uma função com $f(0) = 0$ e f' crescente em $(0, \infty)$. Prove que a função

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

também é crecente em $(0, \infty)$.

Solução:

Pelo Teorema do Valor Médio, $g(x) = f'(c)$, $0 < c < x$. De $c < x$ temos que $f'(c) < f'(x)$, já que f' é crescente. Como $g(x) = f'(c)$ temos que $g(x) < f'(x)$. Consequentemente, $g'(x) > 0$, pois:

$$g(x) < f'(x) \Rightarrow xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

e portanto g é crescente.

5.3 Exercícios

1. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in D \cap D'_+$. Mostre que se, $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$,

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x).$$

2. Seja $a \in D$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Prove que:

Se $f : D \to \mathbb{R}$ possui, no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$

$$a - \delta < x < y < a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y).$$

3. Seja $a \in D \cap D'_+ \cap D'_-$. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em todos os pontos $x \in [a, b]$. Prove que, se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$. (Este resultado é conhecido como *Teorema do Valor intermediário para a derivada*)

5. Prove que:

Se uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nua em todos os pontos $x \in (a, b)$ então f é constante.

6. Prove que:

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, deriváveis em (a, b), e $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

7. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$, mostre que, para quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|\,.$$

8. Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Prove que se existe

$$\lim_{x \to x_o} f'(x) = L$$

então existe $f'_+(x_o)$ e vale $f'_+(x_o) = L$.

9. Seja f uma função derivável em todo um intervalo $[a, b]$, com $f'(a^+) \neq f'(b^-)$. Prove que, dado qualquer número m entre $f'(a^+)$ e $f'(b^+)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = m$.

Em outras palavras, $f'(x)$ assume todos os valores entre $f'(a^+)$ e $f'(b^+)$, com x variando em (a, b).

10. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema do Valor Médio Generalizado de Cauchy

Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Além disso, suponhamos que $g'(x) \neq 0$ e $g(b) - g(a) \neq 0$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Referências Bibliográficas

[1] **Ávila, Geraldo** - *Introdução à Análise Matemática* - Edgard Blucher LTDA, São Paulo.

[2] **Lima, Elon L.** - *Análise Real* - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, **vol. 1**, Rio de Janeiro.

[3] **Guidorizzi, Hamilton L.** - *Um Curso de Cálculo* - Livros Técnicos e Científicos , **vol. 1**, 2^a edição, Rio de Janeiro.

[4] **Guidorizzi, Hamilton L.** - *Um Curso de Cálculo* - Livros Técnicos e Científicos, **vol. 4**, Rio de Janeiro.

[5] **Reis, Genésio L. , Silva, Valdir V.** - *Geometria Analítica* - Livros Técnicos e Científicos, 2^a edição, Rio de Janeiro.