



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Camila Campos Carvalho

DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO
EVOLUTIVO AUTO-ADAPTATIVO PARA A RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM VARIÁVEIS MISTAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

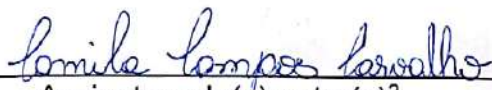
Nome completo do autor: Camila Campos Carvalho.

Título do trabalho: Desenvolvimento de um Algoritmo de Otimização Evolutivo Auto-Adaptativo para a Resolução de Problemas de Otimização com Variáveis Mistas.

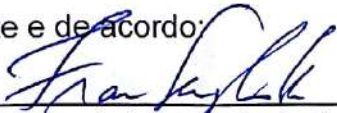
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ **SIM** ☐ **NÃO¹**

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 10 / 12 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

CAMILA CAMPOS CARVALHO

DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO
EVOLUTIVO AUTO-ADAPTATIVO PARA A RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM VARIÁVEIS MISTAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Fran Sérgio Lobato

CATALÃO – GO

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Carvalho, Camila Campos

Desenvolvimento de um Algoritmo de Otimização Evolutivo Auto
Adaptativo para a Resolução de Problemas de Otimização com
Variáveis Mistas [manuscrito] / Camila Campos Carvalho. - 2018.
cv, 105 f.

Orientador: Prof. Fran Sérgio Lobato.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade
Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão,
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2018.
Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista
de tabelas.

1. Algoritmo de Colônia de Vagalumes. 2. Parâmetros Auto
Adaptativo. 3. Variáveis Mistas. 4. Funções Matemáticas. 5. Projeto
de Sistemas de Engenharia. I. Lobato, Fran Sérgio, orient. II. Título.

CDU 517



Defesa Nº 41

Ata de Defesa Pública – Dissertação de Mestrado

Aos 10 dias do mês de Dezembro do ano de 2018, às 8 h: 37 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores Dr. Fran Sérgio Lobato (presidente e orientador), Dr. Celso Vieira Abud e o Dr. Davi Leonardo de Souza para, em sessão pública realizada no Laboratório de Simulação de Mecanismos (J-01), da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação do trabalho intitulado: "DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO EVOLUTIVO AUTO-ADAPTATIVO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM VARIÁVEIS MISTAS", em nível de Mestrado, área de concentração *Modelagem e Otimização*, de autoria de **Camila Campos Carvalho**, discente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (PPGMO) da UFG/RC. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao discente que, dentro do tempo regulamentar, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o candidato, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação do trabalho. Os membros da banca consideraram o trabalho final: (☒) **Aprovado** ou (☐) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10 h: 15 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Fran Sérgio Lobato, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente e, posteriormente, será homologada pelo Colegiado do PPGMO.

Catalão-GO, 10 de Dezembro de 2018.

Prof.(a) Dr.: Fran Sérgio Lobato
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.
(Presidente da Banca)

Prof.(a) Dr.: Celso Vieira Abud
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.

Prof.(a) Dr.: Davi Leonardo de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Discente: Camila Campos Carvalho
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, UFG/RC.

Agradecimentos

À minha família e amigos, por terem me compreendido e me apoiado nos momentos mais difíceis e em todos os meus devaneios.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato, por ter me recebido atentamente e por me ceder tamanha oportunidade de trabalho, por ter acreditado no meu potencial, por me incentivar e apoiar durante todo percurso.

Aos professores e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

A vida nunca está completa sem seus desafios.
Todos nós desejamos ter superpoderes. Todos desejamos que pudéssemos fazer mais do que
podemos fazer.

Stan Lee

RESUMO

CARVALHO, C.C.. *Desenvolvimento de um Algoritmo de Otimização Evolutivo Auto-Adaptativo para a Resolução de Problemas de Otimização com Variáveis Mistas*. 2018. 105 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Nas últimas décadas, as abordagens por algoritmos evolutivos têm recebido considerável atenção em diferentes campos da ciência e da engenharia, dentre os quais pode-se citar o projeto de sistemas de engenharia. Apesar do grande número de aplicações, os algoritmos evolutivos apresentam como uma de suas principais desvantagens o fato de possuírem parâmetros de entrada constantes durante todo o processo de busca, o que pode impossibilitar uma exploração mais eficiente do espaço de busca ou levar a localização de ótimos locais. Associado a esse fato, problemas realísticos apresentam uma maior complexidade no que tange a natureza das variáveis de projeto envolvidas, ou seja, podem apresentar variáveis que não são definidas exclusivamente no domínio real. Assim, o vetor de variáveis de projeto em aplicações reais podem apresentar natureza mista, isto é, podem ser caracterizadas como reais (contínuas), inteiras, binárias e discretas. Diante do que foi apresentado, essa contribuição tem por objetivo apresentar uma proposta para a atualização dinâmica dos parâmetros do Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV), bem como uma nova abordagem para a geração de candidatos em uma sub-população. Além disso, uma estratégia para o tratamento de problemas com variáveis mistas também é proposta. Uma análise de sensibilidade paramétrica é realizada afim de entender como a escolha dos valores de cada parâmetro do ACV pode influenciar o processo de otimização do método, e se podem ainda comprometer a qualidade da solução. Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta em problemas com variáveis reais e mistas demonstram a eficiência dessa nova estratégia em termos de convergência e do custo computacional em relação ao algoritmo canônico.

Palavras-chaves: Algoritmo de Colônia de Vagalumes, Parâmetros Auto-Adaptativos, Variáveis Mistas, Funções Matemáticas, Projeto de Sistemas de Engenharia.

ABSTRACT

CARVALHO, C.C.. *Development of a Self-Adaptive Evolutionary Algorithm to Solve Mixed Optimization Problems*. 2018. 105 f. Master Thesis in Modelling and Optimization – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

In last decades, evolutionary algorithm have been received considerable attention in different fields of science and engineering, with emphasis in engineering systems design. Despite at the large number of applications, these algorithms consider that parameters are constant during the search process, which may result in a search less efficient in design space. In addition, realistic problems are more complex in relation to the nature of project variables involved, i.e., these problems may present mixed variables (real (or continuous), integer, binary and discrete). In this contribution, it is proposed a new strategy to update the Firefly Algorithm (FA) parameters, as well as a new methodology to generate candidates. It is also proposed a strategy for the treatment of problems with mixed variables. An analysis of the parametric sensitivity is performed to understand how the choice of the values of each parameter of the FA could influence the method optimization process and still compromise the quality of the solution. The results obtained with the application of proposed methodology in mixed and real problems demonstrate that the performance of FA can be improved, in terms of convergence and computational cost, in relation to canonical algorithm.

Keywords: Firefly Algorithm, Self-Adaptive Parameters, Mixed Variables, Mathematical Functions, Engineering Systems Design.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Categorias dos Algoritmos de Otimização	26
Figura 4.1 – Influência do Número de Indivíduos	47
Figura 4.2 – Influência do Número de Gerações	48
Figura 4.3 – Influência do Fator de Inserção de Regularidade	50
Figura 4.4 – Influência do Fator de Atratividade	51
Figura 4.5 – Influência do Fator de Absorção de Luz	53
Figura 5.1 – Diagrama de Bifurcação	57
Figura 6.1 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para a Função F_1	65
Figura 6.2 – Diagrama <i>Cobweb</i> para a Atualização do Parâmetro β	66
Figura 6.3 – Projeto de um Recipiente de Pressão	67
Figura 6.4 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de um Recipiente de Pressão	68
Figura 6.5 – Projeto de uma Viga Engastada Soldada	69
Figura 6.6 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Viga Engastada	71
Figura 6.7 – Evolução da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para a Função F_{m1}	76
Figura 6.8 – Projeto de um Sistema com Engrenagens	78
Figura 6.9 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema Projeto de um Sistema de Engrenagem Composto	79
Figura 6.10 – Projeto de uma Viga de Concreto	80
Figura 6.11 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Viga de Concreto	82
Figura 6.12 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de um Vaso de Pressão com Variáveis Mistas	84
Figura 6.13 – Projeto de uma Mola sob Tração	84
Figura 6.14 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Mola sob Tração/Compressão	87
Figura 6.15 – Projeto de uma Viga Engastada	87

Figura 6.16 –Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma
Viga Engastada 89

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – População Inicial para a Função Matemática f	40
Tabela 3.2 – Intensidade de Luz e Ordenação dos Vagalumes Iniciais para o Problema 3.4	41
Tabela 3.3 – Atualização da População para a Função Matemática f	42
Tabela 4.1 – Configuração ‘default’ para os Parâmetros	46
Tabela 6.1 – Resultados obtidos pelas estratégias ACV ¹ , ACV ² , ACV ³ e ACVA conside- rando Funções Matemáticas com Variáveis Reais	64
Tabela 6.2 – Resultados Obtidos com os Algoritmos ACV e ACVA	68
Tabela 6.3 – Resultados Obtidos com os Algoritmos ACV e ACVA para o Projeto de uma Viga Engastada Soldada	70
Tabela 6.4 – Resultados Obtidos para os Problemas Matemáticos com Variáveis Mistas	75
Tabela 6.5 – Resultados Obtidos para o Problema Misto F_{m7}	77
Tabela 6.6 – Resultados Obtidos para o Problema Misto F_{m8}	77
Tabela 6.7 – Resultados para o Problema do Projeto de um Sistema de Engrenagem Composto	78
Tabela 6.8 – Conjunto Discreto que Define a variável x_1	81
Tabela 6.9 – Resultados Obtidos para o Problema do Projeto de uma Viga de Concreto .	81
Tabela 6.10 – Resultados Obtidos para o Problema do um Projeto de Vaso de Pressão com Variáveis Mistas	83
Tabela 6.11 – Diâmetros Disponíveis para o Fio da Mola	86
Tabela 6.12 – Resultados Obtidos para o Problema do Projeto de uma Mola sob Tração/- Compressão	86
Tabela 6.13 – Resultados Obtidos para o Projeto de uma Viga Engastada	89
Tabela 6.14 – Desempenho do ACVA nos Problemas de Engenharia com Variáveis Reais.	90
Tabela 6.15 – Desempenho do ACVA nos Estudos de Caso de Sistemas de Engenharia com Variáveis Mistas.	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACV — Algoritmo de Colônia de Vagalumes

AG — Algoritmos Genéticos

ED — Evolução Diferencial

CR — Probabilidade de Cruzamento

PSO — *Particle Swarm Optimization* - Enxame de Partículas

EP — Enxame de Partículas

ACF — Algoritmo Colônia de Formigas

SA — *Simulated Annealing* - Recozimento Simulado

BFGS — Algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

HLO — *Human Learning Optimization*

HcHLO — *Hybrid coded Human Learning Optimization*

NAFO — Número de Avaliações da Função Objetivo

FO — Função Objetivo

ACVA — Algoritmo de Colônia de Vagalumes Auto-Adaptativo

TC — Taxa de Convergência

RT — Relação de Transmissão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	25
2.1	Formulação Matemática	25
2.2	Categorias de Problemas de Otimização	26
2.3	Classificação dos Métodos de Otimização	27
2.3.1	Algoritmos Genéticos	28
2.3.2	Evolução Diferencial	29
2.3.3	Enxame de Partículas	30
2.3.4	Colônia de Formigas	31
2.3.5	Recozimento Simulado	31
2.4	Atualização dos Parâmetros em Algoritmos de Otimização	32
2.5	Problemas com Variáveis Mistas	33
3	O ALGORITMO DE COLÔNIA DE VAGALUMES	37
3.1	Exemplo da evolução do ACV	39
3.2	Estratégias para Aumentar o Desempenho do ACV	42
4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA	45
4.1	Influência do Tamanho da População	46
4.2	Influência do Número de Gerações	48
4.3	Influência do Fator de Inserção de Regularidade	49
4.4	Influência do Fator de Atratividade	51
4.5	Influência do Fator de Absorção de Luz	52
4.6	Conclusões Preliminares	53
5	ATUALIZAÇÃO DOS OPERADORES NO ACV	55
5.1	Atualização do Tamanho da População	55
5.2	Atualização do Fator de Atratividade e do Parâmetro de Absorção de Luz	56
5.3	Atualização do Parâmetro de Inserção de Regularidade	58
5.4	Técnica das Sub-populações	58
5.5	Operador para o Tratamento de Variáveis Mistas	59

6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	61
6.1	Funções Matemáticas com Variáveis Reais	61
6.2	Projeto de Sistemas de Engenharia com Variáveis Reais	67
6.2.1	Projeto de um Recipiente de Pressão	67
6.2.2	Projeto de uma Viga Engastada	69
6.3	Funções Matemáticas com Variáveis Mistas	71
6.4	Projeto de Sistemas de Engenharia com Variáveis Mistas	77
6.4.1	Projeto de um Sistema com Engrenagem	77
6.4.2	Projeto de uma Viga de Concreto	80
6.4.3	Projeto de um Vaso de Pressão	82
6.4.4	Projeto de uma Mola sob Tração/Compressão	84
6.4.5	Projeto de uma Viga Engastada	87
6.5	Conclusões Preliminares	90
7	CONCLUSÕES	93
	REFERÊNCIAS	95

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o uso de métodos de otimização tem-se configurado uma ferramenta de grande auxílio na tomada das decisões em diferentes campos da ciência e da engenharia. Isso se deve ao aprimoramento e desenvolvimento de estratégias mais genéricas e capazes de lidar com problemas mais realísticos, visto que a sua evolução pode ser observada desde as primeiras estratégias propostas para a resolução de problemas não-lineares irrestritos até os problemas não-lineares de grande dimensão e complexidade. Nesse caso, observa-se uma nova vertente no que tange o desenvolvimento de novas ferramentas de otimização, que vai desde o aprimoramento dos atuais métodos até a integração e adaptação de novos algoritmos de modo a obter uma ferramenta cada vez mais robusta.

No contexto da engenharia, o projeto de sistemas caracteriza um tema de pesquisa de grande relevância devido ao grande número de aplicações que podem ser realizadas. Isso se deve, entre outros fatores, a necessidade do aumento da eficiência e qualidade dos processos, bem como a necessidade da redução dos custos associados aos mesmos. Para a realização de tais necessidades faz-se necessário o uso de ferramentas de otimização associadas a simuladores para que a análise possa ser realizada. Além disso, há que se destacar a complexidade dos modelos envolvidos na etapa de projeto, a saber, a representação dos balanços de massa, energia e quantidade de movimento usando equações diferenciais, relações constitutivas e geométricas e a presença de variáveis mistas (contínuas, inteiras, discretas e binárias) (BAYKASOGLU; OZSOYDAN, 2015).

Em se tratando da natureza das variáveis associadas aos problemas de projeto de sistemas, pode-se destacar a presença das variáveis mistas, isto é; variáveis contínuas (reais), binárias, discretas e inteiras. Por exemplo, ao considerar a abordagem quantitativa de equipamentos, o número associado deve ser naturalmente um valor inteiro (ou seja, uma variável inteira). Um outro exemplo é a necessidade de atendimento de determinadas especificações de mercado, isto é, um diâmetro ou um comprimento deve obedecer a disponibilidade do mercado, o que implica em uma variável discreta. Além disso, a localização do ponto de

alimentação em uma coluna de destilação é um exemplo onde uma variável pode ser caracterizada como binária.

Nesse contexto, a solução associada a um projeto de um sistema de engenharia torna-se mais complexa, já que: *i)* em sua concepção original, os métodos de otimização propostos não são capazes de lidar diretamente com diferentes tipos de variáveis, e *ii)* a presença de variáveis mistas implica no atendimento de novas restrições associadas a sua natureza. Portanto, em tal cenário, resolver um problema de projeto de engenharia, considerando a presença de diferentes tipos de variáveis, se caracteriza em um grande desafio.

Para a resolução dos problemas de projeto, dois tipos de abordagens podem ser empregadas: *i)* a abordagem analítica, em que se faz uso do cálculo diferencial e integral para a determinação da solução ótima (aplicação das condições de otimalidade) e *ii)* a abordagem numérica, em que são empregadas aproximações e relações iterativas para a obtenção da solução aproximada do problema. Por se tratar de uma metodologia mais geral e abrangente, a abordagem numérica tem sido, preferencialmente, empregada para a resolução do problema de projeto, já que a resolução analítica se restringe a um número finito de estudos de caso e que não representam, em sua grande maioria, a realidade dos problemas de projeto.

Dentre as abordagens numéricas, pode-se classificar os métodos de otimização em duas grandes classes: a Determinística (ou Clássica) e a Não-Determinística (Técnicas Inspiradas na Natureza ou Heurística ou Evolutiva). Em linhas gerais, os Métodos Clássicos são aqueles que fazem uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a atualização de um candidato a solução do problema de otimização. Já os Não-Determinísticos são fundamentados em analogias com processos que acontecem na natureza para a atualização de um candidato ou de uma população de candidatos a solução do problema de otimização.

No caso dos Métodos Não-Determinísticos, mais precisamente no que diz respeito a técnicas bio-inspiradas, o Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV), ou simplesmente Algoritmo Vagalume (*Firefly Algorithm*), proposto por Yang (2008), têm sido objeto de estudo em recentes trabalhos na literatura especializada (YANG, 2010a; VERMA; MUKHERJEE, 2016; SÁNCHEZ; MELIN; CASTILLO, 2017; SHUKLA; SINGH, 2017)). Em linhas gerais, o ACV baseia-se em modelar a interação entre os vagalumes em uma população através da simulação da etapa de acasalamento. Assim sendo, pode-se utilizar essa informação como ferramenta para a atualização da posição dos vagalumes de modo que esteja relacionada com o valor da função objetivo avaliada (YANG, 2008).

Tradicionalmente, os parâmetros de entrada de quaisquer algoritmos evolutivos, como o ACV, são considerados constantes durante todo o processo de otimização. Tal característica simplifica os algoritmos, facilitando assim sua implementação, mas deixa de considerar um aspecto muito interessante da evolução biológica, a saber, a variação do número de in-

divíduos da população, que é inerente aos sistemas biológicos reais. Intuitivamente, pode ser benéfico para a população se expandir nas primeiras gerações, isto é, assumir o seu valor máximo, enquanto a diversidade da população é alta. Tal aspecto oferece aos indivíduos da população a oportunidade para a exploração satisfatória do espaço de projeto, promovendo assim uma melhor diversidade da população. Por outro lado, do ponto de vista da otimização em si, ao final do processo evolutivo, a tendência natural da população é se tornar mais homogênea, o que implica avaliações desnecessárias da função objetivo e, por consequência, no aumento do custo computacional (LOBATO; STEFFEN; OLIVEIRA-LOPES, 2007; TAVAZOEI; HAERI, 2007).

A presente contribuição tem por objetivo propor uma nova metodologia para aumentar a capacidade de exploração do ACV na resolução de problemas com variáveis mistas. Que fundamenta-se em dois pontos, a saber, na inserção de operadores para a atualização dos principais parâmetros do ACV e da incorporação de uma nova estratégia para a geração de candidatos em potencial no ACV, via utilização de uma sub-população. A metodologia proposta será avaliada em uma série de problemas matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia modelados por variáveis reais e/ou mistas que apresentam diferentes níveis de complexidade. Em adição, uma análise de sensibilidade paramétrica será utilizada com intuito de justificar a necessidade de parâmetros adaptativos, através de estudos comportamentais.

O trabalho encontra-se estruturado como segue: o Capítulo 2 apresenta aspectos gerais sobre o problema de otimização no que tange a sua concepção conceitual, formulação matemática e classificação, entre outros. Os Capítulos 3 e 4 apresentam a concepção conceitual do ACV, bem como a análise de sensibilidade dos parâmetros na qualidade da solução obtida em problemas matemáticos, respectivamente. Já no Capítulo 5 é apresentada a descrição dos operadores propostos para a atualização dos parâmetros do ACV, assim como a abordagem de sub-populações e a estratégia para o tratamento das variáveis mistas. Os resultados são apresentados no Capítulo 6. Já as conclusões são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 2

O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Conceitualmente, otimizar significa extrair as máximas potencialidades de uma determinada tarefa. Inconscientemente, o ser humano está sempre procurando um meio de otimizar as suas atividades cotidianas. Por exemplo, encontrar a melhor rota da casa para o trabalho e vice versa; determinar o local onde serão realizadas as refeições; planejar o pagamento das contas do mês, bem como a realização de novas compras; são ilustrações de como a otimização está presente no nosso dia a dia.

Do ponto de vista matemático, resolver um problema de otimização implica no conhecimento de um modelo matemático que representa uma dada atividade, isto é; deve-se conhecer a função objetivo (índice que deseja-se otimizar), as variáveis de projeto, também conhecidas como variáveis de busca ou decisão (variáveis independentes que deverão ser encontradas de modo a atingir o objetivo), e as restrições (relações que definem a região - espaço de projeto - onde a solução será procurada). Para essa finalidade, também deve-se escolher uma técnica apropriada para a resolução deste tipo de problema.

O presente capítulo tem por objetivo apresentar aspectos gerais no que tange a formulação matemática do problema de otimização, suas categorias e classificações. Além disso, também será apresentada uma breve revisão sobre a atualização dos parâmetros em algoritmos de otimização e sobre as abordagens existentes para a resolução de problemas com variáveis mistas.

2.1 Formulação Matemática

De forma geral, o problema de otimização consiste em minimizar ou maximizar uma função objetivo composta por um vetor de variáveis de projeto de busca ou decisão, sujeito a um vetor de restrições, que podem ser laterais, de igualdade e/ou desigualdade algébricas e diferenciais.

Segundo [Vanderplaats \(1999\)](#), o problema de otimização mono-objetivo algébrico

pode ser definido como:

$$\min f(X), \quad (2.1)$$

sujeito à:

$$g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.2a)$$

$$h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (2.2b)$$

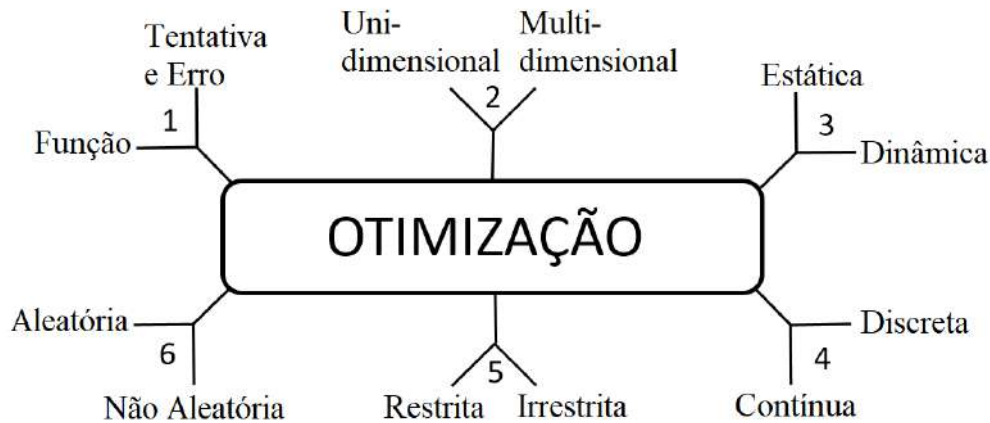
$$X_i^L \leq X_i \leq X_i^U, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2c)$$

sendo $f(X)$ a função objetivo, $g_j(X)$ é o vetor com m restrições de desigualdade, $h_k(X)$ é o vetor com l restrições de igualdade, e X_i é o vetor com n variáveis de busca, onde os índices L e U representam os limites laterais inferior e superior, respectivamente.

2.2 Categorias de Problemas de Otimização

Os problemas de otimização podem ser classificados de acordo com categorias, conforme apresentado por Haupt e Haupt (2004) na Fig. 2.1 e descrito em detalhes a seguir.

Figura 2.1 – Categorias dos Algoritmos de Otimização.



Fonte: Adaptado de (HAUPT; HAUPT, 2004).

1. Função ou Tentativa e Erro: enquanto na categoria Função tem-se a representação matemática do problema a ser resolvido através de um modelo, na categoria Tentativa e Erro não se conhece o modelo matemático do problema em análise, isto é, parte-se do uso de estimativas aleatórias para tentar encontrar a melhor solução do problema de otimização.

2. Uni-dimensional e Multi-dimensional: refere-se à quantidade de variáveis contidas no problema de otimização. No problema uni-dimensional, tem-se apenas uma única variável de busca, enquanto no problema multi, tem-se mais que uma variável de busca. Quanto maior o número de variáveis, mais complexo o problema se torna, e mais difícil é a sua resolução;
3. Estática versus Dinâmica: a categoria Estática refere-se aos problemas que não sofrem influência do tempo. Por outro lado, o problema dinâmico sofre influência do tempo;
4. Discreta e Contínua: consiste numa classificação que diz respeito a natureza das variáveis envolvidas. No caso da otimização contínua, abrange um espaço infinito de soluções enquanto a discreta está sujeita a um conjunto finito de possibilidades (dentre as quais pode-se, sem grande prejuízo, destacar a presença de variáveis binárias e inteiras, formando a classe de variáveis mistas);
5. Restrita versus Irrestrita: os problemas restritos são aqueles que possuem alguma limitação (restrição) no espaço de busca. Essas restrições relacionam o vetor de variáveis de busca podendo ser de igualdade, desigualdade ou laterais, sendo inerentes em problemas reais devido à complexidade dos mesmos. Enfatiza-se que, a priori, todo e qualquer problema de otimização é restrito, visto que nenhuma solução é procurada em um domínio infinito;
6. Aleatória ou Não-Aleatória: os algoritmos não-aleatórios, também conhecidos como métodos clássicos de otimização, fazem uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a atualização de um candidato a solução do problema de otimização, sendo nesse caso conhecidos como métodos de busca local. Já os algoritmos aleatórios são fundamentados em analogias com processos (físicos, químicos e biológicos) que acontecem na natureza ou em procedimentos puramente estruturais, para a atualização de um ou mais candidatos a solução do problema de otimização.

2.3 Classificação dos Métodos de Otimização

Conforme descrito anteriormente, os métodos para a resolução de problemas de otimização pode ser classificados em duas grandes classes: a Determinística (ou Clássica) e a Não-Determinística (Meta-Heurística ou Evolutiva).

Os Métodos Clássicos são fundamentados em princípios do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, fazem uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a determinação da direção de busca do ótimo. De forma geral, pode-se dizer que possuem como grande vantagem, a rápida taxa de convergência quando uma *boa* estimativa inicial para o projeto é fornecida, resultando em um menor número de avaliações da função

objetivo. Contudo, tais métodos apresentam uma inabilidade intrínseca em lidar com mínimos locais. Como investem todo esforço em um único ponto do espaço de projeto, ao se depararem com mínimos locais não conseguem avançar, e acabam por convergir prematuramente para um mínimo local, configurando como uma das suas principais desvantagens (VANDERPLAATS, 1999). Além disso, ressalta-se o elevado custo computacional para a avaliação numérica dos gradientes em problemas reais, bem como a sua não aplicabilidade em problemas descritos por funções descontínuas e em problemas com variáveis mistas.

Já os Métodos Não-Determinísticos são baseados, em sua grande maioria, na geração de uma população de candidatos para solução do problema de otimização. Estes, diferentemente dos Métodos Clássicos, não fazem uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a determinação de uma solução em potencial. Dentre os maiores representantes da classe de métodos evolutivos, pode-se destacar as estratégias inspiradas na natureza. Como o próprio nome diz, são estratégias fundamentadas em fenômenos que acontecem na natureza (físicos, químicos ou biológicos) (DEB, 2001; LOBATO, 2008). Segundo Yang (2010a), o surgimento desse tipo de metodologia tem como objetivo primordial aumentar a possibilidade de que um candidato possa escapar de um ótimo local a partir da inserção de um termo capaz de gerar aleatoriedade no algoritmo. Nessas metodologias, a função objetivo é avaliada várias vezes, sendo possível trabalhar com vários pontos do espaço de projeto ao mesmo tempo (população de pontos candidatos à solução do problema de otimização) em uma iteração (geração), o que naturalmente eleva o custo computacional, configurando como a sua principal desvantagem em relação aos clássicos (DEB, 2001; LOBATO, 2008). Entretanto, tal dificuldade pode ser compensada pela menor probabilidade que os métodos não-determinísticos têm de se deixarem prender em mínimos locais, isto é; são reconhecidamente métodos de busca global (DEB, 2001). De modo geral, estão associados ao tipo de varredura que é realizada no espaço de busca (DEB, 2001).

A seguir são apresentados alguns dos principais representantes da classe de Métodos Não-Determinísticos, a saber: o Algoritmo Genético, o algoritmo de Evolução Diferencial, o algoritmo de Enxame de Partículas, o algoritmo de Colônia de Formigas e o algoritmo de Recozimento Simulado. No capítulo 3 será abordado, separadamente, o algoritmo colônia de vagalume, principal objeto de estudo desta dissertação.

2.3.1 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG) surgiram a partir das ideias apresentadas por Jonh Holland em seu livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* em 1975. Em linhas gerais, este algoritmo de otimização é uma estratégia estocástica com busca direcionada, isto é; leva em conta o histórico de informações já obtidas no seu processo de atualização associado à regras que fazem com que o processo evolutivo não seja puramente aleatório (DEB, 2001; LOBATO, 2008). Baseado na seleção natural da teoria da evolução de Darwin, o AG

usa a analogia da adaptação natural e recombinação genética no desenvolvimento do seu processo, onde a cada nova iteração uma população de indivíduos é gerada pelos denominados pais, ou seja, os indivíduos 'melhor' adaptados ou com maior chance de sobrevivência propagam seus genes (LINDEN, 2008).

No AG canônico, as variáveis são codificadas em uma cadeia binária, assim o algoritmo parte de um conjunto de cromossomos (conjunto populacional), onde cada cromossomo é formado por um conjunto de genes (e cada gene é representado por um bit), que são avaliados frente ao seu valor objetivo (custo) e entram no processo de seleção natural. A seleção pode ser dada por vários métodos, desde procedimentos aleatórios até baseados no seu custo, sendo considerados como métodos padrões a seleção por roleta e seleção por torneio. Uma vez selecionado os melhores cromossomos, submetem os mesmo ao procedimento de cruzamento, onde dois indivíduos passam por troca genética e geram dois novos cromossomos para a próxima geração, essa é uma forma simples de recombinação genética conhecida por cruzamento de ponto único. E por fim os cromossomos gerados passam pelo processo de mutação, onde os genes são escolhidos aleatoriamente para o processo que consiste na troca de bits (1 por 0, ou vice-versa), onde o seu objetivo é impedir a convergência brusca ao inserir possibilidade de novas características do espaço de busca a nova população (HAUPT; HAUPT, 2004).

Muitos pesquisadores tem utilizado o AG com sucesso em diversas áreas, incluindo o uso como método auxiliar na determinação de parâmetros ótimos em estudo de redes de função de base radial (CHEN; WU; LUK, 1999) e de predição do tempo de vida de baterias de lítio íon polímero (BRONDANI, 2015). Também é possível encontrar a utilização de AG em estudos de problemas de eletromagnetismo (WEILE; MICHELSEN, 1997); em adsorção (GHAEDI *et al.*, 2014; GHAEDI *et al.*, 2015; JAMSHIDI *et al.*, 2015); em sistemas de distribuição de água (BI; DANDY; MAIER, 2015); em transferência de calor (geometria) (ESTRADA, 2016), entre outras aplicações.

2.3.2 Evolução Diferencial

Similar ao AG, o algoritmo de Evolução Diferencial (ED), apesar de não ser uma técnica bio-inspirada, é um dos algoritmo mais empregados para a resolução de problemas de otimização.

Desenvolvido por Storn e Price (1995), o procedimento geral é dado pelas seguintes etapas: *i*) inicialmente, gera-se uma população inicial com NP soluções factíveis para o problema em questão, onde garante-se que os valores atribuídos às variáveis estão dentro das fronteiras delimitadas pelo projetista; *ii*) seleciona-se um indivíduo, de forma aleatória, para ser substituído (genitor principal). Dois indivíduos diferentes são selecionados como genitores (genitores secundários); *iii*) modifica-se cada variável do genitor principal com alguma probabilidade de cruzamento CR ; *iv*) adiciona-se ao valor atual da variável (geni-

tor principal) a diferença entre duas outras variáveis (genitores secundários) ponderada por uma taxa de perturbação F . Este procedimento representa o operador de cruzamento na ED; v) se o vetor resultante apresenta uma função objetivo melhor que a escolhida, ele é substituído; caso contrário, tal vetor escolhido para ser eventualmente substituído é mantido na população.

O algoritmo de ED tem aplicabilidade comprovada em diversas áreas, tais como no controle de frequência de carga em sistemas energéticos (MOHANTY; PANDA; HOTA, 2014); em siderurgia para a resolução de um problema de programação dinâmica na produção de fundição contínua de aço (TANG; ZHAO; LIU, 2014); em problemas de identificação de fontes de poluição de águas subterrâneas (GURARSLAN; KARAHAN, 2015); em associação com redes neurais (WANG; ZENG; CHEN, 2015; MASON; DUGGAN; HOWLEY, 2018); na otimização estrutural (VARGAS *et al.*, 2016); em genética quantitativa e melhoramento de plantas (FEOKTISTOV; PIETRAVALLE; HESLOT, 2017); na otimização de dados em redes de energia (GOUDOS *et al.*, 2017); em sistemas fotovoltaicos (CHIN; SALAM; ISHAQUE, 2016; TEY *et al.*, 2018), entre outras aplicações.

2.3.3 Enxame de Partículas

Proposto por Kennedy e Eberhart (1995), o algoritmo de otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*- PSO), tem como objetivo imitar o comportamento social de bandos de pássaros, cardumes de peixes e enxames em geral.

O método consiste em uma população de pontos (pássaros) determinados como partículas que voam no hiperespaço (espaço de busca), sendo capazes de interagir e influenciar uns aos outros seguindo três princípios da teoria socio-cognitiva para o processo de adaptação cultural, a saber, avaliar (capacidade de avaliar o ambiente e distinguir características do mesmo permitindo o ato de aprendizagem); comparar (usada como princípio para definição de padrões que evidenciam as características superiores) e imitar (capacidade de imitar pode promover a aquisição e manutenção de habilidades) (KENNEDY; EBERHART; SHI, 2001).

Na literatura é possível encontrar diferentes aplicações do algoritmo EP, dentre as quais pode-se citar a sua aplicabilidade em problemas nucleares (WAINTRAUB, 2009); na determinação da composição do biodiesel em misturas contendo biodiesel, óleo vegetal e diesel (RIZZI *et al.*, 2016); na suscetibilidade de florestas tropicais a incêndios (BUI *et al.*, 2017); no processo de geração de energia eólica (WIJAYA KUKUH DAUD PRIBADI, 2017); em sistemas fotovoltaicos (BABU *et al.*, 2018); em projetos para a troca de calor em nanofluidos orgânicos (ESFE *et al.*, 2018), entre outras aplicações.

2.3.4 Colônia de Formigas

Proposto por [Dorigo, Maniezzo e Colorni \(1991\)](#), o Algoritmo Colônia de Formigas (ACF) é inspirado no comportamento de formigas no que tange a sua capacidade de estabelecer o caminho mais curto entre a fonte de alimento e a colônia. Apesar disto, o ACF considera características não existentes nesse comportamento, como por exemplo considerar formigas com memórias em ambientes com tempo discreto. Dessa forma cada indivíduo (formiga) do ACF é denominado de formiga artificial e que está em busca de alimento (provável ponto ótimo). Assim, cada formiga deixa no seu caminho uma trilha de feromônios que influencia as demais na tomada de decisão do melhor caminho para a fonte de alimento. O melhor caminho é evidenciado pela capacidade de dispersão do feromônio ser proporcional a distância, isto é; o menor caminho terá maior concentração de feromônios, outro fator que influencia a concentração de feromônios é quantidade de formigas que optam por determinado caminho ([DORIGO; MANIEZZO; COLORNI, 1991](#)).

O ACF tem sido usado em diversas áreas, dentre as quais pode-se citar a alocação de sondas ([ALOISE *et al.*, 2002](#)); a otimização de cadeias proteicas ([LI *et al.*, 2011](#)); no roteamento, localização e separação de sistemas de transporte de cargas ([TING; CHEN, 2013](#); [WONG; MOIN, 2017](#); [SANTIS *et al.*, 2018](#)); em sistemas de tratamento de águas residuais urbanas e em sistemas de distribuição de água ([VERDAGUER *et al.*, 2014](#); [ZHENG *et al.*, 2017](#)); em sistemas de gerenciamento de energia ([MARZBAND *et al.*, 2016](#)); no projeto de motores de indução ([YIN *et al.*, 2018](#)), entre outras aplicações.

2.3.5 Recozimento Simulado

Outro método de otimização de grande destaque é o algoritmo de Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*) ([KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983](#)). No qual consiste em simular o recozimento de metais em metalurgia de forma a relacionar o recozimento físico de sólidos com problemas de otimização combinatória ([EGLESE, 1990](#)).

A função objetivo é associada à quantidade de energia do sistema, em que a população inicial (ou o candidato único) é gerada de forma aleatória. O processo do recozimento simulado inicia com um sistema em cada candidato apresenta uma determinada temperatura (alta). Que, na medida em que o processo acontece, são reduzidas lentamente até que seja alcançado um estado de equilíbrio do sistema, ou seja, quando não ocorre mudança ([KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983](#)). Assim, este estado onde não tem-se mais mudanças relaciona-se à solução do problema de otimização.

Existem vários estudos que utilizam o recozimento simulado como ferramenta de otimização, dentre as quais pode-se citar a sua aplicação em sistemas fotovoltaicos ([CHAVES *et al.*, 2016](#)); no projeto de torres de linha de transmissão ([TORT; ŞAHIN; HASANÇEBİ, 2017](#)); em problemas de roteamento ([WANG *et al.*, 2017b](#)); em topologia ([ZHANG *et al.*, 2017](#)) e

alinhamentos de redes biológicas (MAMANO; HAYES, 2017), dentre outras aplicações.

2.4 Atualização dos Parâmetros em Algoritmos de Otimização

É inquestionável que todos os algoritmos, clássicos ou não, possuem parâmetros que precisam ser informados pelo usuário para a resolução de um dado problema. Tradicionalmente, tais parâmetros são considerados constantes durante o processo evolutivo. O que simplifica muito os métodos em termos de sua implementação, embora o seu uso não garanta a convergência prematura ou que o espaço de projeto seja explorado de maneira a proporcionar diversidade à população ao longo do processo evolutivo (ZAHARIE, 2002; YANG; LI; CHENG, 2007).

Em se tratando do número de parâmetros, os algoritmos evolutivos apresentam um número superior aos clássicos e que devem ser definidos pelo usuário. Na literatura especializada, diversas estratégias para a atualização dinâmica dos parâmetros empregados em tais algoritmos já foram propostas. Dentre os trabalhos pode-se citar os que seguem:

Zaharie (2002) propuseram estratégias para a atualização dos parâmetros no algoritmo de ED baseado em informações estatísticas da população. Coelho e Mariani (2006) desenvolveram uma estratégia híbrida baseada na associação entre modelos caóticos de busca, ED e Programação Quadrática Sucessiva. A metodologia proposta foi empregada para a otimização do problema do despacho econômico. Coelho, Bernert e Mariani (2011) propuseram um algoritmo caótico de busca associado ao ACV para o tratamento de problemas com confiabilidade.

Em Tavazoei e Haeri (2007) é realizado um estudo sobre o desempenho de diferentes modelos caóticos de busca quando estes são incorporados a abordagens clássicas de otimização. Yang, Li e Cheng (2007) propõem combinações entre o Método de Monte Carlo, o Algoritmo Clássico BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e alguns modelos caóticos para formar algoritmos híbridos que são aplicados a um conjunto de funções matemáticas de teste. Uma versão híbrida do Algoritmo de Enxame de Partículas com a incorporação de Mapas Logísticos pode ser encontrada em Alatas, Akin e Ozer (2007). Nesta linha de atuação, Coelho e Mariani (2007) aplicaram o Algoritmo de Colônia de Formigas com Mapas Logísticos a problemas de projeto de engenharia. Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007) avaliaram o desempenho de diferentes Modelos Caóticos de Busca associado ao algoritmo de ED no projeto de uma viga.

Coelho e Mariani (2013) propuseram um algoritmo no qual os parâmetro do ACV eram adaptados segundo a distribuição Gaussiana com aplicação em sistemas térmicos. Baykasoglu e Ozsoydan (2015) e Gandomi *et al.* (2013) propuseram um algoritmo para o

projeto de sistemas mecânicos baseado no ACV e em modelos caóticos de busca. [Wang et al. \(2017a\)](#) propuseram uma nova versão para o ACV no qual considera um operador que define uma região de busca em torno do vizinho que apresenta mais brilho. Recentemente, [Lieu, Do e Lee \(2018\)](#) propuseram a hibridização do ACV com o ED para a otimização da forma e do tamanho no projeto de estruturas.

2.5 Problemas com Variáveis Mistas

No projeto de sistemas de engenharia é comum nos depararmos com a presença de variáveis mistas (reais, inteiras, binárias e discretas). Essas surgem da necessidade de atender critérios como um número inteiro de equipamentos e especificações de mercado, como por exemplo a escolha entre determinados diâmetros de tubulações disponíveis. Em se tratando da metodologia para a resolução desses problemas, a grande maioria dos algoritmos de otimização foram projetados com a finalidade de lidar apenas com variáveis contínuas.

No contexto clássico pode-se empregar uma das técnicas mais conhecidas para o tratamento de problemas com variáveis inteiras e discretas, a saber, o Método *Branch and Bound* ([LAND; DOIG, 1960](#)). Em linhas gerais, nessa abordagem uma sequência de sub-problemas de programação não linear com variáveis contínuas é gerado e resolvido por uma ferramenta apropriada ("*solver*"). Apesar da aplicabilidade da abordagem, a mesma apresenta como principal desvantagem o elevado custo computacional associado ao número de resoluções dos sub-problemas de programação não linear ([VANDERPLAATS, 1999; EDGAR; HIMMELBLAU; LASDON, 2001](#)).

[Socha \(2004\)](#) propôs uma abordagem simples para o tratamento de variáveis discretas, em que via a utilização de uma função de distribuição de probabilidade, gera-se um novo conjunto de variáveis de projeto discretas. Para o tratamento de variáveis inteiras, pode-se apenas arredondar a variável para um valor inteiro mais próximo ([VENTER; SOBIESKI, 2002; VIANA; STEFFEN JR, 2006](#)). Apesar de ser uma estratégia bem simples, a mesma pode resultar na obtenção de valores sub-ótimos, ou seja, ótimos locais, como destacados por [Kannan e Kramer \(1994\)](#) e [Vanderplaats \(1999\)](#).

[Gisvold e Moe \(1972\)](#) desenvolveram uma abordagem para problemas de programação não linear mista inteira através de funções de penalidade. Nesse trabalho, as variáveis discretas são tratadas como restrições explícitas e desvios dos valores discretos são penalizados. Segundo os autores, a principal dificuldade do método é que os parâmetros de penalidade são difíceis de serem escolhidos e a qualidade da solução obtida depende da escolha inicial dos mesmos. Uma abordagem similar, mas que consegue lidar melhor com o problema da escolha dos parâmetros das penalidades foi proposta por [Kannan e Kramer \(1994\)](#). Na metodologia proposta por esses autores, a penalização é realizada a partir do uso do Método do Multiplicador de Lagrange Aumentado ([VANDERPLAATS, 1999](#)) acoplado ao

Método de Powell e o Método do Gradiente Conjugado. Além disso, os autores definiram restrições de igualdade que penalizam violações nos valores inteiros e discretos, da seguinte maneira:

$$q_j(1 - q_j) = 0, \quad (2.3)$$

onde q_j é a variável inteira/discreta normalizada, expressa como sendo:

$$q_j = \frac{x_j - s_j^l}{s_j^u - s_j^l}, \quad (2.4)$$

em que x_j é a variável a ser normalizada, s_j^u e s_j^l são os limites superior e inferior da variável j , respectivamente.

Nas últimas décadas, várias modificações nos algoritmos evolutivos têm sido propostas para adaptar os tradicionais métodos de otimização para lidar com problemas em que as variáveis são mistas. Lampinen e Zelinka (1999) realizaram uma revisão bibliográfica que apresentava metodologias para lidar com problemas de programação não-linear mista. Neste, podem ser encontrados estudos relacionados aos Métodos de *Branch & Bound*, Programação Quadrática Sequencial (SANDGREN, 1990), Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*) (ZHANG; WANG, 1993), Algoritmo Genético Modificado (LIN; ZHANG; WANG, 1995), Programação Evolutiva (CAO; WU, 1997), Evolução Diferencial (LAMPINEN; ZELINKA, 1999). Como destacado por Lampinen e Zelinka (1999), todos os métodos foram considerados pouco robustos, com alto custo computacional, bem como a implementação e utilização complexas, além do desempenho ruim ao lidarem diretamente com problemas com variáveis mistas. Deep et al. (2009) propuseram um algoritmo genético com codificação real para resolver problemas mistos, o qual consistia na definição de novas restrições para garantir a geração de candidatos que seguissem a tipificação das variáveis. Como principal dificuldade associada a essa estratégia está no fato dos autores utilizarem o truncamento ou condições de arredondamento para tratar os números inteiros, o que naturalmente resulta na perdas de informações relacionadas aos candidatos.

Já Liao, Kuo e Hu (2012) propuseram um método para o tratamento de variáveis discretas, o qual considera discreta como aquelas variáveis que assumem um número finito de valores (reais ou inteiros), onde, a ideia principal era transformar o conjunto contínuo em um equivalente conjunto discreto usando a posição do elemento para encontrar seu valor real (truncado). A priori, essa metodologia era capaz de trabalhar com conjuntos discretos e com conjuntos binários.

Com descrito por Wang et al. (2017c), existe um dilema para o tratamento de problemas misto, e que envolve as metodologias já conhecidas. Enquanto a utilização de algoritmos puramente contínuos implicaria em redução de desempenho devido à presença de variáveis mistas, a utilização dos algoritmos puramente binários implicaria no prejuízo da eficiência de busca dos valores das variáveis contínuas em decorrência da codificação bi-

nária. Não seria eficiente assumir um método de codificação real ou de codificação binária para a resolução de um problema misto, sendo uma vez importante todo e qualquer tipo de variável. [Datta e Figueira \(2011\)](#) propuseram uma estratégia baseada no algoritmo de EP capaz de tratar problemas mistos, onde utilizam uma versão binária e uma versão com codificação real do algoritmo de EP, de forma que pudessem ser geradas variáveis reais e variáveis inteiras e discretas. [Wang et al. \(2017c\)](#) propuseram o HLO - *Human Learning Optimization* - para o tratamento de problemas com variáveis binárias e também uma versão contínua. Com a associação das duas versões, os autores propuseram um método híbrido, a saber, o HcHLO - *Hybrid coded Human Learning Optimization*, em que o vetor de variáveis de projeto passa a ser formado por dois sub-vetores, um com as variáveis reais e outro com as binárias, enquanto os operadores do algoritmo trabalham em paralelo.

No presente capítulo foram apresentados aspectos gerais sobre o problema de otimização e as metodologias existentes para a resolução deste problema. No próximo capítulo será apresentada a concepção conceitual do ACV, os seus operadores e algumas estratégias propostas para aumentar o desempenho desse algoritmo.

Capítulo 3

O ALGORITMO DE COLÔNIA DE VAGALUMES

Desenvolvido por [Yang \(2008\)](#), o Algoritmo Colônia de Vagalumes (ACV) baseia-se no comportamento social dos vagalumes para a geração de uma população de candidatos à solução de um problema de otimização. Do ponto de vista biológico, o algoritmo é fundamentado na característica bio-luminescente apresentada por determinadas espécies de vagalumes, insetos coleópteros notórios por suas emissões luminosas. Dentre as funções desempenhadas por esta luminescência pode-se enumerar [Yang \(2008\)](#): *i*) ferramenta de comunicação e atração para potenciais parceiros na reprodução; *ii*) isca para atração de eventuais presas para o vagalume; e *iii*) mecanismo de alerta para potenciais predadores.

A função da comunicação através da bioluminescência advém do fato observado de que a taxa de intermitência e a intensidade dos flashes luminosos é parte essencial do mecanismo que os vagalumes utilizam para o ritual de acasalamento (as fêmeas são atraídas pelo brilho emitido pelos machos).

Para o desenvolvimento de um algoritmo de otimização, [Yang \(2008\)](#) enumerou as seguintes hipóteses:

1. os vagalumes não possuem sexo, o que possibilita a interação entre todos os vagalumes, apesar do objetivo do acasalamento;
2. a atratividade é proporcional ao brilho emitido e decai conforme aumenta a distância entre os vagalumes, regra baseada em observação do comportamento animal;
3. o brilho emitido por um vagalume é determinado pela sua avaliação frente ao objetivo (isto é, quanto melhor avaliado, mais brilhante);
4. a atratividade de um vagalume é determinada pela intensidade da luz emitida;
5. a determinação da intensidade emitida é em função de sua avaliação.

Como consequência da primeira regra, todos os vagalumes podem ser atraídos, assim o vagalume que representa o melhor valor da função objetivo emite uma luminescência mais intensa, atraindo os demais a depender da distância entre os indivíduos e da absorção de luz pelo meio (γ). Cabe ressaltar que a intensidade da luz decresce conforme a distância aumenta, sendo determinada pela seguinte expressão:

$$I = I_0 e^{(-\gamma r^2)}, \quad (3.1)$$

em que I_0 é a intensidade inicial emitida e r é a distância euclidiana entre os indivíduos i e j , sendo j o indivíduo mais brilhante. A atratividade (β) é o fator responsável pela aproximação de indivíduos, sendo proporcional a intensidade e determinada por:

$$\beta = \beta_0 e^{(-\gamma r^2)}, \quad (3.2)$$

em que β_0 é a atratividade entre indivíduos com distância $r=0$. Assim, todo vagalume i é atraído pelo indivíduo mais brilhante j , sendo a movimentação entre dois indivíduos i e j dada por:

$$x_{i+1} = x_i + \beta_0 e^{(-\gamma r_{ij}^2)}(x_j - x_i) + \alpha \text{scale}(\text{rand} - 0,5), \quad (3.3)$$

em que α é o parâmetro de inserção de aleatoriedade, rand é um gerador de números aleatórios dentro do intervalo $[0;1]$ e scale é um vetor (em valor absoluto) que garante que o indivíduo gerado esteja dentro do domínio especificado pelo usuário. Dessa forma, uma nova posição do indivíduo (x_{i+1}) é dada pela soma de três termos. O primeiro expressa a posição inicial (x_i) do indivíduo, o segundo a atratividade e o terceiro a aleatoriedade do caminho a ser percorrido.

Vale ressaltar que cada vagalume recebe influência de atração de todos os demais vagalumes que possuem melhor valor de intensidade de brilho. O quadro 3.1 apresenta o pseudocódigo do ACV.

Desde a sua introdução no cenário de otimização, inúmeros são os trabalhos envolvendo esse algoritmo na resolução de diferentes tipos de problemas, dentre os quais pode-se citar: a sincronização de sensores em rede (WERNER-ALLEN *et al.*, 2005), o projeto de estabilizadores de sistemas de força (DAS; VENAYAGAMOORTHY, 2006), o projeto de redes sem fio (LEIDENFROST; ELMENREICH, 2008), a otimização de funções matemáticas (YANG, 2008), a resolução de um problema inverso de condução de calor (LUZ; BECCENERI; VELHO, 2009), o tratamento de problemas de otimização com a presença de confiabilidade (COELHO; BERNERT; MARIANI, 2011), a otimização estrutural com variáveis mistas (GANDOMI; YANG; ALAVI, 2011), a otimização de sistemas de distribuição de energia (COELHO; MARIANI, 2013), a resolução de problemas de locação de facilidades (RAHMANI; MIRHASANI, 2014), o projeto de sistemas mecânicos (BAYKASOGLU; OZSOYDAN, 2015), na seleção de parâmetros em processos mecânicos (SHUKLA; SINGH, 2017), na otimização de formas e tamanhos de estruturas mecânicas (LIEU; DO; LEE, 2018), dentre outras aplicações.

Algoritmo Colônia de Vagalume

Início*Definir a função objetivo $J(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_D)^T$* *Definir os parâmetros do ACV***Para** $i=1$ até o número máximo de gerações faça*Calcular a intensidade da luz I_i para x_i proporcionalmente a $J(x_i)$* **Para** $j = 1$ até o número de vagalumes*Calcular o fator de atratividade**Mover o vagalume j em direção aos vagalumes mais brilhantes**Verificar se o vagalume está dentro dos limites***Fim-Para****Fim-Para***Pós-processamento e visualização dos resultados***Fim**

 Fonte: Adaptado de [Yang \(2009\)](#).

Quadro 3.1 – Pseudocódigo do ACV.

3.1 Exemplo da evolução do ACV

Afim de compreender as etapas realizadas pelo ACV canônico, essa seção tem por objetivo apresentar todas as operações envolvidas, que vai desde a geração inicial de indivíduos até a atualização da geração, isto é; a formação de uma nova população. Para essa finalidade, considere a seguinte função matemática ([HAUPT; HAUPT, 2004](#)):

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= x \sin(4x) + (1, 1) y \sin(2y), \\ 0 \leq x, y &\leq 10. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Além de definir as características do problema a ser estudado, faz-se necessário definir os parâmetros do algoritmo, a saber, o número de indivíduos (N_p) que representa a população de candidatos à solução, o número de gerações (N_{gen}) que quantifica as iterações do processo, o parâmetro de inserção de regularidade (α) que insere aleatoriedade ao caminho a ser percorrido por cada indivíduo, o fator de atratividade inicial (β_0) que representa a atração entre dois indivíduos com distância nula e por fim o parâmetro de absorção de luz pelo meio (γ) que pondera a influência da distância no processo de atração. Assim, para tal estudo assume a seguinte configuração paramétrica: $N_p=5$; $N_{gen}=1$; $\alpha=0,5$; $\beta_0=0,2$ e $\gamma=1$.

O primeiro passo do algoritmo consiste da sua inicialização, isto é; definir uma população inicial. Por questões práticas, todo e qualquer método de otimização evolutivo consiste na geração de uma população de forma aleatória, respeitando os limites (domínio do problema) especificado pelo usuário, que para este problema é $[0; 10]$ para ambas as variáveis. Assim, a partir da geração de um vetor com números aleatórios (*rand*) pertencentes ao

intervalo $[0; 1]$, um candidato pode ser definido, conforme a seguinte relação:

$$v_i = Lim_{Inf} + (Lim_{Sup} - Lim_{Inf})rand, \quad (3.5)$$

onde v_i é o vetor posição do i -ésimo indivíduo na população, e Lim_{Inf} e Lim_{Sup} são respectivamente os vetores dos limites inferior e superior do problema.

Dessa forma, considerando os seguintes vetores de números aleatórios como sendo: $[[0,12699 \ 0,91338], [0,63236 \ 0,09754], [0,27850 \ 0,54688], [0,95751 \ 0,96489], [0,15761 \ 0,97059]]$, pode-se gerar os primeiros indivíduos da população inicial, bem como o respectivo valor da função objetivo, como apresentado na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 – População Inicial para a Função Matemática f .

Indivíduo	$rand_1$	$rand_2$	x	y	f
1	0,12699	0,91338	1,2699	9,1338	-6,7077
2	0,63236	0,09754	6,3236	0,9754	2,0142
3	0,27850	0,54688	2,7850	5,4688	-8,7615
4	0,95751	0,96489	9,5751	9,6489	10,0165
5	0,15761	0,97059	1,5761	9,7059	5,7249

Fonte: o autor.

Pela Tabela 3.1 percebe-se que, como o objetivo é minimizar, a melhor solução corrente é o indivíduo 3. Além disso, como o procedimento utilizado para gerar a população inicial foi baseado em um gerador de números aleatórios, dificilmente a melhor solução será encontrada. Assim, faz-se necessário com que essa população evolua de modo que ao final do processo de otimização, a melhor solução possível e, de preferência, a global possa ser encontrada.

Para atualizar a população no ACV canônico, isto é; gerar uma nova geração de candidatos à solução do problema de otimização, é necessário considerar três fatores (YANG, 2009): *i*) a posição corrente do indivíduo gerado; *ii*) a atratividade dos indivíduos e, *iii*) a aleatoriedade do caminho a ser percorrido. A população corrente consiste dos indivíduos que formam a população atual. Já o processo de aproximação dos indivíduos consiste na aplicação dos parâmetros de absorção de luz pelo meio e de atratividade, em que o indivíduo que possui o melhor brilho ou intensidade de luz (no qual representa o melhor valor da função objetivo) tem maior influência na atração dos demais.

Assim, antes do processo de aproximação atrativa, isto é, a movimentação dos indivíduos, faz necessário a avaliação da intensidade de luz, valor referente à função objetivo de cada vagalume e o ordenamento dos indivíduos quanto a sua importância como mostra a Tab. 3.2.

Como o objetivo do problema é minimizar, a classificação dos indivíduos de acordo com o valor da função objetivo ocorre de forma decrescente, onde o indivíduo 3 apresenta

Tabela 3.2 – Intensidade de Luz e Ordenação dos Vagalumes Iniciais para o Problema 3.4.

Indivíduo	Intensidade de Luz	Ordenamento	Reposicionamento	x	y
1	-6,70846	-8,76162	$3 - v_1$	2,7850	5,4688
2	2,01403	-6,70846	$1 - v_2$	1,2699	9,1338
3	-8,76162	2,01403	$2 - v_3$	6,3236	0,9754
4	10,01522	5,72564	$5 - v_4$	1,5761	9,7059
5	5,72564	10,01522	$4 - v_5$	9,5751	9,6489

Fonte: o autor.

o melhor valor da função objetivo, sendo este classificado na primeira posição (v_1). Como uma das premissas do ACV é que todos vagalumes podem atrair ou ser atraídos, então a ordenação se faz importante para o próximo passo, que é a definição da movimentação dos indivíduos. Tal motivação é dada de forma pontual e leva em consideração a lei de atualização proposta por (YANG, 2009), isto é; conhecido dois indivíduos v_i e v_j , a sua atração ocorre se, e somente se, a intensidade de luz de v_j for maior do que a de v_i . Assim, quando a intensidade de luz I_j for maior do que I_i ($f_j(x) > f_i(x)$), a posição do indivíduo v_j é atualizada, pois o indivíduo v_i tem a melhor posição em relação ao valor da função objetivo. Dessa forma, a movimentação inicia com o indivíduo v_1 , já que ele sempre tem a menor intensidade de luz em relação aos outros indivíduos v_j ($j=2, \dots, 5$).

Como o indivíduo v_2 tem intensidade de luz maior que o indivíduo v_1 , v_2 recebe a influência do primeiro indivíduo e tem sua posição atualizada segundo a Eq. (3.3). Para essa finalidade deve-se calcular a distância entre v_1 e v_2 e definir os valores para o vetor *rand*. Assim a movimentação de v_2 é dada por:

$$v_2^{new} = v_2 + \beta e^{(-\gamma r_{21}^2)} (v_1 - v_2) + \alpha (rand - 0.5) scale,$$

$$v_2^{new} = \begin{pmatrix} 1,2699 \\ 9,1338 \end{pmatrix} + 0,2 e^{-1(3,9658)^2} \begin{pmatrix} 1,2699 - 2,7850 \\ 9,1338 - 5,4688 \end{pmatrix} + 0,5 \left(\begin{pmatrix} 0,95717 \\ 0,48538 \end{pmatrix} - 0.5 \right) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$v_2^{new} = \begin{pmatrix} 3,5558 \\ 9,0607 \end{pmatrix}.$$

De forma recíproca, ao considerar o indivíduo v_3 , a sua intensidade de luz será maior que dos dois primeiros indivíduos v_1 e v_2 . Assim, esse indivíduo sofre a influência de ambos os indivíduos v_1 e v_2 . Similarmente, a movimentação para os outros candidatos da população acontece, onde o k -ésimo vagalume desloca-se sobre influência dos $k-1$ vagalumes antecessores, isto é; determina-se uma nova localização para estes vagalumes para a próxima geração. Então, após realizar esse procedimento para os outros três candidatos, formam obtidos os seguintes candidatos: indivíduo 3 ([7,4338 1,2635]), indivíduo 4 ([5,5615 11,8518]) e indivíduo 5 ([13,4920 6,4138]). É possível observar que os indivíduos 4 e 5 apresentam valores que violam os limites estabelecidos para o problema ($0 \leq x, y \leq 10$). Assim, antes de avaliar o valor da função objetivo, cada um destes valores que violam o domínio devem ser trazidos para o limite inferior caso o valor calculado seja menor que o estabelecido ou su-

perior caso o valor calculado seja maior que o estabelecido. Para o indivíduo 4, a variável y (11,8518) é maior do que o seu respectivo limite superior, assim, y deve assumir o limite máximo permitido, isto é; a variável y , para tal candidato será igual a 10. Similarmente para o candidato 5, a variável x (13,4920) é maior do que o seu respectivo limite superior, assim, x deve assumir o limite máximo permitido, isto é; a variável x assumirá será igual a 10. A Tab. 3.3 apresenta a atualização da população ao final da primeira geração.

Tabela 3.3 – Atualização da População para a Função Matemática f .

Indivíduo	x	y	Intensidade de Luz
1	2,7850	5,4688	-8,7616
2	3,5558	9,0607	-3,0911
3	7,4338	1,2635	-6,5875
4	5,5615	10,0000	8,6403
5	10,0000	6,4138	9,2732

Fonte: o autor.

O procedimento apresentado é, então, executado uma quantidade finita de vezes de modo que, ao final do processo evolutivo, a melhor solução possível possa ser encontrada. A seguir são descritas algumas estratégias para aumentar o desempenho do ACV.

3.2 Estratégias para Aumentar o Desempenho do ACV

Na grande maioria das aplicações encontradas na literatura especializada observa-se uma característica comum, todos os parâmetros do ACV são considerados constantes durante todo o processo de otimização. Conforme descrito anteriormente, apesar de ser uma característica que simplifica o algoritmo em termos de implementação, deixa-se de considerar um aspecto comum interessante, a influência dos parâmetros na qualidade da solução encontrada. Diante dos fatos, vários trabalhos apresentam variações no sentido de melhorar o seu desempenho, no que tange a possibilidade de escapar de ótimos locais e na redução do esforço computacional requerido para a resolução de problemas de otimização.

No contexto da atualização dos parâmetros nesse algoritmo, tem-se considerado como alternativa o uso de modelos caóticos de busca, visto que inserem certa aleatoriedade ao processo. Assim, pode-se variar os parâmetros do ACV considerando um ou mais modelos desta natureza (COELHO; BERNERT; MARIANI, 2011; GANDOMI *et al.*, 2013; FISTER *et al.*, 2015; BAYKASOGLU; OZSOYDAN, 2015). Também, considera-se a hibridização do ACV com outras estratégias como metodologia para aumento do desempenho destes algoritmos (RAHMANI; MIRHASSANI, 2014; MAHESHWAR; KAUSHIK; ARORA, 2015). Alternativamente, Baykasoğlu e Ozsoydan (2014) propuseram uma versão do ACV em que faz-se uso de mecanismos de movimentação adaptativa, através da inserção de um parâmetro c que representa a probabilidade de um vagalume mover-se ou não. Isso permite que a mo-

vimentação não dependa somente do brilho, mas também dessa comparação, conforme as seguintes relações:

$$\zeta = \frac{\text{mod}(K-1, N_{gen})}{N_{gen}}; \quad (3.7a)$$

$$\epsilon = (\text{rank}_i)^{-\zeta}; \quad (3.7b)$$

em que o operador *mod* representa o resto da divisão de $K-1$ por N_{gen} , onde K é a geração corrente e N_{gen} é o número máximo de gerações, rank_i é a classificação do i -ésimo vagalume. Assim, a movimentação dos vagalumes é dada por:

$$x_{ik+1} = x_{ik} + \beta_0 \left(\frac{1}{\Omega + r} \right) + \alpha(\epsilon - 0,5); \quad (3.8)$$

em que Ω é um número muito pequeno (como 0,000001) para prevenir a divisão por zero e r é a distância euclidiana. Com a aplicação desta abordagem, os autores obtiveram uma redução do tempo total de processamento, pois o número de avaliações foi reduzida em relação ao algoritmo canônico.

Na literatura, também podem ser observadas melhoras de desempenho promovidas pela troca do tipo de distribuição de probabilidade considerada. [Zhang et al. \(2018\)](#) propuseram substituir a distribuição gaussiana pela metodologia de voos de Lévy. Neste caso, o comportamento da atratividade passa a ser guiado não só pelas soluções vizinhas promissoras, mas também pelas soluções globais, o que implica na aceleração da atração entre os vagalumes.

Algumas modificações interferem na forma de considerar a configuração paramétrica do ACV, o que acaba por prejudicar o seu desempenho. Fato que leva vários pesquisadores considerar a tentativa de definir esses parâmetros dinamicamente. Por exemplo, α é um parâmetro que insere aleatoriedade no caminho a ser percorrido, contribuindo para a locomoção dos indivíduos que não são influenciados fortemente pela atração. Todavia, a escolha dos valores de α podem levar o algoritmo a uma pesquisa global ou uma pesquisa local. [Mohammadi et al. \(2013\)](#) sugerem que α seja reduzido de acordo com a evolução do processo, de modo que o seu valor tenda a zero ao final do processo de otimização, o que implica na prática que no início do processo privilegia-se uma busca global e ao final uma busca local ([SUNDARI; RAJARAM; BALARAMAN, 2016; ZHANG; SONG; GONG, 2017; WANG et al., 2018](#)), conforme a seguinte relação:

$$\alpha(K+1) = \left(1 - \frac{K}{N_{gen}} \right) \alpha(K), \quad (3.9)$$

onde $\alpha_0 \in [0; 1]$ para ambos casos, K e $K+1$ representa a geração corrente e nova, respectivamente.

Já [Gokhale e Kale \(2016\)](#) optam por utilizar o mapa caótico para atualizar tal parâmetro.

$$\alpha_{K+1} = \begin{cases} 2\mu\alpha_K, & \alpha_K < 0,5, \\ 2\mu(1 - \alpha_K), & \alpha_K \geq 0,5 \end{cases}, \quad (3.10)$$

em que μ é uma constante real positiva.

No presente capítulo foi realizada uma breve revisão no que tange os operadores do ACV, bem como a apresentação de algumas das estratégias já propostas para o aumento de desempenho no ACV. O próximo capítulo tem por objetivo apresentar a análise de sensibilidade dos parâmetros do ACV de forma a ilustrar a forma com que cada um deles influencia o valor da função objetivo.

Capítulo 4

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA

Todos os métodos de otimização exigem que o usuário entre com determinados parâmetros para que os mesmos possam ser utilizados. Mesmo uma abordagem clássica exige a definição de uma condição inicial, bem como a definição do parâmetro de penalidade para problemas com restrição. No caso dos métodos baseados em população, que contém um número bem superior de parâmetros que devem ser definidos pelo usuário, como por exemplo o tamanho da população e o número de gerações. Independentemente da técnica, ressalta-se que a qualidade da solução é em função de seus parâmetros e que é necessário avaliar a real influência de cada um deles.

Neste contexto, o presente capítulo tem por objetivo avaliar a influência dos parâmetros do ACV canônico, a saber, o número de indivíduos na população (N_p), o número de gerações (N_{gen}), o parâmetro de inserção de regularidade (α), o fator de atratividade (β), e o parâmetro de absorção de luz (γ), na qualidade da solução obtidas considerando os seguintes problemas matemáticos (VANDERPLAATS, 1999; HAUPT; HAUPT, 2004; COELLO; BECERRA, 2004):

- P1:

$$\min f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2, \quad (4.1)$$

em que $x_i \in [-100; 100]$ (com $i=1, 2$) e solução global igual a $[x_1; x_2; f]=[-0,7130; -0,1423; -0,285714]$.

- P2:

$$\min f(x) = x_1 \sin(4x_1) + (1, 1)x_2 \sin(2x_2), \quad (4.2)$$

com $x_i \in [0; 10]$ ($i=1, 2$) e solução global igual a $-18,5547$.

- P3:

$$\begin{aligned}\min f(x) &= \frac{\sin^3(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1 + x_2)}, \\ g_1(x) &= x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0, \\ g_2(x) &= 1 - x_1 + (x_2 - 4)^2 \leq 0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

com $x_i \in [0; 10]$ ($i=1, 2$) e solução global igual a -0,0958.

Para a análise de sensibilidade de cada um dos parâmetros citados será definido um conjunto *default* (Tab. 4.1). Assim, quando for realizada a análise de um determinado parâmetro, os outros utilizados são dos correspondentes *default* definido especificamente para o estudo desse capítulo.

Tabela 4.1 – Configuração ‘default’ para os Parâmetros.

N_p	N_{gen}	α	β	γ
100	500	0,9	0,8	1

Fonte: o autor.

Além disso, é importante enfatizar que, para cada análise, um mesmo conjunto de sementes empregadas para a inicialização do gerador de números aleatórios, foi considerada de forma que o processo de comparação fosse pertinente. Para todos os casos estudados foram considerados 20 amostras.

4.1 Influência do Tamanho da População (N_p)

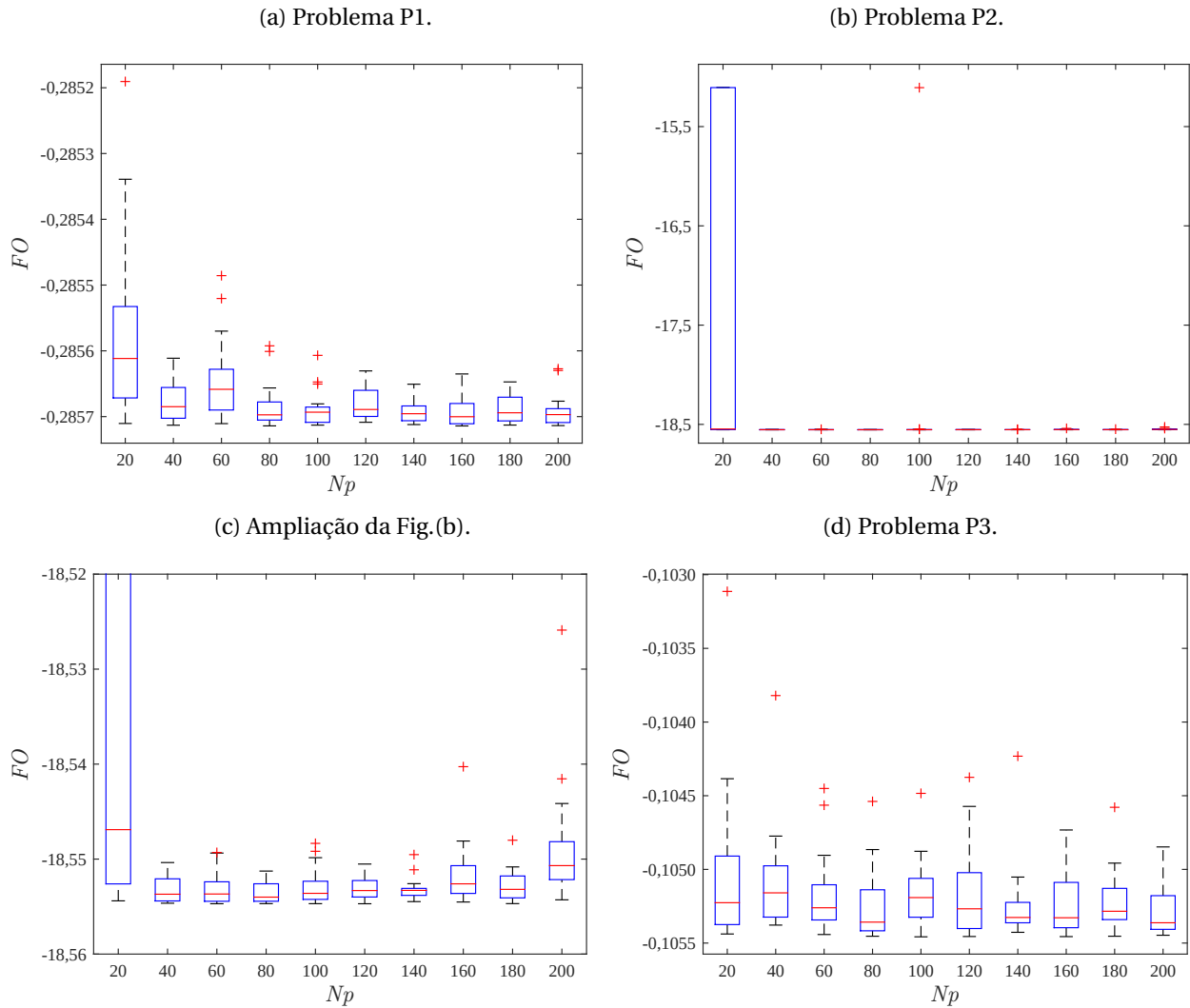
O tamanho da população é um dos fatores que mais contribuem para o aumento do custo computacional, visto que tal valor está diretamente relacionado com o número de indivíduos, como definido na seguinte relação:

$$NAFO = N_p + N_p \times N_{gen}\tag{4.4}$$

em que $NAFO$ é o número de avaliações da função objetivo.

Assim, aumentando-se ou diminuindo-se o valor de N_p , tem-se naturalmente o aumento ou a redução do $NAFO$. Neste caso, deve-se definir um tamanho de população na qual pondere a capacidade de exploração do espaço de busca ao mesmo tempo em que não se aumente, desnecessariamente, o número de chamadas da função objetivo, visto que esse valor é o critério mais empregado, além da convergência, para comparar as técnicas de otimização.

A Figura 4.1 apresenta os gráficos *boxplot* referente aos resultados numéricos obtidos considerando o valor da função objetivo versus a variação do parâmetro em análise ($N_p = [20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200]$).

Figura 4.1 – Influência do Número de Indivíduos - N_p .

De forma geral, é possível observar que, para cada combinação dos parâmetros considerados para inicializar o ACV, a solução ótima para os problemas P1 e P2 foi encontrada (Fig. 4.1a e 4.1b). Já para o problema P3 foi obtida apenas uma boa estimativa, visto pelos valores da função objetivo apresentados na Fig. 4.1d. Em média obteve-se para este estudo de caso um valor de, aproximadamente, -0,1053, mas com pequena variabilidade. Além disso, como esperado, o aumento do número de indivíduos resulta, na maioria dos casos, na obtenção da solução ótima global. Outro ponto importante é que, para o número de gerações consideradas, o aumento do tamanho da população proporciona uma maior diversidade (capacidade de exploração), o que implica que, ao final do processo evolutivo, a população tende a se tornar homogênea, isto é; os indivíduos tendem a se tornar idênticos e como o mesmo valor para a função objetivo, como observado nessas figuras.

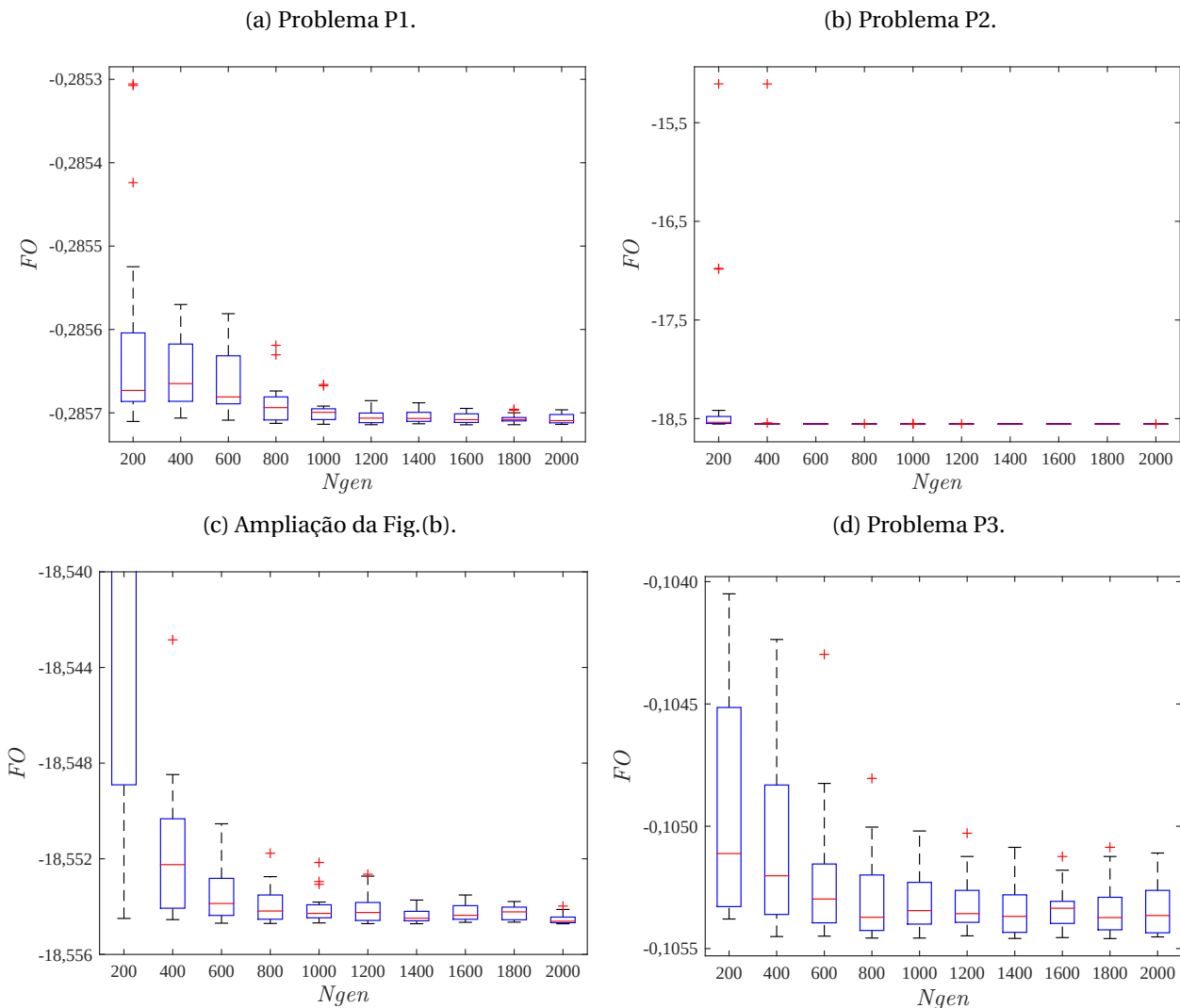
Ao se analisar o primeiro problema (Fig. 4.1a), com $N_p=160$ cerca de 50% das amostras obtiveram resultados próximos ao mínimo global, porém as amostras com menor variabilidade são as obtidas considerando $N_p=200$. Já na Fig. 4.1b observa-se que, para N_p maior que 20, tem-se uma queda brusca na variabilidade, resultando na obtenção de uma solução

com uma boa precisão, como observado na Fig. 4.1c. Nessa figura, também é possível observar que o valor da função objetivo se mantém em um bom patamar, em relação ao valor ótimo, mas que para uma população com 200 indivíduos, esse valor aumenta. Isto significa que, apesar de ter sido obtida uma solução com boa precisão, a população não se tornou tão homogênea como observado para outros valores de N_p . Já para o terceiro estudo de caso, um padrão comportamental de convergência não pode ser observado quando aumenta-se o tamanho de N_p , visto os valores obtidos para a função objetivo. Assim, considera-se que, embora a solução global não tenha sido obtida, foi encontrada uma boa estimativa para esse valor.

4.2 Influência do Número de Gerações (N_{gen})

A Figura 4.2 apresenta os resultados obtidos considerando a influência do N_{gen} ([200; 400; 600; 800; 1000; 1200; 1400; 1600; 1800; 2000]) na qualidade da solução obtida nos três estudos de casos propostos.

Figura 4.2 – Influência do Número de Gerações - N_{gen} .



Assim como constado na primeira análise, para o conjunto de combinações consideradas, o ACV foi capaz de encontrar a solução ótima global para as duas primeiras funções matemática e uma boa estimativa para a solução da terceira função. De forma geral observa-se que o aumento deste parâmetro implica na redução do valor da função objetivo, bem como na homogeneidade da população em cada estudo de caso. Tal resultado já era esperado, visto que quanto maior número gerações, mais vezes a população pode ser atualizada, o que aumenta a chance da solução do problema de otimização ser encontrada. Nesse caso, cabe ao usuário balancear a precisão do resultado e o número de avaliações da função objetivo. Finalmente, vale ressaltar ainda que, dependendo da complexidade do problema, somente a mudança no valor do número de gerações pode não ser suficiente para encontrar a melhor solução possível.

4.3 Influência do Fator de Inserção de Regularidade (α)

O fator de inserção de regularidade é um dos principais responsáveis pela manutenção da diversidade na população (YANG, 2008). É por meio da sua inserção, definido entre [0 1], que a aleatoriedade é promovida no caminho a ser percorrido. Esse parâmetro também tem o objetivo de promover o balanço entre a busca local e a busca global.

No início do processo evolutivo, o parâmetro de inserção é próximo da unidade, o que implica em grande influência no valor do novo candidato gerado (busca global). Por outro lado, ao final do processo evolutivo, como o algoritmo tende a melhor solução, o valor desse parâmetro tende a zero e a melhor solução é refinada (busca local).

A Figura 4.3 apresenta o estudo paramétrico no que diz respeito ao fator de inserção de regularidade ($\alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1]$) para os três problemas propostos.

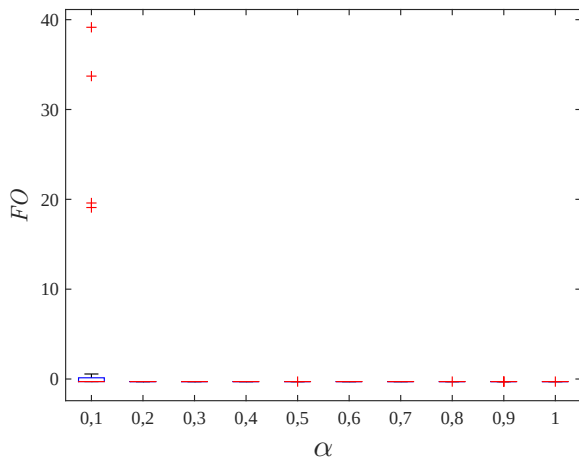
Em uma primeira análise, observa-se na Fig. 4.3 o mesmo comportamento constatado para a influência de N_p , em termos da obtenção da solução ótima, no estudo de N_{gen} , isto é; são obtidas as soluções ótimas para os dois primeiros estudos de caso e é obtida uma boa estimativa da solução ótima para o terceiro estudo de caso. Além disso, é possível observa-se que os menores valores de α implicam em melhores valores das funções objetivo, bem como para estes casos, a população se tornou homogênea, exceto para a função P2 (Figs. 4.3c e 4.3d) que apresenta maiores perturbações para $\alpha \leq 0,4$ (exceto $\alpha = 0,3$). Apesar de $\alpha=0,1$ não apresentar uma população homogênea para o caso P1 (Fig. 4.3b), ainda são os menores valores que apresentam a melhor faixa para o parâmetro, quando se tem $\alpha \in [0,2; 0,4]$.

O comportamento observado, no qual maiores valores para α implicam em maiores diversidades da população ao final do processo evolutivo, se deve ao fato de que o procedimento adotado para a obtenção da população tem uma boa contribuição aleatória advinda

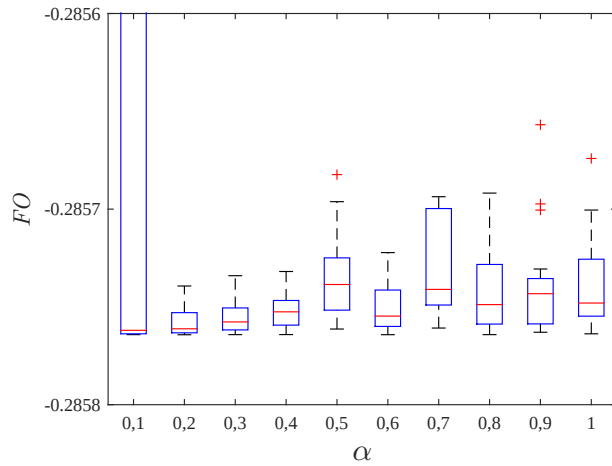
dos elevados valores desse parâmetro. Recomenda-se que o parâmetro comece com maiores valores e ao longo do processo finalize com menores.

Figura 4.3 – Influência do Fator de Inserção de Regularidade - α .

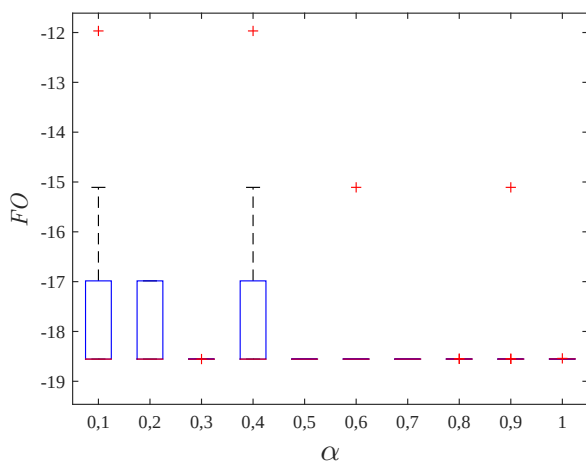
(a) Problema P1.



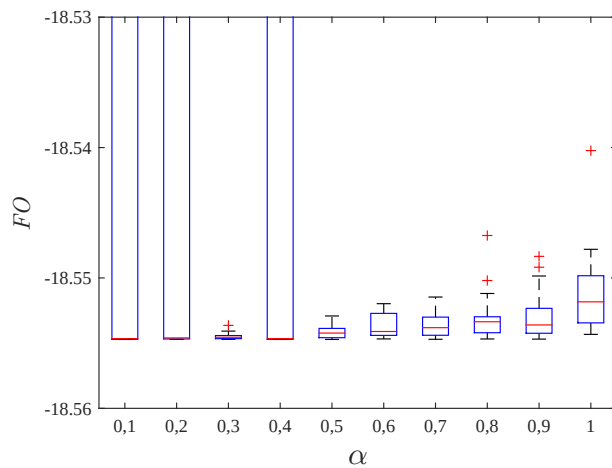
(b) Ampliação da Fig.(a).



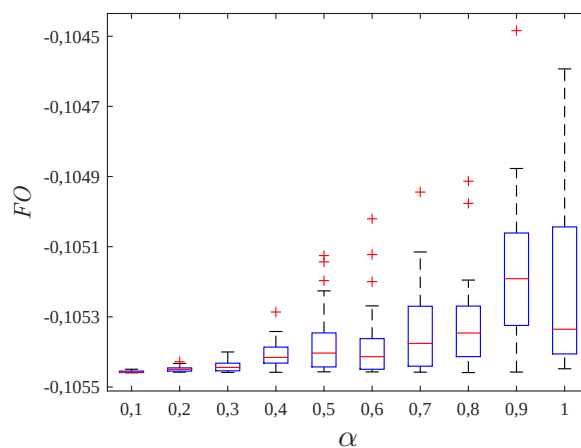
(c) Problema P2.



(d) Ampliação da Fig.(c).



(e) Problema P3.



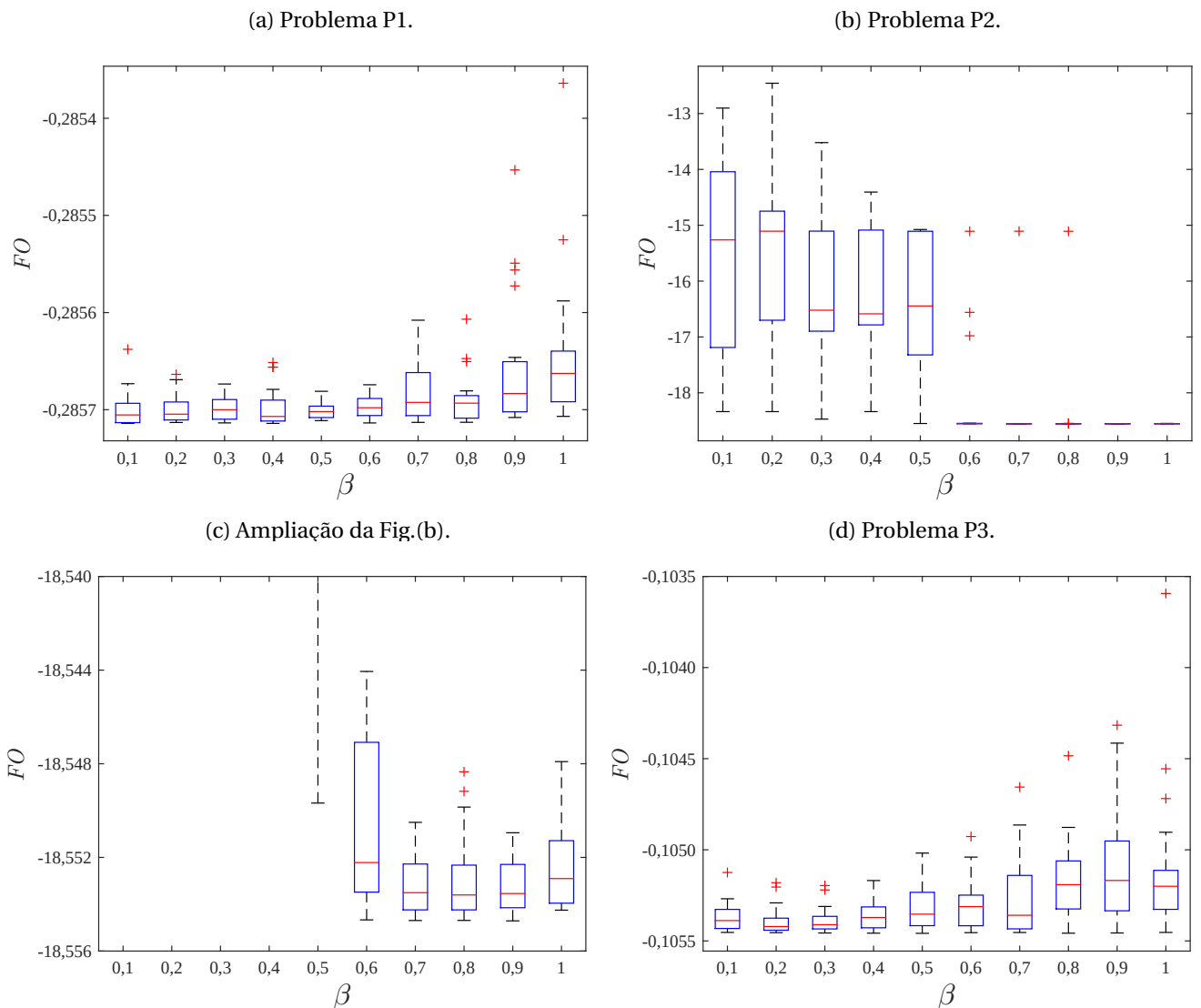
4.4 Influência do Fator de Atratividade (β)

Conforme descrito por Yang (2008), a atratividade é uma das características primordiais do ACV, sendo um dos fatores responsáveis pela diversidade dos candidatos.

A atratividade é proporcional ao brilho (que relaciona-se com o valor da função objetivo), e juntos determinam como se dá a aproximação dos indivíduos, sendo que quando esse valor assume um valor nulo, os indivíduos se movem de forma aleatória, visto que somente a contribuição do fator de inserção de regularidade é considerada para a geração de candidatos em potencial.

A Figura 4.4 apresenta os resultados obtidos com a análise de sensibilidade deste parâmetro ($\beta = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1]$) em relação ao valor da função objetivo.

Figura 4.4 – Influência do Fator de Atratividade - β .



É possível observar que, independente do valor de β , o ACV sempre foi capaz de obter a solução ótima para o problema P1 (Fig. 4.4a).

Já para o problema P2, a solução ótima só foi obtida para valores de β maiores do que 0,5 (Fig. 4.4b). Para o problema P3, foi obtida uma boa estimativa para a solução ótima global (Fig. 4.4d). De forma geral, para os problemas P1 e P3, as melhores soluções, em termos da homogeneidade da população, foram obtidas para menores valores desse parâmetro (β menor que, aproximadamente, 0,6). Já para a função P2, esse comportamento foi contrário ao observado para as outras funções.

Como descrito anteriormente, esse parâmetro é um dos responsáveis diretos pela geração de novos candidatos e, neste caso, para os problemas analisados, não foi possível definir uma faixa ideal para a aplicabilidade desse parâmetro. Assim, considera-se que, para cada nova aplicação, diferentes valores para o parâmetro β sejam avaliados.

4.5 Influência do Fator de Absorção de Luz (γ)

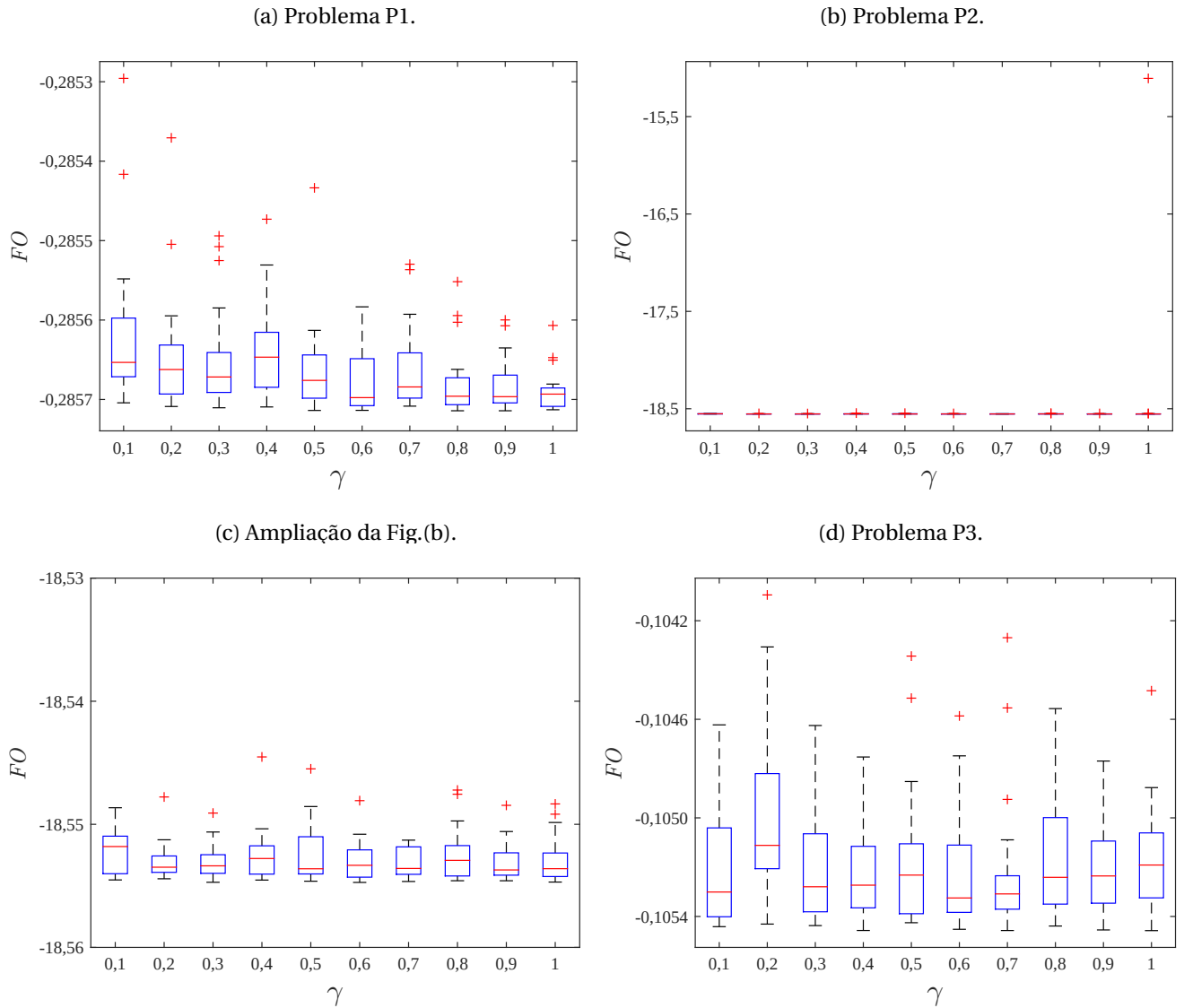
Assim como o fator de atratividade, o fator ou parâmetro de absorção de luz tem grande contribuição no que tange a geração de candidatos em potencial à solução do problema de otimização.

Como descrito por Yang (2008), a intensidade da luz de um vagalume (indivíduo) é muito importante para algoritmo, pois o mesmo pondera a influência da distância entre os vagalumes no processo de geração de novos candidatos, isto é; o brilho de um vagalume decai conforme sua distância aumenta. Assim, ambos os parâmetros, fator de atratividade e fator de absorção de luz estão correlacionados.

A Figura 4.5 apresenta a análise de sensibilidade de γ ([0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1]) no valor da função objetivo.

Ao se analisar os resultados, em termos da obtenção da solução ótima, observa-se que o ACV foi capaz de obter o ótimo global para os problemas P1 e P2 e uma boa estimativa para o problema P3, como pode ser visto na Fig. 4.5. Além disso, observa-se que, para cada estudo de caso, uma faixa ótima é apresentada para esse parâmetro. Para a função P1, os melhores resultados foram obtidos com $\gamma \geq 0,6$, conforme a Fig. 4.5a. Conforme observado na Fig. 4.5b para a função P2, qualquer valor na faixa considerada ([0 1]) resultou em um bom valor para a solução do problema, visto que, na média, o valor da função objetivo sempre convergiu. Para P3, os melhores resultados foram obtidos quando considera-se a faixa $\gamma \in [0,3; 0,7]$, conforme a Fig. 4.5d.

Em resumo, para o parâmetro de absorção de luz pode-se sugerir utilizar γ como um valor maior do que 0,5 para a análise de um novo estudo de caso.

Figura 4.5 – Influência do Fator de Absorção de Luz - γ .

4.6 Conclusões Preliminares

Neste capítulo foi realizada a análise de sensibilidade dos parâmetros do ACV canônico. Com os resultados obtidos considerando três funções matemáticas foi possível avaliar a influência dos parâmetros na qualidade da solução encontrada. Assim, baseando-se nos resultados apresentados recomenda-se considerar uma população com cerca de, aproximadamente 100 indivíduos, 1000 gerações, α , caso seja tomado como uma constante, como sendo igual a aproximadamente 0,5, β como sendo um valor entre zero e a unidade, e que deve ser analisado em cada estudo de caso, e γ como um valor maior do que 0,5. Ressalta-se que, não existe nenhuma garantia que essa faixa resultara em convergência, assim como em qualquer outro algoritmo de otimização baseado em população. Neste contexto, pode-se partir destes parâmetros e ir modificando-os na medida em que uma análise preliminar do estudo de caso for realizada.

Destacada a importância dos parâmetros do ACV no que tange o processo de conver-

gência, o próximo capítulo apresentará a metodologia proposta neste trabalho para a atualização dos parâmetros no ACV, bem como uma proposta para o tratamento de problemas de otimização com variáveis mistas.

Capítulo 5

ATUALIZAÇÃO DOS OPERADORES NO ACV

O presente capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia proposta para a atualização dos parâmetros do ACV, na qual segue denominada de ACVA (Algoritmo de Colônia de Vagalumes Auto-Adaptativo) e busca aumentar a chance do ACV canônico de encontrar a solução global ao mesmo tempo em que o número total de avaliações da função objetivo pode ser reduzido. Em linhas gerais o ACVA consiste na atualização do tamanho da população via aplicação do critério de taxa de convergência, da atualização do fator de atratividade e do parâmetro de absorção de luz via aplicação de um modelo caótico de busca, da atualização do parâmetro de inserção de regularidade considerando uma relação empírica e do uso de uma sub-população para promover o processo de diversidade da população ao longo do processo evolutivo. Finalmente, apresenta-se uma abordagem para o tratamento de problemas de otimização com variáveis mistas.

5.1 Atualização do Tamanho da População

Para propor uma relação para a atualização do tamanho da população (N_p) no ACV, será definido um parâmetro para essa finalidade, a saber, a taxa de convergência (TC) como sendo:

$$TC = \frac{f_{average}}{f_{worst}}, \quad (5.1)$$

em que $f_{average}$ e f_{worst} representam o valor médio e o pior valor em termos da função objetivo em cada geração, respectivamente.

A TC definida é a forma pela qual mensura-se a homogeneidade da população no processo evolutivo. Inicialmente, tem-se TC próximo de zero, isto é, o *pior* valor da função objetivo é bem diferente do valor médio da função objetivo, o que faz com que a taxa seja pequena. Já no final do processo evolutivo, como a população tende a ficar homogênea, TC

tende a 1. Assim, a partir dessa definição pode-se propor a seguinte relação para a atualização do número de indivíduos na próxima geração:

$$N_p = \text{round}(N_p(\min)TC + N_p(\max)(1 - TC)), \quad (5.2)$$

em que $N_p(\min)$ e $N_p(\max)$ representam os valores mínimo e máximo para o tamanho da população, respectivamente, e o operador $\text{round}(\cdot)$ indica o arredondamento para o inteiro mais próximo. Nesse caso, através da equação 5.2 o número de indivíduos da população é atualizado através do conhecimento da evolução do processo em análise, isto é, se a população tende a se tornar homogênea, a população tende ao seu valor mínimo. Por outro lado, se a população não tende a se tornar homogênea, a população tende ao seu valor máximo.

Em termos práticos, durante a utilização dessa estratégia devem-se considerar três possibilidades:

- Se o tamanho da nova população ($N_p(\text{new})$) não se altera com relação ao tamanho atual ($N_p(\text{old})$), isto é, $N_p(\text{new})=N_p(\text{old})$, o tamanho da população se mantém;
- Se o tamanho da população na próxima geração diminui com relação à geração corrente ($N_p(\text{new}) < N_p(\text{old})$), ordena-se os indivíduos da população corrente de acordo com a função objetivo e somente os $N_p(\text{new})$ indivíduos participarão da nova população;
- Se o tamanho da população na próxima geração aumenta com relação à geração corrente ($N_p(\text{new}) > N_p(\text{old})$), gera-se $N_p(\text{new}) - N_p(\text{old})$ indivíduos através do operador para a geração de indivíduos no ACV, e esses são acrescentados à população atual para formar a nova população com $N_p(\text{new})$ indivíduos.

5.2 Atualização do Fator de Atratividade e do Parâmetro de Absorção de Luz

Para a atualização do fator de atratividade (β_0) e do parâmetro de absorção da luz pelo meio (γ) será considerado um Modelo Caótico de Busca. A escolha por esse tipo de abordagem para a atualização desses parâmetros se deve à diversidade introduzida através do conceito de caos (termo comumente aceito para o comportamento dinâmico de um sistema que exibe sensibilidade às condições iniciais (BEQUETTE, 1998)).

Segundo Tavazoei e Haeri (2007), o caos pode ser entendido como um gerador aleatório obtido através de sistemas determinísticos. Segundo Li e Jiang (1998), nos algoritmos de otimização com busca caótica, a convergência prematura pode ser prevenida através do movimento caótico incorporado pelos modelos. Segundo Yang, Li e Cheng (2007), a ideia

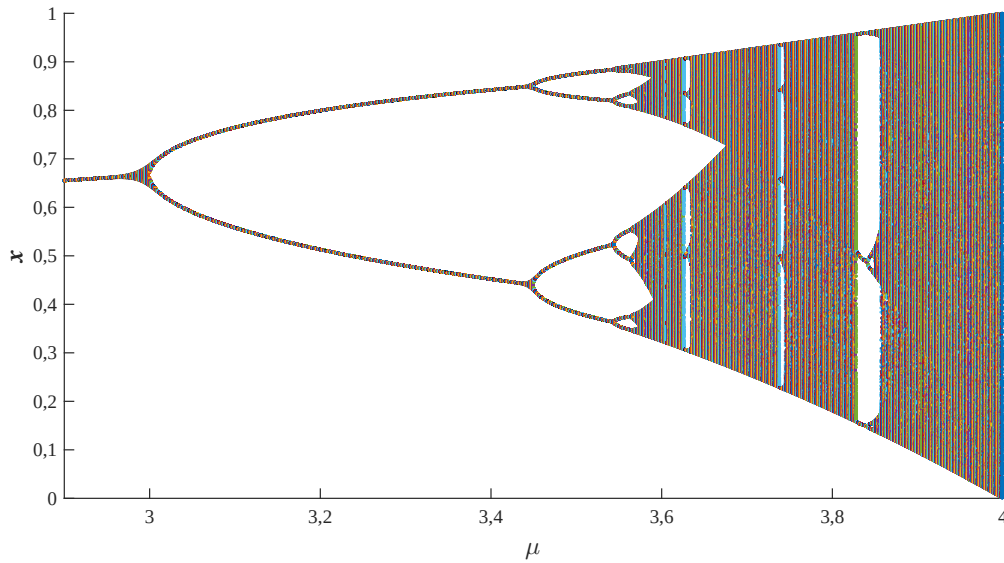
básica de um algoritmo de otimização fundamentado em um modelo caótico de busca consiste primeiramente na definição de um gerador de caos baseado em alguma relação matemática (conhecida como mapa caótico). De posse desse gerador, uma sequência de *pontos caóticos* dentro da faixa considerada como interessante para cada um dos parâmetros que se deseja atualizar.

Em tal contexto, para fins de atualização dos parâmetros do ACV citados, será utilizado o Mapa Logístico para essa finalidade, cujo modelo é definido pela seguinte relação (DAVANEY, 1987; OTT, 2002):

$$x_{i+1} = \mu x_i (1 - x_i), \quad (5.3)$$

em que x é o parâmetro que se deseja atualizar e μ é uma constante de controle. A Figura 5.1 apresenta o denominado diagrama de bifurcação para diferentes valores de μ , onde é possível observar que, para determinados valores deste parâmetro ($3,57 \leq \mu \leq 4$), o comportamento do Mapa Logístico é caótico (BEQUETTE, 1998). Para essa finalidade, em todas as simulações realizadas considerou-se μ como sendo igual a 3,7.

Figura 5.1 – Diagrama de Bifurcação.



Assim, conhecendo-se um ponto de partida pode-se atualizar o fator de atratividade (β_0) e o parâmetro de absorção da luz pelo meio (γ) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \beta_0^{k+1} &= \mu \beta_0^k (1 - \beta_0^k), \\ \gamma^{k+1} &= \mu \gamma^k (1 - \gamma^k), \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que β_0^{k+1} e γ^{k+1} são os valores atualizados dos parâmetros na geração $k+1$ a partir do valor *default* encontrado na literatura. Assim sendo, esses parâmetros são atualizados a cada geração segundo um modelo que introduz diversidade a eles e, por consequência, ao processo evolutivo.

Como muitas propostas baseadas em modelos caóticos para atualização paramétrica presente na literatura, a metodologia proposta se baseia em inserir a formulação matemática do mapa para atualizar o parâmetro, afim de garantir uma dinâmica ao seu comportamento ao longo do processo iterativo, onde tal pode variar dentro de sua faixa conveniente.

Cabe enfatizar ainda que apenas o modelo caótico de busca apresentado foi considerado como forma de atualizar o fator de atratividade e o parâmetro de absorção de luz. Assim, nenhum tipo de análise de sensibilidade quanto a esse tipo de modelo foi realizada, visto que existem trabalhos nos quais essa avaliação é descrita em detalhes (COELHO; BERNERT; MARIANI, 2011; TAVAZOEI; HAERI, 2007; ALATAS; AKIN; OZER, 2007; COELHO; MARIANI, 2007; LOBATO; STEFFEN; OLIVEIRA-LOPES, 2007; BAYKASOGLU; OZSOYDAN, 2015; GANDOMI *et al.*, 2013).

5.3 Atualização do Parâmetro de Inserção de Regularidade

Já a atualização do parâmetro de inserção de regularidade α , pode ser realizada a partir da definição de uma relação empírica, baseada no trabalho de Yang (2008), onde esse parâmetro é inicializado como um valor próximo a unidade, para aumentar a diversidade da população e com o passar do processo evolutivo o mesmo é reduzido a um valor próximo a zero, para promover o refinamento da solução ótima corrente. Portanto, o presente trabalho define a seguinte relação para atualizar tal parâmetro:

$$\alpha^{k+1} = 0,9 \exp(-0,05k), \quad (5.5)$$

em que $k+1$ é a geração corrente e 0,9 e 0,05 são parâmetros definidos a partir do estudo proposto por Yang (2008). Nessa relação percebe-se que o valor 0,9 vai sendo reduzido ao longo do processo evolutivo.

5.4 Técnica das Sub-populações

A definição da taxa de convergência proposta anteriormente permite a atualização da população ao longo do processo evolutivo. Nesse caso, como espera-se em todo e qualquer processo evolutivo, ao longo do mesmo a população tende a se tornar homogênea e, consequentemente, o valor de TC tende a unidade e a população tende ao valor mínimo. Embora o processo seja interessante do ponto de vista da redução do número de avaliações da função objetivo, o mesmo pode convergir para uma solução local quando o tamanho da população reduz drasticamente. Esta é a razão pela qual a grande maioria dos algoritmos evolutivos inicia-se o processo com uma população de tamanho razoável, isto é, longe de um valor mínimo.

Em decorrência de tais fatos, para reduzir a chance do algoritmo proposto ficar estagnado em torno de um ótimo local, será considerado o uso de sub-populações para in-

serir diversidade ao processo. Por exemplo, será definindo duas populações, uma que será atualizada considerando a estratégia clássica proposta por Yang (2008) e a outra que será atualizada segundo um outro mecanismo evolutivo. Assim, considere como alternativa para a geração da população a seguinte relação baseada no algoritmo de Enxame de Partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995):

$$x_i^{k+1} = x_a^k + \beta_0 (x_b^k - x_c^k), \quad (5.6)$$

em que os subscritos a , b e c representam posições de três vagalumes na população corrente (escolhido aleatoriamente dentro da população) e β_0 é o fator de atratividade apresentado anteriormente.

Nesse caso, definindo um percentual para cada sub-população (geralmente 50%), as mesmas serão atualizadas considerando abordagens diferentes, a saber, uma considerando o mecanismo proposto no ACV e a outra considerando essa nova proposta baseada no Algoritmo de Enxame de Partículas. Cabe ressaltar que a divisão da população das duas sub-populações ocorre de forma aleatória, o que ajuda a promover a diversidade da população como um todo, já que existe a transferência de informações entre as sub-populações a cada geração.

5.5 Operador para o Tratamento de Variáveis Mistas

Com o intuito de aproveitar a estrutura do ACV, a seguir é apresentada a estratégia proposta nesse trabalho para o tratamento de variáveis mistas, conforme metodologia sugerida por Lobato (2008). Em linhas gerais, tal metodologia consiste em gerar o candidato à solução do problema de otimização conforme descrito pelo ACV e, a partir daí, efetuar transformações de domínio de modo que qualquer tipo de variável possa ser analisada pelo algoritmo. Para entender como funciona tal procedimento, considere um problema com uma única variável de projeto, x_{disc} que assume apenas valores discretos ($x_{disc} \in \{1,24 \ 2,45 \ 3,09 \ 4,67 \ 5,87\}$). Inicialmente, define-se como domínio da variável de projeto um intervalo qualquer, por exemplo $0 \leq x_{cont} \leq 1$. Dessa maneira, como tem-se 5 valores discretos, pode-se definir o seguinte critério de escolha:

$$x_{disc} = \begin{cases} 1,24; & \text{se } 0,0 \leq x_{cont} < 0,2 \\ 2,45; & \text{se } 0,2 \leq x_{cont} < 0,4 \\ 3,09; & \text{se } 0,4 \leq x_{cont} < 0,6 \\ 4,67; & \text{se } 0,6 \leq x_{cont} < 0,8 \\ 5,87; & \text{se } 0,8 \leq x_{cont} \leq 1,0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Assim, se o candidato gerado pelo algoritmo com valor contínuo tiver o valor de 0,564, esse é corrigido para 3,09, que seria o domínio discreto correspondente para essa variável contínua. Com essa simples modificação no código na hora de avaliar a função objetivo e

as restrições, o algoritmo continua gerando candidatos no domínio real, mas avaliando-os no domínio discreto. Assim, o código sofre uma adaptação, mas que não causa nenhum tipo de modificação, em termos de implementação, no algoritmo original, o que configura a sua principal vantagem em relação às outras estratégias apresentadas na literatura. Cabe ressaltar que o mesmo procedimento pode ser utilizado para outros tipos de variáveis, como por exemplo, inteiras e binárias.

No próximo capítulo são apresentados os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta na resolução de problemas matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia em que são considerados estudos com apenas variáveis reais e outros com mistas.

Capítulo 6

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, a eficiência da estratégia ACVA (Algoritmo de Colônia de Vagalumes Auto-Adaptativo) proposta foi avaliada em uma série de problemas bem conhecidos descritos na literatura. Esses, consideram problemas que apresentam apenas variáveis reais e problemas que apresentam variáveis mistas. Em cada aplicação também serão considerados os resultados obtidos pelo ACV canônico e por outras abordagens apresentadas na literatura especializada. Cabe ressaltar que a escolha dos parâmetros nas estratégias ACV e ACVA (limites máximos) foram definidos de forma que o número de avaliações da função objetivo requeridas fossem, em média, equivalentes ao obtido por outros algoritmos considerados como referência. Em todos os estudos de caso que apresentam restrições, o Método da Penalização Estática (com parâmetro de penalidade da ordem de 10^8) foi tomado como metodologia para lidar com restrições.

A primeira parte deste capítulo será dedicada à resolução de problemas matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia que apresentam apenas variáveis reais. E a posteriori estudos serão expandidos para problemas do contexto misto.

6.1 Funções Matemáticas com Variáveis Reais

Com o intuito de comparar o desempenho da estratégia proposta (ACVA) foi utilizado o ACV canônico considerando diferentes configurações, isto é, ACV^1 ($N_p = 100$ (tamanho da população), $N_{gen} = 2000$ (número máximo de gerações), $\alpha = 0,9$; $\beta_0 = 0,8$ e $\gamma = 1$), ACV^2 ($N_p = 100$, $N_{gen} = 2000$, $\alpha = 0,8$; $\beta_0 = 0,9$ e $\gamma = 0,9$) e ACV^3 ($N_p = 100$, $N_{gen} = 2000$, $\alpha = 0,7$; $\beta_0 = 0,8$ e $\gamma = 0,9$), respectivamente. Para os parâmetros considerados, o número de chamadas da função objetivo é igual a 200100 ($N_p + N_p \times N_{gen}$). Além disso, as seguintes funções matemáticas que devem ser minimizadas são consideradas (Adjiman *et al.* (1998), Ali e Torn (2004), Csendes e Ratz (1997), Rahnamayan, Tizhoosh e Salama (2007a), Rahnamayan, Tizhoosh e Salama (2007b), Sarimveis e Nikolakopoulos (2005), Wang, Zhang e Zhang (2007), Yang (2010b)):

- Função F_1 :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2), \quad (6.1)$$

com $x_i \in [-1, 1]$ ($i=1,2$). Essa função apresenta cerca de 50 mínimos locais e o mínimo global igual a -2 (x_i iguais a 0, $i=1,2$).

- Função F_2 :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 0,3 \cos(3\pi x_1) - 0,4 \cos(4\pi x_2) + 0,7, \quad (6.2)$$

com $x_i \in [-100, 100]$ ($i=1,2$). Essa função apresenta inúmeros mínimos locais e o mínimo global é igual a 0 ($x_i=0$, $i=1,2$).

- Função F_3 :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \left(100 \left(x_j^2 - x_{j+1} \right)^2 + (x_j - 1)^2 \right), \quad (6.3)$$

com $x_i \in [-5, 5]$ ($i=1, 2, \dots, n$). A função F_3 tem inúmeros mínimos locais e ótimo global igual a 0 ($x_i=1$, $i=1, \dots, n=5$).

- Função F_4 :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n |x_j| + \prod_{j=1}^n |x_j|, \quad (6.4)$$

com $x_i \in [-100, 100]$ ($i=1, 2, \dots, n$). A função F_4 tem ótimo global igual a 0 ($x_i=0$, $i=1, \dots, n=20$).

- Função F_5 :

$$f(x) = \cos(x_1) \sin(x_2) - x_1 / (x_2^2 + 1), \quad (6.5)$$

com $x_i \in [0, 10]$ ($i=1, 2$). A função F_5 tem mínimo global igual a -2,02181 ($x_1=2$ e $x_2=0,10578$).

- Função F_6 :

$$f(x) = 0,6 + \sum_{i=1}^2 \left(\sin \left(\frac{16}{15} x_i - 1 \right) + \sin^2 \left(\frac{16}{15} x_i - 1 \right) + \frac{1}{50} \sin \left(4 \left(\frac{16}{15} x_i - 1 \right) \right) \right), \quad (6.6)$$

com $x_i \in [-1, 1]$ ($i=1, 2$). A função F_6 tem mínimo global igual a 0,060447 ($x_1=0,45834282$ e $x_2=0,45834282$).

- Função F_7 :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x_i \sin(x_i) + 0,1 x_i|, \quad (6.7)$$

com x_i ($i=1, \dots, n$) $\in [-10, 10]$ e mínimo igual a 0 ($x_i=0$, $i=1, \dots, n=10$).

- Função F_8 :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^6 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x_i}\right) \right), \quad (6.8)$$

com $x_i \in [-1, 1]$ e mínimo igual a 0 ($x_i=0$, $i=1, \dots, n=10$).

- Função F_9 :

$$f(x) = -\exp\left(-0,5 \sum_{i=1}^n x_i^2\right), \quad (6.9)$$

com $x_i \in [-1, 1]$ e mínimo igual a 0 ($x_i=0$, $i=1, \dots, n=10$).

- Função F_{10} :

$$f(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{2m}\right) - 2 \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \pi)^2\right) \prod_{i=1}^n \cos^2(x_i), \quad (6.10)$$

com $x_i \in [-10, 10]$ e mínimo global considerando $m = 5$ e $\lambda = 15$ igual a -1 ($x_i = \pi$, $i=1, \dots, n=10$).

Para a obtenção dos valores médios que serão apresentados a seguir, todos os casos foram resolvidos 10 vezes considerando diferentes sementes iniciais para a inicialização do gerador de números aleatórios. Para a metodologia proposta, foram considerados fixos os seguintes parâmetros intrínsecos para inicialização: $N_p(min) = 20$, $N_p(max) = 100$, $N_{gen} = 2000$, e os parâmetros α , β_0 e γ sendo atualizados conforme descrito anteriormente no Capítulo 5. Para se mensurar a redução resultante com relação ao número de avaliações da função objetivo do ACV canônico, definiu-se o parâmetro Γ como sendo a taxa de redução:

$$\Gamma = 100\% - \left(\frac{\Phi}{N_p \times N_{gen} + N_p} \right) 100\% \quad (6.11)$$

Cabe ressaltar que esse parâmetro representa a redução percentual que se obtêm com a aplicação do algoritmo $\Phi(=ACV^1, ACV^2, ACV^3$ ou $ACVA)$ em relação ao algoritmo que é finalizado considerando um número fixo de gerações. Para finalizar o processo evolutivo, em cada algoritmo considera-se a homogeneidade da população, isto é; quando a diferença, em módulo, entre o valor médio e o pior valor referente a função objetivo for menor que 10^{-6} , o processo de otimização é finalizado. Caso a população não se torne homogênea, o processo continua até que o número de gerações seja igual a N_{gen} .

Na Tabela 6.1 são apresentados os melhores resultados, os piores e os valores médios em relação à cada função objetivo, o número médio de avaliações da função objetivo ($NAFO$) e a redução percentual (Γ).

Tabela 6.1 – Resultados obtidos pelas estratégias ACV¹, ACV², ACV³ (Variáveis Reais).

		ACV ¹	ACV ²	ACV ³	ACVA
F_1	<i>Pior</i>	-2,0000	-1,9999	-2,0000	-2,0000
	<i>Média</i>	-2,0000	-2,0000	-2,0000	-2,0000
	<i>Melhor</i>	-2,0000	-2,0000	-2,0000	-2,0000
NAFO		173740	164080	158260	22339
	$\Gamma(\%)$	13,17	18,01	20,90	88,83
F_2	<i>Pior</i>	1,1343E-07	1,1877E-07	1,3885E-07	1,5455E-06
	<i>Média</i>	1,2574E-07	4,1999E-08	4,2555E-08	6,5556E-07
	<i>Melhor</i>	1,3552E-08	2,5998E-09	2,2227E-09	3,8776E-12
NAFO		137100	145920	186240	100092
	$\Gamma(\%)$	31,48	27,07	6,92	49,97
F_3	<i>Pior</i>	2,8777E-02	5,6666E-02	6,5716E-02	3,3433E-04
	<i>Média</i>	2,3322E-02	3,4545E-02	5,7771E-02	2,7444E-05
	<i>Melhor</i>	3,0338E-03	1,1664E-02	4,7770E-03	1,4331E-07
NAFO		200100	200100	140700	79238
	$\Gamma(\%)$	-	-	29,68	60,40
F_4	<i>Pior</i>	2,8876E-03	2,3999E-03	2,9994E-03	1,2254E-02
	<i>Média</i>	2,5876E-03	2,1666E-03	1,1991E-03	4,7555E-03
	<i>Melhor</i>	1,9996E-03	1,4544E-03	1,6807E-03	3,5543E-05
NAFO		200100	200100	200100	90779
	$\Gamma(\%)$	-	-	-	54,63
F_5	<i>Pior</i>	-2,0218	-2,0218	-2,0218	-2,0218
	<i>Média</i>	-2,0218	-2,0218	-2,0218	-2,0218
	<i>Melhor</i>	-2,0218	-2,0218	-2,0218	-2,0218
NAFO		200100	200100	200100	19294
	$\Gamma(\%)$	-	-	-	90,36
F_6	<i>Pior</i>	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02
	<i>Média</i>	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02
	<i>Melhor</i>	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02	6,4470E-02
NAFO		200100	200100	200100	21937
	$\Gamma(\%)$	-	-	-	89,03
F_7	<i>Pior</i>	7,6994E-05	2,2453E-05	6,8999E-05	1,3333E-06
	<i>Média</i>	7,8444E-06	4,2444E-06	3,9444E-06	3,6443E-07
	<i>Melhor</i>	0	0	0	0
NAFO		80240	49740	75100	28850
	$\Gamma(\%)$	59,90	75,14	62,46	85,58
F_8	<i>Pior</i>	0	0	0	0
	<i>Média</i>	0	0	0	0
	<i>Melhor</i>	0	0	0	0
NAFO		23680	27280	24440	16380
	$\Gamma(\%)$	88,16	86,36	87,78	91,32
F_9	<i>Pior</i>	-1	-1	-1	-1
	<i>Média</i>	-1	-1	-1	-1
	<i>Melhor</i>	-1	-1	-1	-1
NAFO		42640	50920	64180	22084
	$\Gamma(\%)$	78,69	74,55	67,92	88,96
F_{10}	<i>Pior</i>	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01
	<i>Média</i>	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01
	<i>Melhor</i>	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01	-9,9992E-01
NAFO		200100	200100	200100	20074
	$\Gamma(\%)$	-	-	-	89,97

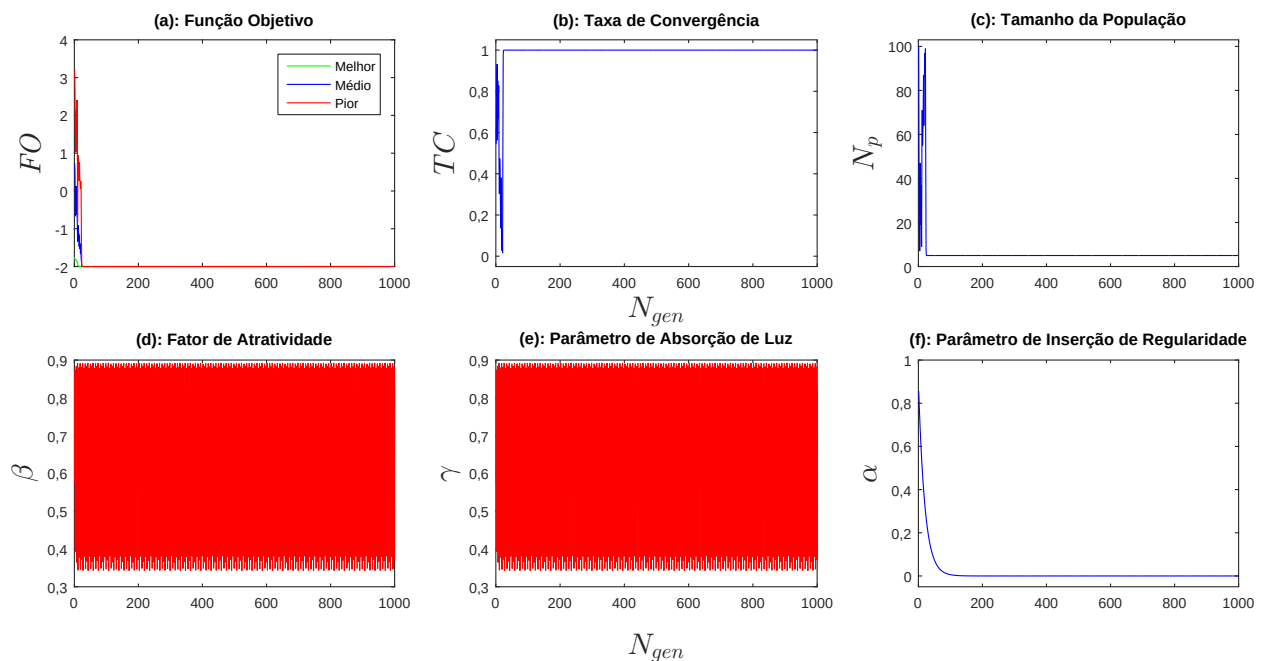
Fonte: o autor.

Na Tabela 6.1 percebe-se que, primeiramente, todas as versões do ACV utilizadas convergiram para a solução ótima dos problemas considerados. Em segundo lugar, como concluído no capítulo 4, a escolha dos parâmetros utilizados no ACV canônico influencia, como esperado, no número total de avaliações da função objetivo requeridas para encontrar a solução.

Em termos de convergência, a metodologia proposta ACVA sempre convergiu para a solução ótima. Todavia, como observado na Tabela 6.1, o custo computacional ($NAFO$) sempre foi menor que aqueles requeridos quando os parâmetros foram considerados constantes. Isto se deve ao fato dos parâmetros serem atualizados dinamicamente, favorecendo a obtenção da solução ótima, bem como a homogeneidade da população durante o processo evolutivo, fazendo com que o número de indivíduos alcançasse o seu valor mínimo. Assim, o valor do parâmetro Γ , que representa o ganho percentual em se reduzir o tamanho da população ao longo do processo de otimização, sempre foi maior do que os requeridos, observa-se uma redução da ordem de aproximadamente 50 à 90% do custo total requerido para a resolução das funções matemáticas em relação aos algoritmos ACV^1 , ACV^2 e ACV^3 . Isto significa que pode-se resolver um mesmo problema com um esforço computacional muito menor do que quando considera-se os parâmetros fixos durante o processo evolutivo. Finalmente, ressalta-se que quando a população se torna homogênea no ACV, se nenhuma estratégia for considerada para a redução do número de indivíduos da população, o custo computacional requerido para resolver cada problema é igual a 200100 avaliações.

A Figura 6.1 apresenta o valor da função objetivo - FO (melhor, pior e médio), da TC , de N_p e dos parâmetros adaptados ao longo do processo evolutivo para a função F_1 considerando até a 1000^a geração.

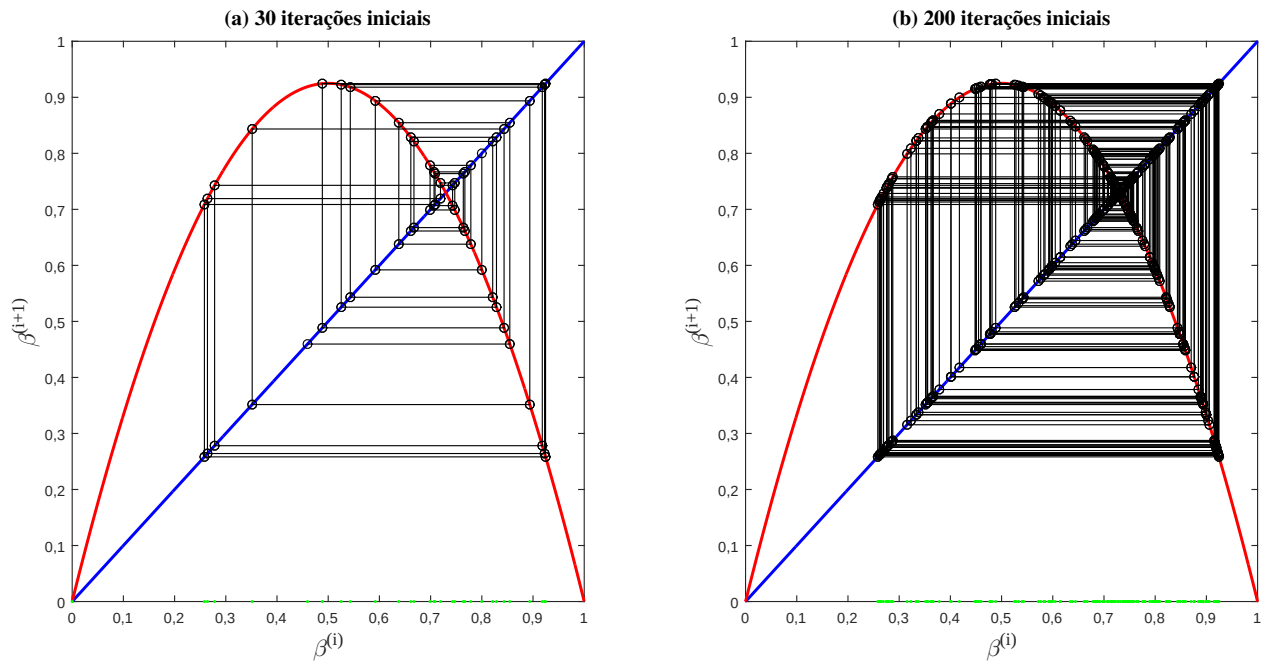
Figura 6.1 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para a Função F_1 .



Pela Fig. 6.1 fica evidente que na medida em que a população se torna homogênea, a taxa de convergência se aproxima da unidade e o tamanho da população alcança o seu valor mínimo. Isto faz com que o custo computacional requerido para a resolução deste estudo de caso seja reduzido (para este caso observou-se uma redução da ordem de, aproximadamente, 89%). Também é possível observar a flutuação dos parâmetros β_0 e γ , bem como a redução do parâmetro α durante o processo evolutivo. Neste caso, ao invés de se manter os parâmetros fixos, o que pode levar a ótimos locais, permite-se que estes parâmetros sejam atualizados ao longo do processo evolutivo, mesmo que seja por meio de um modelo caótico de busca para β_0 e γ e um puramente empírico para α .

Para entender melhor o comportamento da proposta de atualização considerando o Mapa Logístico, a Figura 6.2 mostra o diagrama de 'cobweb' ou teia de aranha, para as 30 e 200 primeiras iterações (valor considerado para melhor visualização gráfica), onde é possível observar a órbita do caso de atualização de β da função F_1 partindo do ponto inicial $\beta_0 = 0,8$. O gráfico consiste em traçar a função quadrática do mapa logístico e a reta identidade do parâmetro à atualizar ($x_{n+1} = x_n$), onde a solução é a interseção das duas curvas (BEQUETTE, 1998).

Figura 6.2 – Diagrama *Cobweb* para a Atualização do Parâmetro $\beta_0 = 0,8$.



Pode-se observar pela Fig. 6.2 que, independente do número de iterações (gerações), o comportamento do parâmetro β é caótico, pois não existe uma previsibilidade no que tange ao valor desse parâmetro.

O comportamento de γ é igual ao apresentado por β , já que ambos foram atualizados nas mesmas condições. Assim os parâmetros tem seus valores dinâmicos durante o processo

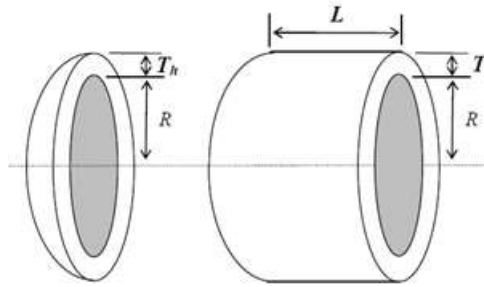
de otimização.

6.2 Projeto de Sistemas de Engenharia com Variáveis Reais

6.2.1 Projeto de um Recipiente de Pressão

O primeiro estudo de caso de engenharia consiste no projeto de um recipiente de pressão cujo objetivo é minimizar o custo total conforme a Fig. 6.3 (COELLO, 2000; DEB, 1997).

Figura 6.3 – Projeto de um Recipiente de Pressão.



No problema existem quatro variáveis de projeto, a saber, x_1 (T_s , a espessura do invólucro), x_2 (T_h , a espessura da tampa), x_3 (R , o raio interno) e x_4 (L , o comprimento da secção cilíndrica do recipiente). Matematicamente, pode ser modelado como (COELLO, 2000; DEB, 1997):

$$\min f = 0,6224x_1x_3x_4 + 1,7781x_2x_3^2 + 3,1661x_1^2x_4 + 19,84x_1^2x_3, \quad (6.12)$$

sujeito às seguintes restrições geométricas e limites das variáveis de projeto:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv 0,0193x_3 - x_1 \leq 0, \\ g_2(x) &\equiv 0,00954x_3 - x_2 \leq 0, \\ g_3(x) &\equiv 1296000 - \pi x_3^2x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 \leq 0, \\ g_4(x) &\equiv x_4 - 240 \leq 0, \\ D &\equiv \{x \in \mathbb{R}^4 : (0,0,10,10)^T \leq x \leq (1,1,200,240)^T\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Com o intuito de comparar o desempenho da estratégia proposta nesse trabalho para a resolução desse estudo de caso, considera-se o ACV ($N_p=100$, $N_{gen}=1000$, $\alpha=0,9$, $\beta_0=0,8$ e $\gamma = 0,8$); ACVA ($N_p(min)=20$, $N_p(max)=100$, $N_{gen}=1000$), e os parâmetros α , β_0 e γ sendo atualizados conforme descrito anteriormente).

A Tabela 6.2 apresenta os resultados obtidos pelos algoritmos ACV e ACVA em comparação com os obtidos por Coello (2000) e Deb (1997) usando Algoritmos Genéticos, por Hu et al. (2003) via Enxame de Partículas e por MASTA et al. (2012) usando o Algoritmo Line-up.

Tabela 6.2 – Resultados Obtidos com os Algoritmos ACV e ACVA.

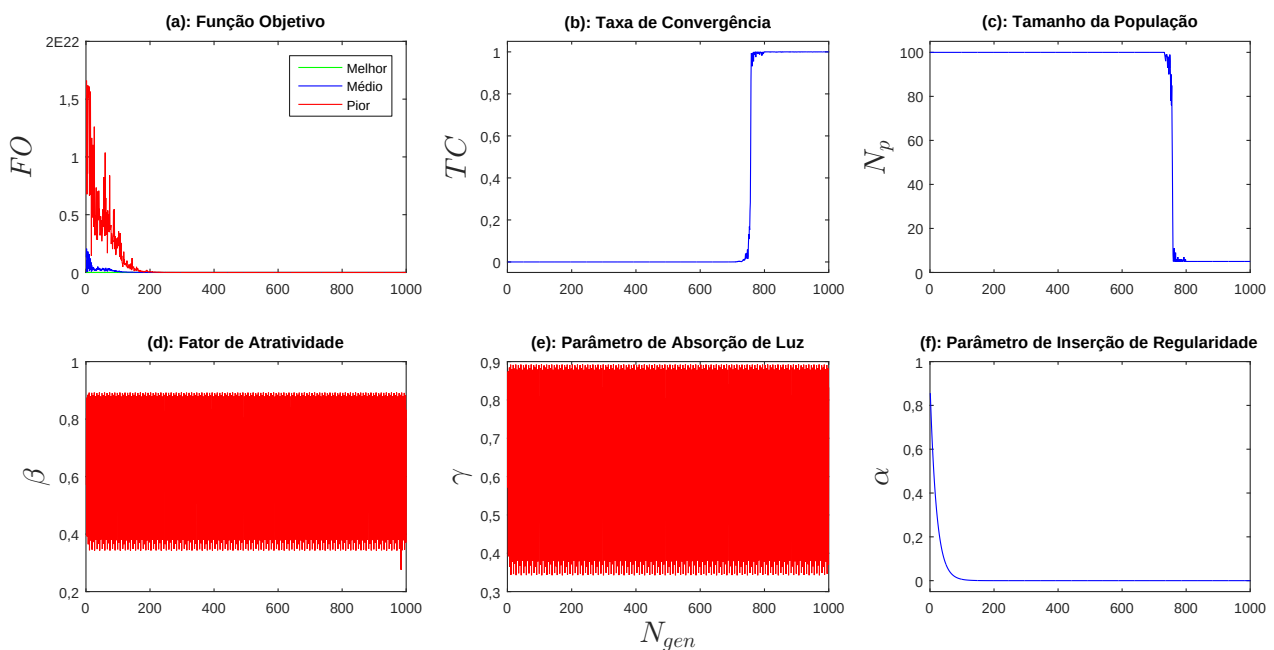
	Hu <i>et al.</i> (2003)	Coello (2000)	Deb (1997)	MASTA <i>et al.</i> (2012)	ACV	ACVA
x_1	0,8125	0,8125	0,9375	0,7810	0,7395	0,7275
x_2	0,4375	0,4375	0,5000	0,3860	0,3661	0,3596
x_3	42,0984	40,3239	48,3290	40,4606	38,3211	37,6990
x_4	176,6366	200	112,6790	198,1174	229,8254	239,9999
g_1	0	-0,0343	-0,0047	-0,0001	0,15E-5	3,91E-5
g_2	-0,0358	-0,0528	-0,0389	-0,0001	-0,0006	1,26E-5
g_3	0	-27,1058	-3652,7888	-370,3341	-15,105	3,25E-9
g_4	-63,3624	-40	-127,3210	-41,8890	-10,1745	1,54E-18
f	6059,1312	6288,7445	6410,3811	5892,8890	5824,2572	5804,2071
NAFO	-	-	-	121100	100100	65228

Fonte: o autor.

Os resultados apresentados na Tab. 6.2 demonstram que os algoritmos ACV e ACVA foram os que obtiveram os melhores valores em comparação com os resultados reportados pela literatura. Todavia, em relação ao algoritmo *Line-up* e ao ACV canônico, o ACVA conseguiu reduzir em cerca de, aproximadamente, 46,14% e 34,84% o número de avaliações da função objetivo, respectivamente.

A Figura 6.4 apresenta a evolução do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA para esse estudo de caso.

Figura 6.4 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de um Recipiente de Pressão.



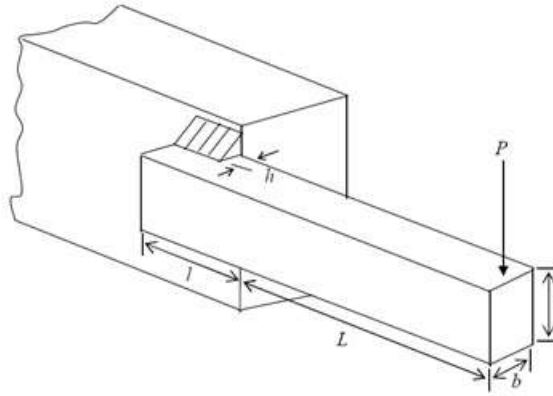
Conforme comentado anteriormente, na Figura 6.4(a) observa-se que ao longo do processo evolutivo a população tende a ser tornar homogênea, implicando no aumento do

valor da taxa de convergência e posterior redução do tamanho da população. Ainda observa-se que os valores de β e γ são atualizados de acordo com o modelo caótico de busca, em que estes assumem valores entre zero e a unidade e α é reduzido ao longo das gerações.

6.2.2 Projeto de uma Viga Engastada

O último estudo de caso que apresenta somente variáveis reais trata do projeto de uma viga engastada cujo objetivo é minimizar o custo de uma viga em que são consideradas as coordenadas geométricas como variáveis de projeto ($h = x_1$, $l = x_2$, $x_3 = t$ e $x_4 = b$), conforme a Fig. 6.5 (COELLO, 2000; DEB, 1997). Este problema apresenta restrições que representam limitações de tensão de cisalhamento, tensão de dobramento na viga, esforço de carga na barra, reflexão final da viga, bem como as restrições laterais.

Figura 6.5 – Projeto de uma Viga Engastada Soldada.



Matematicamente, esse problema pode ser descrito conforme segue (COELLO, 2000; DEB, 1997):

$$\min F(x) = 1,10471x_1^2x_2 + 0,04811x_3x_4(14 + x_2), \quad (6.14)$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv \sqrt{\left(\frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2}\right)\left(\frac{MR}{J}\right)\frac{x_2}{2R} + \left(\frac{MR}{J}\right)^2} - \tau_{max} \leq 0, \\ g_2(x) &\equiv \frac{6PL}{x_3^2x_4} - \sigma_{max} \leq 0, \\ g_3(x) &\equiv x_1 - x_4 \leq 0, \\ g_4(x) &\equiv 0,10471x_1^2 + 0,04811x_3x_4(14 + x_2) - 5 \leq 0, \\ g_5(x) &\equiv 0,125 - x_1 \leq 0, \\ g_6(x) &\equiv \frac{4PL^3}{Ex_3^3x_4} - \delta_{max} \leq 0, \\ g_7(x) &\equiv P - P_c(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

em que:

$$\begin{aligned}
 MP &\equiv \left(L + \frac{x_2}{2} \right), \\
 R &\equiv \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2} \right)^2}, \\
 J &\equiv 2 \left(\sqrt{2} x_1 x_2 \left(\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2} \right)^2 \right) \right), \\
 P_c &\equiv \frac{4,013E}{L^2} \sqrt{\frac{x_3^2 x_4^6}{36}} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{E}{4G}} \right), \\
 D &\equiv x \in \mathbb{R}^4 : (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1)^T \leq x \leq (2, 10, 10, 2)^T.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Para resolver este problema considera-se os seguintes parâmetros (COELLO, 2000): $P = 6000$ lb, $L = 14$ in, $E = 30 \times 10^6$ psi, $G = 12 \times 10^6$ psi, $\tau_{max} = 13600$ psi, $\sigma_{max} = 30000$ psi e $\delta_{max} = 0,25$ in. Também foram considerados os seguintes parâmetros: ACV ($N_p = 100$, $N_{gen} = 1000$, $\alpha = 0,9$, $\beta_0 = 0,8$ e $\gamma = 0,8$); ACVA ($N_{pmin} = 20$, $N_{pmax} = 100$, $N_{gen} = 1000$), e os parâmetros α , β_0 e γ sendo atualizados conforme descrito anteriormente.

A Tabela 6.3 apresenta os resultados obtidos pelos algoritmos ACV e ACVA em comparação com os resultados descritos na literatura considerando outras estratégias evolutivas.

Tabela 6.3 – Resultados Obtidos com os Algoritmos ACV e ACVA para o Projeto de uma Viga Engastada Soldada.

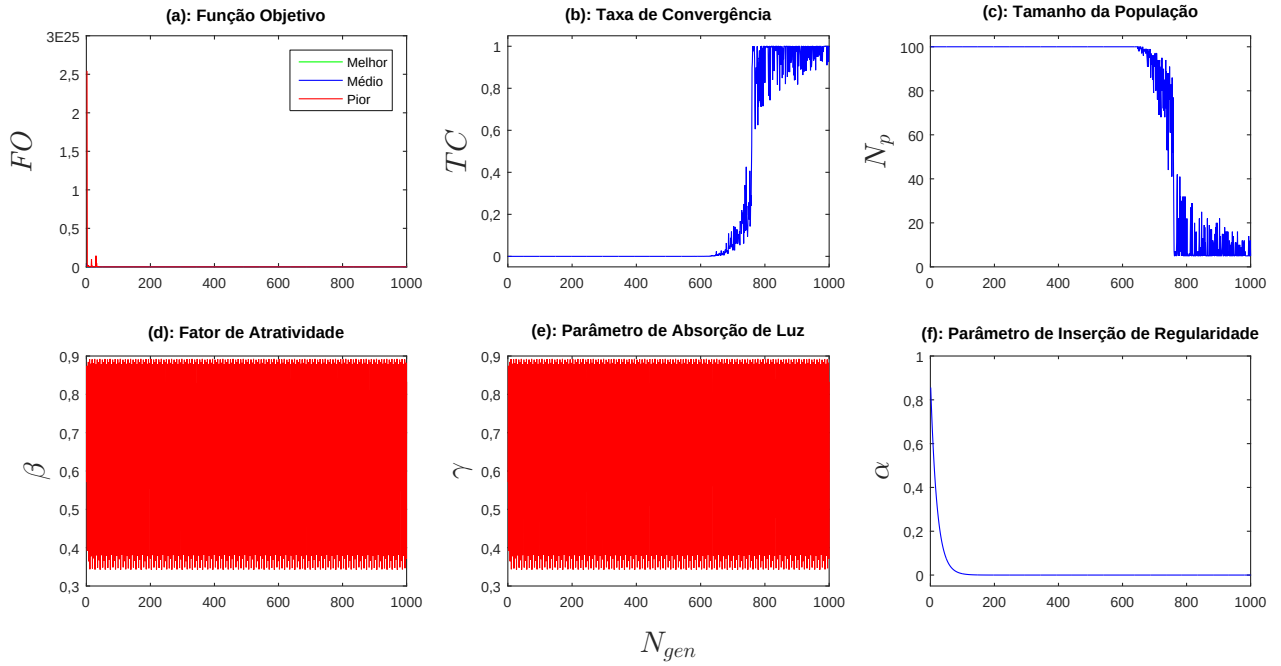
	Hu <i>et al.</i> (2003)	Coello (2000)	Deb (1997)	MASTA <i>et al.</i> (2012)	ACV	ACVA
$x_1(h)$	0,2057	0,2088	0,2489	0,2056	0,2045	0,2057
$x_2(l)$	3,4704	3,4205	6,1730	3,4780	3,4987	3,4704
$x_3(t)$	9,0366	8,9975	8,1739	9,0356	9,0344	9,0366
$x_4(b)$	0,2057	0,2100	0,2533	0,2045	0,2058	0,2057
g_1	0,0000	-0,3378	-5758,6033	0,0000	-5,0738	6,91E-11
g_2	0,0000	-353,9026	-255,5760	0,0000	-7,5110	6,84E-11
g_3	0,0000	-0,0012	-0,0044	0,0000	-0,0013	3,38E-6
g_4	-3,4329	-3,4118	-2,9828	-3,4389	-3,4297	-3,4329
g_5	-0,0800	-0,0838	-0,1239	-0,0300	-0,0795	-0,0807
g_6	-0,2355	-0,2356	-0,2342	-0,2222	-0,2355	-0,2355
g_7	0,0000	-4465,2709	-4465,2709	0,000	-12,1157	1,18E-10
f	1,7248	1,7483	2,4331	1,7214	1,7215	1,7216
NAFO	-	-	-	111100	100100	79285

Fonte: o autor.

Assim como no estudo de caso anterior, os resultados obtidos por ambos as estratégias (ACV e ACVA) foram similares aos reportados considerando outros algoritmos. Além disso, foi constatada uma redução de, aproximadamente, 20,79 % e 28,63 % em relação aos algoritmos ACV e *Line-up*, respectivamente. Resultado que demonstra a capacidade do ACVA de obter um resultado coerente ao reportado pela literatura, todavia considerando um número menor de avaliações da função objetivo.

A Figura 6.6 apresenta a evolução do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA para esse estudo de caso.

Figura 6.6 – Evolução do valor da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Viga Engastada.



Na Figura 6.6(a) observa-se, que este tende a se estabilizar e a população tende a ser tornar homogênea ao longo do processo evolutivo, o que influencia no perfil da taxa de convergência (Fig. 6.6(b)) e, conseqüentemente, no perfil referente ao tamanho da população (Fig. 6.6(c)). Entretanto, ressalta-se que ao final do processo evolutivo, o valor da taxa flutua o que faz com que o número de indivíduos também flutue, mas tendendo ao seu valor mínimo. Esse comportamento oscilante implica que a população está tendendo a se tornar homogênea. Assim, se o número de gerações for aumentado, provavelmente, essa homogeneidade será encontrada. Também é possível observar a variação dinâmica, segundo analogia ao mapa caótico, dos parâmetros β e γ e a variação do α entre zero e a unidade, sendo o mesmo reduzido ao longo das gerações.

Nesta seção, as estratégias ACV e ACVA foram aplicadas em estudos de caso em que somente variáveis reais são consideradas. A seguir, a estratégia proposta para o tratamento de problemas com variáveis mistas e incorporada ao algoritmo ACVA, é avaliada para a resolução de estudos de casos matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia que apresentem diferentes níveis de complexidade.

6.3 Funções Matemáticas com Variáveis Mistas

Para a aplicação do ACV em estudos de casos com variáveis mistas, considere os seguintes problemas matemáticos:

- F_{m1}

$$\begin{aligned}
 \min f(x, y) &= 2x + y; \\
 g_1 &\equiv 1,25 - x^2 - y \leq 0; \\
 g_2 &\equiv x + y \leq 1,6; \\
 0 &\leq x \leq 1,6; \\
 y &\in \{0, 1\};
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

com solução ótima global igual a $[x \ y \ f]=[0,5 \ 1 \ 2]$ (DEEP *et al.*, 2009).

- F_{m2}

$$\begin{aligned}
 \min f(x, y) &= -y + 2x - \ln(x/2); \\
 g_1 &\equiv -x - \ln(x/2) + y \leq 0; \\
 0,5 &\leq x \leq 1,4; \\
 y &\in \{0, 1\};
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

com solução ótima global igual a $[x \ y \ f]=[0,5 \ 1 \ 2,1247]$ (WANG *et al.*, 2017c).

- F_{m3}

$$\begin{aligned}
 \min f(x) &= x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3; \\
 g_1 &\equiv 2x_1^2 + x_2^2 \leq 15; \\
 g_2 &\equiv -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3; \\
 0 &\leq x_i \leq 10, (i = 1, \dots, 3);
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

com solução ótima conhecida como $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ f]=[2 \ 0 \ 5 \ -68]$ (DEEP *et al.*, 2009).

- F_{m4}

$$\begin{aligned}
 \min f(x, y) &= -0,7y + 5(x_1 - 0,5)^2 + 0,8; \\
 g_1 &\equiv -\exp(x_1 - 0,2) - x_2 \leq 0; \\
 g_2 &\equiv x_2 + 1,1y \leq -1; \\
 g_3 &\equiv x_1 - 1,2y \leq 0,2; \\
 0,2 &\leq x_1 \leq 1; \\
 -2,22554 &\leq x_2 \leq -1; \\
 y &\in \{0, 1\};
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

com solução ótima global igual a $[x_1 \ x_2 \ y \ f]=[0,94194 \ -2,1 \ 1 \ 1,076543]$ (WANG *et al.*, 2017c).

- F_{m5}

$$\begin{aligned}
 \min f(x, y) &= 7,5y_1 + 6,4x_1 + 5,5y_2 + 6,0x_2; \\
 h_1 &\equiv 0,8x_1 + 0,67x_2 = 10; \\
 g_1 &\equiv x_1 - 20y_1 \leq 0; \\
 g_2 &\equiv x_2 - 20y_1 \leq 0; \\
 0 &\leq x_1, x_2 \leq 20; \\
 y_1, y_2 &\in \{0, 1\};
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

com solução ótima global igual a $[x_1 \ x_2 \ y \ f]=[12,5006 \ 0 \ 1 \ 0 \ 87,5]$ (WANG *et al.*, 2017c).

• F_{m6}

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_4^2 - 2x_5^2 + 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5; \\
g_1 &\equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 400; \\
g_2 &\equiv 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 200; \\
g_3 &\equiv x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \leq 800; \\
g_4 &\equiv x_3 - x_4 + 5x_5 \leq 200; \\
0 &\leq x_i \leq 99, x_i \text{ são inteiros, } (i = 1, 2, \dots, 5);
\end{aligned} \tag{6.22}$$

com solução ótima global igual a $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ f] = [51 \ 98 \ 0 \ 99 \ 59 \ -57550]$ (ZHAO; LIU, 2017).

• F_{m7}

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= 7x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_1 - 77,2x_2 + 8x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - 19,2x_3 + 6x_4^2 + \\
&\quad + 2x_1x_4 + 2x_3x_4 - 36,6x_4 + 7x_5^2 - 4x_1x_5 - 2x_2x_5 - 6x_3x_5 - 69,4x_5; \\
g_1 &\equiv 9x_1^2 + 10x_1x_2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3 + 7x_4^2 + 10x_1x_4 + \\
&\quad + 6x_2x_4 + 2x_3x_4 + 2x_2x_5 + 7x_5^2 \leq 1430; \\
g_2 &\equiv 6x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_4^2 - 2x_1x_4 + \\
&\quad - 10x_2x_4 + 2x_1x_5 + 6x_2x_5 - 6x_4x_5 - 7x_5^2 \leq 1150; \\
g_3 &\equiv 9x_1^2 + 6x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 6x_4^2 - 4x_1x_4 - 4x_2x_4 + \\
&\quad + 2x_3x_4 + 6x_1x_5 + 2x_2x_5 - 4x_4x_5 + 6x_5^2 \leq 850; \\
g_4 &\equiv 8x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_1x_4 + \\
&\quad - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + 6x_1x_5 + 4x_2x_5 + 2x_3x_5 - 6x_5^2 \leq 1125; \\
g_5 &\equiv 4x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 + \\
&\quad + 2x_3x_4 + 4x_1x_5 - 2x_2x_5 + 6x_3x_5 + 7x_5^2 + 8x_4x_5 \leq 1030; \\
1 &\leq x_i \leq 200, x_i \text{ são inteiros, } (i = 1, 2, \dots, 5).
\end{aligned}$$

com solução ótima igual a $[x_2 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ f] = [2 \ 6 \ 3 \ 2 \ 8 \ -585,2]$ (ZHAO; LIU, 2017).

• F_{m8}

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= x_1x_7 + 3x_2x_6 + x_3x_5 + 7x_4; \\
g_1 &\equiv x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, 0; \\
g_2 &\equiv x_4 + x_5 + 6x_6 \geq 8, 0; \\
g_3 &\equiv x_1x_6 + x_2 + 3x_5 \geq 7, 0; \\
g_4 &\equiv 4x_2x_7 + 3x_4x_5 \geq 25, 0; \\
g_5 &\equiv 3x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 7, 0; \\
g_6 &\equiv 3x_1x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq 20, 0; \\
g_7 &\equiv 4x_1 + 2x_3 + x_6x_7 \leq 15, 0; \\
0 &\leq x_1, x_2, x_3 \leq 4; \\
0 &\leq x_4, x_5, x_6 \leq 2; \\
0 &\leq x_7 \leq 6; \\
x_i &\text{ são inteiros } (i = 1, 2, \dots, 7),
\end{aligned} \tag{6.23}$$

com solução ótima global igual a $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ f] = [0 \ 2 \ 4 \ 0 \ 2 \ 1 \ 4 \ 14]$ (DEEP *et al.*, 2009).

• F_{m9}

$$\begin{aligned}
 \max f(y) &= r_1 r_2 r_3, \\
 r_1 &\equiv 1 - 0,1^{y_1} 0,2^{y_2} 0,15^{y_3}; \\
 r_2 &\equiv 1 - 0,05^{y_4} 0,2^{y_5} 0,15^{y_6}; \\
 r_3 &\equiv 1 - 0,02^{y_7} 0,06^{y_8}; \\
 g_1 &\equiv y_1 + y_2 + y_3 \geq 1; \\
 g_2 &\equiv y_4 + y_5 + y_6 \geq 1; \\
 g_3 &\equiv y_7 + y_8 \geq 1; \\
 g_4 &\equiv 3y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 2y_5 y_6 + 3y_7 + 2y_8 \leq 10; \\
 y &\in \{0, 1\}^8;
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

com solução ótima global igual a $[y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ f] = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0,94347]$ (DEEP *et al.*, 2009).

• F_{m10}

$$\begin{aligned}
 \max f(x) &= 215x_1 + 116x_2 + 670x_3 + 924x_4 + 510x_5 + 600x_6 + 424x_7 + 942x_8 + \\
 &\quad + 43x_9 + 369x_{10} + 408x_{11} + 52x_{12} + 319x_{13} + 214x_{14} + 851x_{15} + 394x_{16} + \\
 &\quad + 88x_{17} + 124x_{18} + 17x_{19} + 779x_{20} + 278x_{21} + 258x_{22} + 271x_{23} + 281x_{24} + \\
 &\quad + 326x_{25} + 819x_{26} + 485x_{27} + 454x_{28} + 297x_{29} + 53x_{30} + 136x_{31} + 796x_{32} + \\
 &\quad + 114x_{33} + 43x_{34} + 80x_{35} + 268x_{36} + 179x_{37} + 78x_{38} + 105x_{39} + 281x_{40}; \\
 g_1 &\equiv 9x_1 + 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 7x_5 + 9x_6 + 10x_7 + 3x_8 + 11x_9 + 11x_{10} + 2x_{11} + x_{12} + \\
 &\quad + 16x_{13} + 18x_{14} + 2x_{15} + x_{16} + x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + 4x_{20} + 7x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + \\
 &\quad + 2x_{24} + x_{25} + 2x_{26} + x_{27} + 8x_{28} + 10x_{29} + 2x_{30} + x_{31} + 9x_{32} + x_{33} + 9x_{34} + \\
 &\quad + 2x_{35} + 4x_{36} + 10x_{37} + 8x_{38} + 6x_{39} + x_{40} \leq 25000; \\
 g_2 &\equiv 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 7x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 2x_8 + 15x_9 + 8x_{10} + 16x_{11} + x_{12} + \\
 &\quad + 2x_{13} + 2x_{14} + 7x_{15} + 7x_{16} + 2x_{17} + 2x_{18} + 4x_{19} + 3x_{20} + 2x_{21} + 13x_{22} + \\
 &\quad + 8x_{23} + 2x_{24} + 3x_{25} + 4x_{26} + 3x_{27} + 2x_{28} + x_{29} + 10x_{30} + 6x_{31} + 3x_{32} + \\
 &\quad + 4x_{33} + x_{34} + 8x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 4x_{38} + 6x_{39} + 2x_{40} \leq 25000; \\
 g_3 &\equiv 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 7x_7 + 10x_8 + 3x_9 + 7x_{10} + 2x_{11} + 16x_{12} + \\
 &\quad + 3x_{13} + 3x_{14} + 9x_{15} + 8x_{16} + 9x_{17} + 7x_{18} + 6x_{19} + 16x_{20} + 12x_{21} + x_{22} + \\
 &\quad + 3x_{23} + 14x_{24} + 7x_{25} + 13x_{26} + 6x_{27} + 16x_{28} + 3x_{29} + 2x_{30} + x_{31} + 2x_{32} + \\
 &\quad + 8x_{33} + 3x_{34} + 2x_{35} + 7x_{36} + x_{37} + 2x_{38} + 6x_{39} + 5x_{40} \leq 25000; \\
 10 &\leq x_i \leq 99, i = 1, 2, \dots, 20; \quad 20 \leq x_i \leq 99, i = 21, 22, \dots, 40;
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

com solução ótima conhecida é igual a:

$$\begin{pmatrix} 48 & 73 & 16 & 86 & 49 & 99 & 94 & 79 \\ 98 & 86 & 94 & 33 & 95 & 80 & 53 & 86 \\ 87 & 50 & 39 & 78 & 47 & 72 & 97 & 98 \\ 73 & 86 & 99 & 81 & 77 & 95 & 28 & 95 \\ 58 & 23 & 55 & 70 & 35 & 82 & 32 & 94 \end{pmatrix},$$

e ótimo igual a 1030361 (DEEP *et al.*, 2009).

A Tabela 6.4 apresenta os melhores resultados obtidos pelo algoritmo proposto ($N_p=50$ e $N_{gen}=500$), bem como o vetor de solução, o número médio de avaliações da função objetivo caso os parâmetros fossem considerados fixos e a taxa de redução do número de avaliação.

Tabela 6.4 – Resultados Obtidos para os Problemas Matemáticos com Variáveis Mistas.

		Vetor Solução	FO	NAFO	$\Gamma(\%)$
F_{m1}	Deep <i>et al.</i> (2009)	(0, 5000; 1)	2	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(0, 5000; 1)	2	6571	73,77
F_{m2}	Wang <i>et al.</i> (2017c)	(0, 5000; 1)	2,1247	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(1, 3748; 1)	2,1245	4647	81,45
F_{m3}	Deep <i>et al.</i> (2009)	(2; 0; 5)	-68	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(2; 0; 5)	-68	11113	55,64
F_{m4}	Wang <i>et al.</i> (2017c)	(0, 9419; -2, 1; 1)	1,0765	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(0, 9419; -2, 1; 1)	1,0765	10790	56,93
F_{m5}	Wang <i>et al.</i> (2017c)	(12, 5006; 0; 1; 0)	87,5	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(12, 5000; 0; 1; 0)	87,5	14094	43,74
F_{m6}	Zhao e Liu (2017)	(51; 98; 0; 99; 59)	-57550	25050	-
	ACV				
min	ACVA	(50; 99; 0; 99; 59)	-57652	9439	62,32
F_{m7}	Zhao e Liu (2017)	(2; 6; 3; 2; 8)	-585,2	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(2; 6; 3; 2; 8)*	-585,2	17160	31,50
F_{m8}	Deep <i>et al.</i> (2009)	(0; 2; 4; 0; 2; 1; 4)	14	-	-
	ACV			25050	-
min	ACVA	(0; 2; 4; 0; 2; 1; 6)*	14	16669	33,46
F_{m9}	Deep <i>et al.</i> (2009)	(0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 0)	-0,9435	-	-
	ACV			25050	-
max*	ACVA	(1; 1; 0; 1; 0; 1; 1; 0)	-0,9532	6624	73,56
F_{m10}	Deep <i>et al.</i> (2009)	-	-1030361	-	-
	ACV			25050	-
max*	ACVA	-	-1307811	1639	93,46

*Problema convertido para minimização.

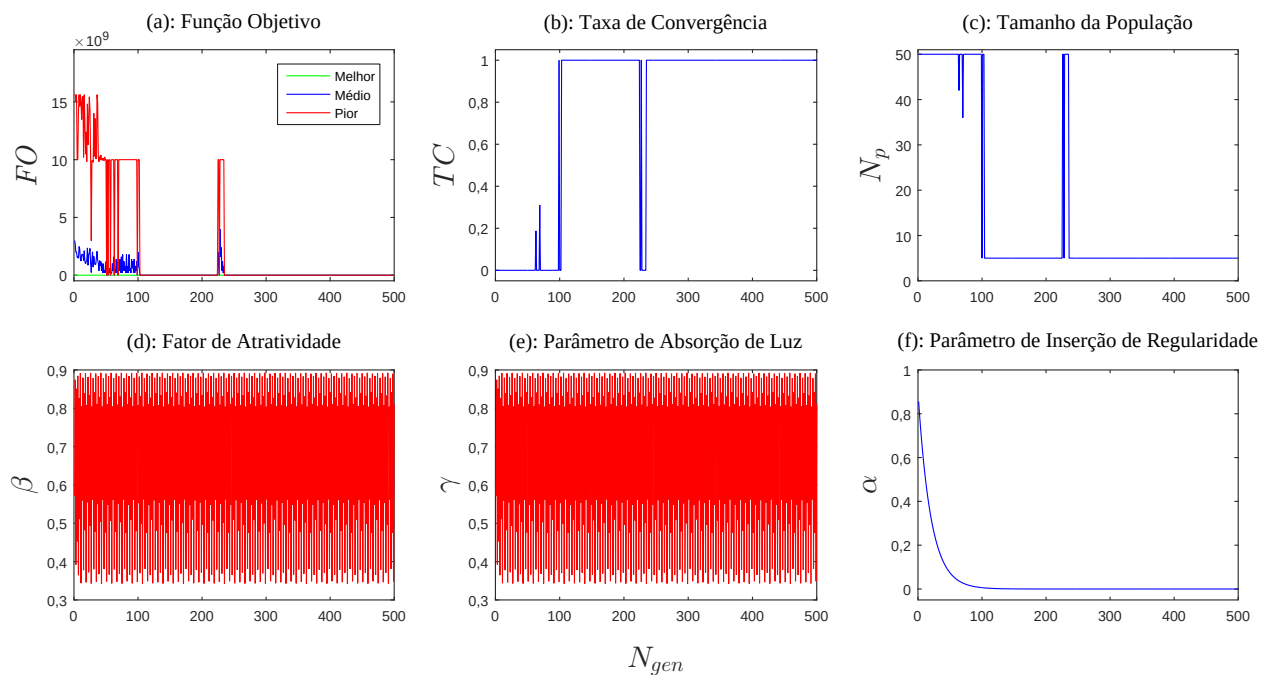
Fonte: o autor.

Para a função F_{m10} , a melhor solução encontrada foi:

$$\begin{pmatrix} 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \end{pmatrix}.$$

De forma geral, observa-se que a metodologia proposta foi capaz de obter boas estimativas para a solução ótima em todos os estudos de caso. Todavia, em média, foi constatada uma redução da ordem de 60,59%, em relação à versão canônica do ACV, sendo que para alguns casos foi possível encontrar uma redução 93,46%. Essa redução só foi possível porque em todos os estudos de caso, a população se tornou homogênea e, consequentemente, o valor da taxa de convergência se aproximou da unidade, fazendo com que fosse atribuído o valor mínimo para o tamanho da população, o que implica na redução do número de chamadas da função objetivo, como observado para a função F_{m1} na Fig. 6.7.

Figura 6.7 – Evolução da Função Objetivo e dos Parâmetros do ACVA para a Função F_{m1} (6.17).



Na Figura 6.7 observa-se a flexibilidade do ACVA no que tange o aumento do número de indivíduos da população, isto é; aproximadamente na geração 230, é gerado um candidato em que o valor da função objetivo é bem diferente do valor médio, o que faz com que a taxa de convergência neste ponto se afaste da unidade, o que leva a um acréscimo do número de indivíduos da população (o valor máximo é alcançado). Todavia, após este desvio, a população volta a se tornar homogênea, fazendo com que o número de indivíduos assuma o seu valor mínimo. Este fato apenas ilustra a capacidade da metodologia proposta em variar o tamanho da população de modo a buscar a melhor solução possível. Além disso, ainda observa-se a evolução de cada um dos parâmetros do ACVA ao longo das gerações. Como em avaliações anteriores, os parâmetros β e γ tem os seus valores entre o domínio de zero à unidade e α tem o seu valor reduzido de 0,9 até 0,05.

Cabe ressaltar que o ACVA conseguiu encontrar 3 configurações de solução distintas para as funções F_{m7} e F_{m8} , das quais a solução com maior frequência foi assumida como solução do problema. Nas Tabelas 6.5 e 6.6 são apresentadas todas as soluções encontradas,

a frequência de ocorrência de cada solução durante todo o experimento (Freq. (%)), bem como o atendimento das restrições.

Tabela 6.5 – Resultados Obtidos para o Problema Misto F_{m7} .

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	FO	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	Freq. (%)
2	6	3	2	8	-585,2	-29	-1050	-102	-792	-90	80
1	7	2	3	7	-580,4	-115	-1051	-237	-790	-280	15
1	7	1	3	7	-571,2	-212	-1079	-253	-865	-865	5

Fonte: o autor.

Tabela 6.6 – Resultados Obtidos para o Problema Misto F_{m8} .

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	FO	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	Freq. (%)
0	2	4	0	2	1	6	14	0	0	-1	-23	-3	-12	-1	45
0	2	4	0	2	1	5	14	0	0	-1	-15	-3	-12	-2	25
0	2	4	0	2	1	4	14	0	0	-1	-7	-3	-12	-3	30

Fonte: o autor.

Na Tabela 6.5 observa-se que o problema possui configurações que levam à ótimos locais, sendo que o ACVA conseguiu, na maioria das vezes, encontrar a melhor solução reportada na literatura. Já para a função F_{m8} todas as configurações levam ao mesmo valor ótimo, o que implica que existe mais de uma configuração que leva ao mesmo ótimo. Enquanto a solução reportada na literatura ocorre com uma frequência de 30% no algoritmo canônico, no ACVA a frequência foi da ordem de 40%, o que, para este estudo de caso, demonstrou a capacidade da metodologia proposta de encontrar o ótimo global em mais execuções do que a sua versão canônica.

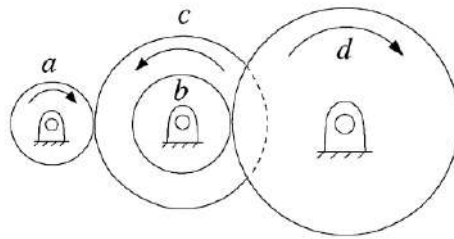
6.4 Projeto de Sistemas de Engenharia com Variáveis Mistas

A presente seção tem por objetivo apresentar estudos de caso em que são consideradas variáveis de projeto mistas, a fim de validar a metodologia proposta nesse trabalho. Cabe ressaltar que, para cada aplicação, o número de indivíduos da população e o número de gerações no ACVA são definidos a partir dos valores que são utilizados na literatura reportado ou após testes preliminares.

6.4.1 Projeto de um Sistema com Engrenagem

O primeiro estudo de caso consiste na determinação da relação ótima de transmissão (para fins de velocidade) de um sistema de engrenagens composto (ver a Fig. 6.8), o qual é constituído por dois pares de engrenagens, $a - c$ e $b - d$.

Figura 6.8 – Projeto de um Sistema com Engrenagens.



Fonte: Adaptado de [Datta e Figueira \(2011\)](#).

Matematicamente, o problema pode ser descrito como ([DATTA; FIGUEIRA, 2011](#)):

$$\min f(x) = \left(\frac{1}{6,931} - \frac{z_a z_b}{z_c z_d} \right)^2, \quad (6.26)$$

em que z_a , z_b , z_c e z_d são os raios das engrenagens, respectivamente, e $RT = \frac{z_a z_b}{z_c z_d}$ é a relação de transmissão.

Para este estudo de caso, as variáveis de projeto (número de dentes das engrenagens) devem ser números inteiros e definidos no intervalo $x = (z_a, z_b, z_c, z_d) \in [12, 13, \dots, 59, 60]$.

A Tabela 6.7 apresenta os resultados obtidos considerando a configuração inicial para o ACVA com $N_p=3000$ e $N_{gen}=100$ e os resultados descritos na literatura considerando outras estratégias de otimização.

Tabela 6.7 – Resultados para o Problema do Projeto de um Sistema de Engrenagem Composto.

	Datta e Figueira (2011)	Kennedy e Eberhart (1995)	ACVA			
$x_1(z_a)$	16	16	19	19	16	16
$x_2(z_b)$	19	19	16	16	19	19
$x_3(z_c)$	43	43	43	49	43	49
$x_4(z_d)$	49	49	49	43	49	43
f	2,7E-12	2,7E-12	2,7E-12	2,7E-12	2,7E-12	2,7E-12
RT	0,144281	0,144281	0,144281	0,144281	0,144281	0,144281
Freq. (%)	–	–	30	6,67	23,33	13,33
$NAFO$	1077	19000	303000			

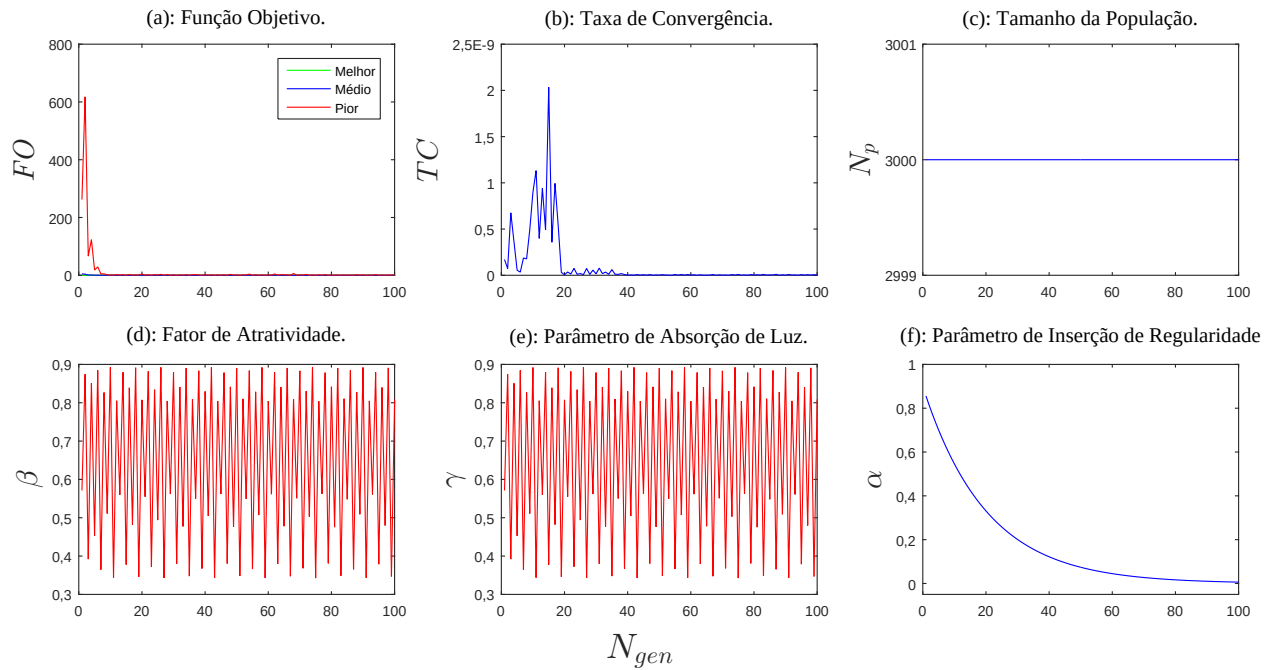
Fonte: o autor.

Observa pela Tabela 6.7 que a metodologia proposta foi capaz de encontrar 4 configurações para o mesmo valor de função objetivo, o que esta em concordância com o reportado por [Datta e Figueira \(2011\)](#). No entanto, diversos estudos reportam o vetor $x^* = (16, 19, 43, 49)$ como sendo a melhor solução para esse estudo de caso ([KENNEDY; EBERHART, 1995](#); [DEB et al., 1995](#); [GUO et al., 2004](#)). O resultado obtido pelo ACVA requereu um número de avaliações da função objetivo bem superiores aos requeridos por outras estratégias

de otimização apresentadas nessa tabela. É importante ressaltar que isto se deve ao elevado número de indivíduos considerados. Para este caso em especial, se forem utilizados outras configurações com menores números de indivíduos na população, também obtêm-se um valor para f próximo a zero, em que são obtidos outras configurações para o vetor de variáveis de projeto, diferentes das apresentadas na Tab. 6.7. Assim, esse estudo de caso não apresenta apenas quatro configurações, mas infinitas configurações que dependem do nível de precisão de f . Em resumo, para que a melhor solução seja obtida, foi necessário usar um número elevado de indivíduos na população no ACVA para que uma boa precisão fosse encontrada. Ainda, ressalta-se que cerca de 26,67% das simulações não foram capazes de atingir o melhor valor da função de 2,7E-12.

A Figura 6.9 apresenta os gráficos referentes a evolução do valor da função objetivo em função do número de gerações, bem como os perfis para a taxa de convergência, o tamanho da população e os parâmetros do ACVA.

Figura 6.9 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema Projeto de um Sistema de Engrenagem Composto.



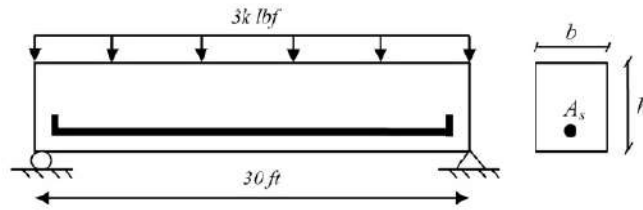
Nas Figuras 6.9(b) e 6.9(c) é possível observar que a população no ACVA não ficou homogênea, o que resultou em uma taxa de convergência próxima a zero, e, consequentemente, num valor máximo para o tamanho da população, resultando em um maior número de chamadas da função objetivo do que as requeridas por outras metodologias. Essa não homogeneidade da população se deve aos valores de N_p e de N_{gen} considerados. Assim, para esse número de gerações, a população não consegue ficar homogênea em torno da melhor solução, o que implica em uma taxa de convergência longe da unidade. Com relação aos parâmetros, o comportamento dos mesmos seguem os modelos caótico e empíricos consi-

derados no desenvolvimento do ACVA.

6.4.2 Projeto de uma Viga de Concreto

Este estudo de caso consiste do projeto de viga de concreto armado, como apresentado na Fig. 6.10. A viga está sujeita a uma carga total de 3000 lbf (sendo que 1000 lbf corresponde ao peso da viga) e apoiada em dois pontos em suas extremidade separadas por um vão com 30 ft.

Figura 6.10 – Projeto de uma Viga de Concreto.



Fonte: Adaptado de Gandomi, Yang e Alavi (2011).

A resistência do concreto à compressão (σ_c) é de 5 ksi e a resistência a tração do aço de reforço (σ_y) é de 50 ksi. Já o custo unitário do concreto e do aço são iguais a 0,02 e 1,0 \$/in²/ft, respectivamente.

Objetiva-se minimizar o custo total da estrutura considerando a área da secção transversal da barra de reforço (A_s), a largura (b) e a profundidade (h) da viga de concreto como variáveis de projeto. Do ponto de vista da segurança do projeto é necessário satisfazer a seguinte norma do código de construção (GANDOMI; YANG; ALAVI, 2011):

$$Mu \equiv 0,9A_s\sigma_y(0,8h) \left(1,0 - 0,59 \frac{A_s\sigma_y}{0,8bh\sigma_c} \right) \geq 1,4M_d + 1,7M_l; \quad (6.27)$$

em que M_u , M_d (1350 kip/in) e M_l (2700 kip/in) representam os momentos de resistência à flexão, carga morta (peso da viga) e carga viva da viga (diferença entre o total e o peso da viga), respectivamente. Ainda admite-se que a relação entre profundidade e largura da viga deve ser menor ou igual a 4.

Matematicamente, o problema pode ser descrito como (GANDOMI; YANG; ALAVI, 2011):

$$\min \quad f(A_s, b, h) = 29,4A_s + 0,6bh; \quad (6.28)$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv \frac{b}{h} - 4 \leq 0; \\ g_2 &\equiv 180 + 7,375 \frac{A_s^2}{h} - A_sb \leq 0; \end{aligned} \quad (6.29)$$

em que o vetor de variáveis é dado por $x = [A_s, b, h]$, sendo x_1 uma variável discreta que é definida pelo conjunto apresentado na Tab. 6.8, x_2 é uma variável inteira pertencente ao intervalo [28; 29; ... 39; 40] e x_3 é uma variável contínua no intervalo [5; 10].

Tabela 6.8 – Conjunto Discreto que Define a variável x_1 .

Modelo	A_s (in ²)	Modelo	A_s (in ²)	Modelo	A_s (in ²)	Modelo	A_s (in ²)
1#4	0,2	6#5	1,86	9#6	3,95	9#8	7,11
1#5	0,31	10#4, 2#9	2	4#9	3,96	12#7	7,2
2#4	0,4	7#5	2,17	13#5	4	13#7	7,8
1#6	0,44	11#4, 5#6	2,2	7#7	4,03	10#8	7,9
3#4, 1#7	0,6	3#8	2,37	14#5	4,2	8#9	8
2#5	0,62	12#4, 4#7	2,4	10#6	4,34	14#7	8,4
1#8	0,79	8#5	2,48	15#5	4,4	11#8	8,69
4#4	0,8	13#4	2,6	6#8	4,65	15#7	9
2#6	0,88	6#6	2,64	8#7	4,74	12#8	9,48
3#5	0,93	9#5	2,79	11#6	4,8	13#8	10,27
5#4, 1#9	1	14#4	2,8	5#9	4,84	11#9	11
6#4, 2#7	1,2	15#4, 5#7, 3#9	3	12#6	5	14#8	11,06
4#5	1,24	7#6	3,08	9#7	5,28	15#8	11,85
3#6	1,32	10#5	3,10	7#8	5,4	12#9	12
7#4	1,4	4#8	3,16	13#8	5,53	13#9	13
5#5	1,55	11#5	3,41	10#7, 6#9	5,72	14#9	14
2#8	1,58	8#6	3,52	14#6	6	15#9	15
8#4	1,6	6#7	3,6	8#8	6,16		
4#6	1,76	12#5	3,72	15#6, 11#7	6,32		
9#4, 3#7	1,8	5#8	6	7#9	6,6		

Fonte: Gandomi, Yang e Alavi (2011).

A Tabela 6.9 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do AVCA ($N_p = 50$ e $N_{gen} = 300$) e os obtidos considerando outras estratégias de otimização.

Tabela 6.9 – Resultados Obtidos para o Problema do Projeto de uma Viga de Concreto.

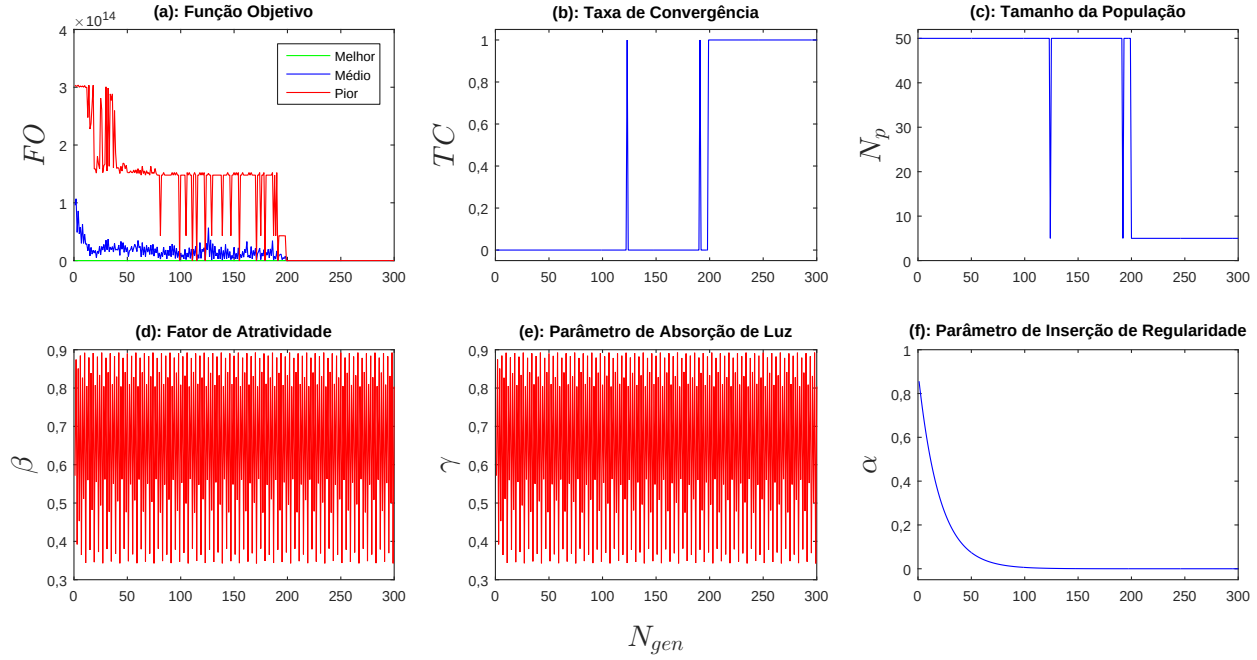
	Shih e Yang (2002)	Gandomi, Yang e Alavi (2011)	Gandomi, Yang e Alavi (2013)	ACVA
$x_1(A_s)$	6,32	6,32	6,32	6,32
$x_2(b)$	34	34	34	34
$x_3(h)$	8,6372	8,5	8,5000	8,5000
g_1	-0,0635	0	0	0
g_2	-0,7745	-0,2241	-22,41	-0,2241
f	362,0065	359,208	359,2080	359,2080
NAFO	–	25000	–	10062

Fonte: o autor.

Observa-se, na Tabela 6.9 que o ACVA foi capaz de obter o melhor resultado reportado pela literatura, todavia com uma redução da ordem de 59,75% em termos do número de chamadas da função objetivo.

Na Figura 6.11 são apresentadas a variação do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA em relação ao número de gerações.

Figura 6.11 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Viga de Concreto.



Percebe-se pela Fig. 6.11(a) que a população, até a geração de número 200 (aproximadamente), não é homogênea, o que implica em flutuações no valor da taxa de convergência e, por consequência, no tamanho da população. Após a 200^a geração a população se torna homogênea e o tamanho da população assume o seu valor mínimo (5 indivíduos). Ressalta-se que, mesmo com essa flutuação no número de indivíduos da população o que interfere no número total de chamadas da função objetivo, o valor final de avaliações requeridas pelo ACVA é menor que de a reportada por [Gandomi, Yang e Alavi \(2011\)](#), sendo neste caso observado uma redução da ordem de 59,75%. Como mencionado nos estudos de caso anteriores, observa-se os mesmos comportamentos para os parâmetros β , γ e α .

6.4.3 Projeto de um Vaso de Pressão

Considere o problema do projeto de um vaso de pressão conforme a Fig. 6.3 ([COELLO, 2000](#); [DEB, 1997](#)). Como apresentado anteriormente, o problema consiste na minimização do custo associado ao projeto de um tanque de armazenamento de ar comprimido, em que considera-se um vaso de pressão cilíndrico limitado em suas ambas extremidades por tampas hemisféricas. O modelo matemático que define esta aplicação é novamente apresentado:

$$\min f = 0,6224T_sRL + 1,7781T_hR^2 + 3,1661T_s^2L + 19,84T_s^2R; \quad (6.30)$$

sujeito à restrições geométricas, limites das variáveis de projeto e de volume:

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &\equiv 0,0193R - T_s \leq 0; \\
 g_2(x) &\equiv 0,00954R - T_h \leq 0; \\
 g_3(x) &\equiv 1296000 - \pi R^2 L - \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 0; \\
 g_4(x) &\equiv L - 240 \leq 0; \\
 20 &\leq L \leq 240; \\
 37,7 &\leq R \leq 63; \\
 0,6875 &\leq T_s \leq 1,25; \\
 0,3125 &\leq T_h \leq 0,625.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

em que as variáveis $x = (L, R, T_s, T_h)$ representam o comprimento da secção cilíndrica, o raio da casca, a espessura da casca e a espessura da tampa, respectivamente. Neste caso em especial, as variáveis T_s e T_h representam espessuras de chapas de aço laminadas que estão sujeitas a valores (tamanhos) disponíveis no mercado, sendo assim variáveis discretas (múltiplas de 0,0625 in).

A Tabela 6.10 apresenta os resultados obtidos considerando o algoritmo ACVA ($N_p=50$ e $N_{gen}=500$) e alguns resultados descritos na literatura.

Tabela 6.10 – Resultados Obtidos para o Problema do um Projeto de Vaso de Pressão com Variáveis Mistas.

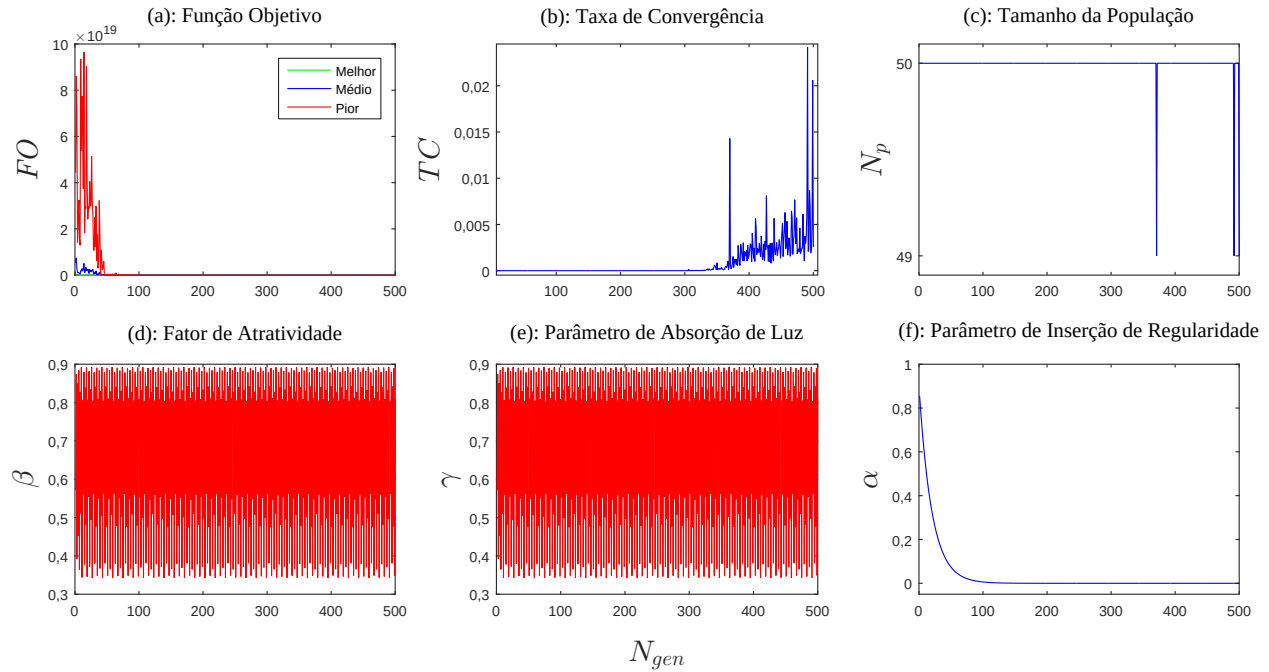
	Datta e Figueira (2011)	Baykasoglu e Ozsoydan (2015)	Kennedy e Eberhart (1995)	Gandomi, Yang e Alavi (2011)	ACVA
x_1	221,3655	176,6365	184,6641	221,3654	214,6312
x_2	38,8600	42,0984	41,7165	38,8601	39,3049
x_3	0,7500	0,8125	0,8125	0,75	0,7500
x_4	0,3750	0,4375	0,4375	0,375	0,3750
g_1	-0,0000	-0,0126	-0,0073	-0,0000	-0,0032
g_2	-0,0042	-0,0358	-0,0395	-0,0043	-0,3750
g_3	-0,0001	-0,27134	-17692,83	-0,0134	-37,4749
g_4	-18,6344	-63,3634	-55,3359	-18,6345	-25,3687
f	5850,3837	6059,7142	6181,81	5850,3830	5788,9519
$NAFO$	82623	50000	3815800	25000	50100

Fonte: o autor.

Na Tab. 6.10 observa-se que o valor obtido pelo algoritmo ACVA foi superior aos reportados por outros autores, sendo que o número de avaliações da função objetivo foram inferiores aos requeridos por Datta e Figueira (2011) e por Kennedy e Eberhart (1995) (com redução de 39,37 % e 98,67 %, respectivamente), praticamente iguais aos requeridos por Baykasoglu e Ozsoydan (2015) e superiores aos requeridos por Gandomi, Yang e Alavi (2011).

A Figura 6.12 apresenta o comportamento da evolução do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA para o problema em análise.

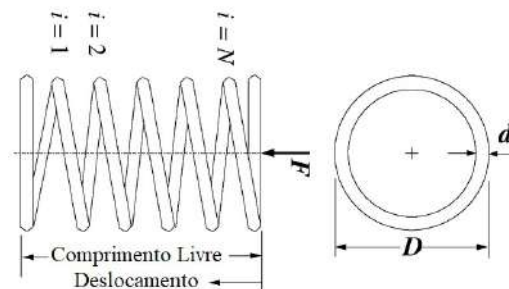
Figura 6.12 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de um Vaso de Pressão com Variáveis Mistas.



Em relação ao valor da função objetivo, apesar de aparentar atingir a homogeneidade, observa-se pelo valor da taxa de convergência que a diferença entre o melhor e o pior valor ainda é significativa, o que implica no número de indivíduos máximo (50 indivíduos), resultando em um número maior de avaliações da função objetivo do que o reportado por [Gandomi, Yang e Alavi \(2011\)](#). Em resumo, para esta execução do algoritmo, não foi possível reduzir o número total de chamadas da função objetivo, em relação à todas as referências.

6.4.4 Projeto de uma Mola sob Tração/Compressão

Figura 6.13 – Projeto de uma Mola sob Tração.



Fonte: Adaptado de [Datta e Figueira \(2011\)](#).

O objetivo desse problema é minimizar o peso de uma mola helicoidal que suporta uma carga compressiva axial constante conforme a Fig.6.13, sendo sujeita à restrições de deflexão mínima, de tensão de cisalhamento, de frequência de vibração e de limites no diâmetro externo (DATTA; FIGUEIRA, 2011).

O modelo matemático que expressa esse problema é dado por (DATTA; FIGUEIRA, 2011):

$$\min f(x) = \frac{1}{4}\pi^2(x_2 + 2)x_1x_3^2; \quad (6.32)$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv \frac{8cKF_{max}}{\pi x_3^2} - S \leq 0; \\ g_2(x) &\equiv l - l_{max} \leq 0; \\ g_3(x) &\equiv d_{min} - d \leq 0; \\ g_4(x) &\equiv (D + d) - D_{max} \leq 0; \\ g_5(x) &\equiv 3,0 - c \leq 0; \\ g_6(x) &\equiv \delta_p - \delta_{pm} \leq 0; \\ g_7(x) &\equiv \delta_p + \frac{F_{max} - F_p}{k} + 1,05(N + 2)d - l \leq 0; \\ g_8(x) &\equiv \delta_w - \frac{F_{max} - F_p}{k} \leq 0; \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde:

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{D}{d}; \\ K &\equiv \frac{4c - 1}{4c - 4} + \frac{0,615}{c}; \\ k &\equiv \frac{Gd}{8Nc^3}; \\ \delta_p &\equiv \frac{F_p}{k}; \\ l &\equiv \frac{F_{max}}{k} + 1,05(N + 2)d. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Neste modelo, as variáveis de projeto são: o diâmetro externo da mola ($x_1 = D$), o número de espirais da mola ($x_2 = N$) e o diâmetro do fio da mola ($x_3 = d$), sendo estas variáveis do tipo real, inteira e discreta, respectivamente. Na Tabela 6.11 são apresentados os valores disponíveis para o diâmetro do fio.

Para resolver tal problema, considera-se os seguintes parâmetros (DATTA; FIGUEIRA, 2011): carga máxima de trabalho (F_{max})=1000 lb; tensão de cisalhamento máxima (S)=189000,0 psi; comprimento livre máximo (l_{max})=14,0 in; diâmetro mínimo do fio (d_{min})=0,2 in; diâmetro externo máximo (D_{max})=3 in; força de compressão pré-carga (F_p)=300 lb; deflexão máxima sob pré-carga (δ_{pm})=6 in; deflexão da posição de carga (δ_w)=1,25 in e módulo de cisalhamento do material (G)= 11,5E⁻⁶ psi.

A Tabela 6.12 apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo ACVA e por outras estratégias de otimização.

Tabela 6.11 – Diâmetros Disponíveis para o Fio da Mola.

Diâmetro de fio (in.)						
0,0090	0,0095	0,0104	0,0118	0,0128	0,0132	0,0140
0,0150	0,0162	0,0173	0,0180	0,0200	0,0230	0,0250
0,0280	0,0320	0,0350	0,0410	0,0470	0,0540	0,0630
0,0720	0,0800	0,0920	0,1050	0,1200	0,1350	0,1480
0,1620	0,1770	0,1920	0,2070	0,2250	0,2440	0,2630
0,2830	0,3070	0,3070	0,3620	0,3940	0,4375	0,5000

Fonte: [Datta e Figueira \(2011\)](#).

Tabela 6.12 – Resultados Obtidos para o Problema do Projeto de uma Mola sob Tração/Compressão.

	Datta e Figueira (2011)	Kennedy e Eberhart (1995)	ACVA
x_1	1,223041	1,223047	1,223041
x_2	9	9	9
x_3	0,283	0,283	0,2830
f	2,658559	2,658573	2,658555
$g_1(x)$	-1008.8059	-1008,1457	-1008,6526
$g_2(x)$	-8,945608	-8,945635	-8,945636
$g_3(x)$	-0,083000	-0,083000	-0,083000
$g_4(x)$	-1,493953	-1,493959	-1,493959
$g_5(x)$	-1,321722	-1,321700	-1,321700
$g_6(x)$	-5,464277	-5,464286	-5,464286
$g_7(x)$	0,000000	0,000000	0,000000
$g_8(x)$	-0,000019	- 0,000010	3,54E-11
NAFO	51696	650600	19257

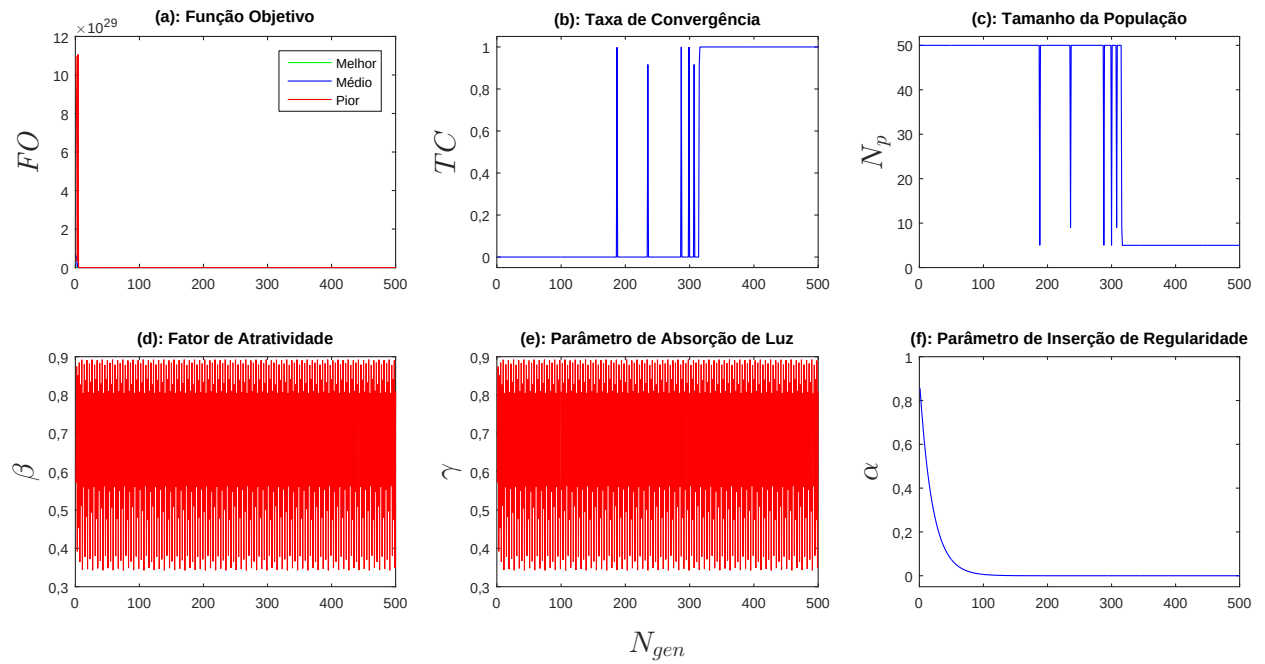
Fonte: o autor.

Os resultados apresentados (Tab. 6.12) demonstram que o ACVA foi capaz de obter a melhor solução reportada por [Datta e Figueira \(2011\)](#) e por [Kennedy e Eberhart \(1995\)](#). Todavia, esse resultado foi obtido às custas de um menor número de avaliações da função objetivo, a saber, obteve-se uma redução da ordem de 62,74 % e 97,04 %, respectivamente.

Na Figura 6.14 são apresentados o comportamento da evolução do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA para o problema em análise.

Na Figura 6.14(a) é possível observar que o método, rapidamente, tende a uma região ótima. Todavia, a taxa de convergência e o tamanho da população, apresentados nas Fig. 6.14(b) e 6.14(c), variam entre seus limites mínimos e máximos até a 320^a geração devido à flutuação dos valores da função objetivo dos indivíduos. A partir da 320^a geração, a população se torna homogênea e o tamanho da população assume o seu valor mínimo. Já nas Figuras 6.14(d), 6.14(e) e 6.14(f) são apresentados os comportamentos dos parâmetros β , γ e α em função do número de gerações, respectivamente.

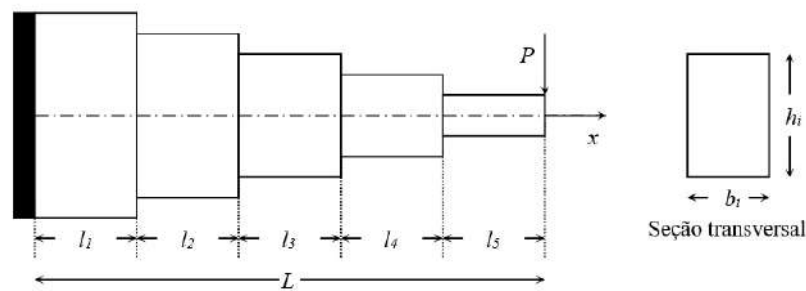
Figura 6.14 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Mola sob Tração/Compressão.



6.4.5 Projeto de uma Viga Engastada

O último estudo de caso consiste em minimizar o volume de uma viga engastada (ver a Fig. 6.15) em que deseja-se determinar as variáveis geométricas que caracterizam a viga, a saber, a espessura (b_i) e a altura (h_i) de cada um de seus $N(N = 5)$ segmentos.

Figura 6.15 – Projeto de uma Viga Engastada.



Fonte: Adaptado de Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007).

No final do lado direito de cada segmento i ocorre a deflexão y_i , que é dada pela seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \dot{y}_0 = 0; \\
 \dot{y}_i &= \frac{Pl_i}{EI_i} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + \dot{y}_{i-1}; \\
 y_i &= \frac{Pl_i^2}{2EI_i} \left[L + \frac{2l_i}{3} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + \dot{y}_{i-1}l_i + y_{i-1};
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

onde $\dot{y}_i$ é a derivada de y com relação a inclinação x e l_i é o comprimento do segmento i . Considera-se que o módulo de Young E é o mesmo para todos os segmentos e que o momento de inércia para o segmento i é dado por I_i , enquanto a tensão máxima permitida para essa estrutura é representada por σ_i :

$$I_i = \frac{b_i h_i^3}{12};$$

$$\sigma_i = \frac{h_i}{2l_i} \left[P \left[L + l_i - \sum_{j=1}^i l_j \right] \right]. \quad (6.36)$$

Matematicamente, o problema de otimização pode ser escrito como (LOBATO; STEFFEN; OLIVEIRA-LOPES, 2007):

$$\min \quad V = \sum_{i=1}^N b_i h_i l_i; \quad (6.37)$$

sujeito à:

$$g_1(x) \equiv \frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} - 1 \leq 0; \quad (6.38a)$$

$$g_2(x) \equiv h_i - 20b_i \leq 0; \quad (6.38b)$$

$$g_3(x) \equiv \frac{yN}{y_{max}} - 1 \leq 0; \quad (6.38c)$$

$$g_4(x) \equiv 1 - b_i \leq 0; \quad (6.38d)$$

$$g_5(x) \equiv 5 - h_i \leq 0; \quad (6.38e)$$

em que i varia de 1 à N segmentos. Assim o problema tem $N+1$ restrições não lineares, N restrições lineares e $2N$ restrições laterais dadas pelas Eqs.(6.38). Também são considerados os seguintes parâmetros (LOBATO; STEFFEN; OLIVEIRA-LOPES, 2007): a tensão máxima (σ_{max}) é igual a 14000 N/cm^2 , o deslocamento máximo permitido (y_{max}) é igual a $2,5 \text{ cm}$, o módulo de Young E é $2,0 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, a carga (P) é igual a 50000 N e o comprimento (L)= 500 cm ($l_i=L/N$) (em que $N=5$).

Como o problema original apresenta apenas variáveis reais, para fins de aplicação da metodologia proposta, o mesmo foi adaptado para o contexto discreto, isto é; as variáveis passam a pertencer ao seguinte domínio: x_1, x_4 e $x_5 \in \{1; 2; 3; 4\}$, x_2 e $x_3 \in \{2,4; 2,6; 2,8; 3,1\}$, x_6 e $x_7 \in \{45; 50; 55; 60\}$, e x_8, x_9 e $x_{10} \in \{30; 31; 32; \dots 65\}$.

Na Tabela 6.13 são apresentados os resultados obtidos por Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007) considerando variáveis reais e os resultados obtidos pelo ACVA considerando variáveis discretas.

Apesar dos resultados apresentados pertencerem a domínios de busca distintos, quando considera-se o contexto discreto, percebe-se que esses são coerentes com os reportados por Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007) considerando o domínio real e o Algoritmo de Evolução Diferencial associado a um modelo caótico de busca. Como esperado, por se tratar de um domínio de busca restrito, o discreto resulta em um valor de função objetivo maior

Tabela 6.13 – Resultados Obtidos para o Projeto de uma Viga Engastada.

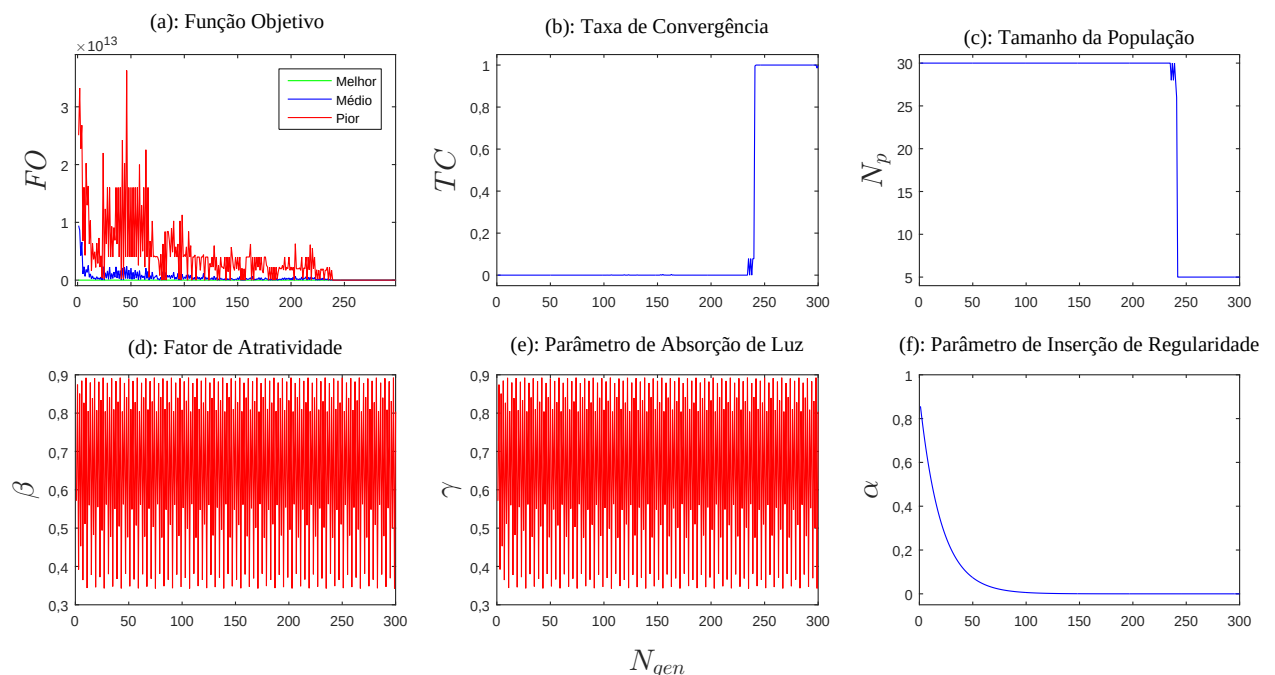
	Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007)	ACVA		Lobato, Steffen e Oliveira-Lopes (2007)	ACVA
$f(x)$	65440,7846	69020	$g_1(x)$	-0,122247	-0,00794
Espessuras			$g_2(x)$	-0,112695	-0,23195
x_1	3,12690	3	$g_3(x)$	-0,065221	-0,08560
x_2	2,89051	3,10000	$g_4(x)$	-0,002524	-0,15017
x_3	2,58109	2,60000	$g_5(x)$	-0,002412	-0,01614
x_4	2,20694	3	$g_6(x)$	-0,058505	0,00000
x_5	1,75121	2	$g_7(x)$	-0,000325	-2,00000
Larguras			$g_8(x)$	-0,003701	0,00000
x_6	62,47958	60	$g_9(x)$	-0,015669	-19,00000
x_7	57,80994	60	$g_{10}(x)$	-0,001351	-7,00000
x_8	51,61803	52	$g_{11}(x)$	-0,000083	-0,00347
x_9	44,12305	41			
x_{10}	35,02287	33			
NAFO	9030	8224			

Fonte: o autor.

do que o encontrado considerando o domínio real. Em termos do número de avaliações da função objetivo, não foi observado uma diferença significativa entre as duas abordagens.

Nas Figura 6.16 são apresentados o comportamento da evolução do valor da função objetivo, da taxa de convergência, do tamanho da população e dos parâmetros do ACVA para o problema em análise.

Figura 6.16 – Evolução dos Parâmetros do ACVA para o Problema do Projeto de uma Viga Engastada.



Na Fig. 6.16(a) é possível observar que a até a 250^a geração (aproximadamente), o valor médio da função objetivo flutua o que implica que a taxa de convergência é próxima a zero, resultando num valor máximo para o tamanho da população (30). Após a 250^a geração (aproximadamente), a população se torna homogênea e a população tende ao seu valor mínimo (5), visto que a taxa de convergência tende a unidade. Os comportamentos observados para os parâmetros β , γ e α em função do número de gerações, são coerentes com os obtidos para outros estudos de caso.

6.5 Conclusões Preliminares

Neste capítulo, o Algoritmo de Colônia de Vagalumes Auto-Adaptativo (ACVA) foi aplicado em uma série estudos de caso, a saber, funções matemáticas e no projeto de sistemas de engenharia em que são consideradas problemas com variáveis reais e problemas com variáveis mistas.

Para os problemas modelados com variáveis reais, o ACVA sempre foi capaz de encontrar a solução ótima reportada na literatura, e com um menor número de avaliações da função objetivo em relação à outras estratégias de otimização. Um resumo da capacidade do método no que diz respeito a capacidade de encontrar a solução, reduzir o gasto computacional e atingir a taxa de convergência, nos estudos de casos de problemas de engenharia com variáveis reais é apresentado pela Tab. 6.14.

Tabela 6.14 – Desempenho do ACVA nos Problemas de Engenharia com Variáveis Reais.

Problema	Restrições	Capacidade		
		<i>Solução (FO)</i>	<i>NAFO</i>	<i>Convergência (TC)</i>
Recipiente de Pressão				
Problema restrito	4	Reduz	Menor	Sim
Viga Engastada				
Problema restrito	7	Maior	Menor	Não

Os dois problemas estudados são restritos como descrito na Tabela 6.14, o método proposto foi capaz de reduzir o gasto computacional no tratamento de ambos problemas, considerando o comparativo da literatura (apresentado na Seção 6.2), bem como o valor que seria gasto ao não tomar uma população adaptativa. Para o primeiro caso, o estudo de recipiente de pressão, a redução do número de avaliações da função é consequência da obtenção da taxa de convergência que representa a homogeneidade da população que passa a ser reduzida. Já para o segundo caso, o problema da viga engastada, não foi possível obter uma população homogênea, logo a convergência não ocorre. No entanto a redução do gasto computacional implica que o segundo critério de convergência, baseado no erro, foi atingindo. O que ainda pode implicar no resultado do estudo apresentar uma solução (FO) de maior valor do que a relatada na literatura, mesmo sendo ainda uma solução viável. Logo

existe a possibilidade de aumentar a tolerância do erro (que consiste na diferença absoluta entre o *melhor* e o *pior* valor da função) afim de aumentar as iterações e obter a convergência, e em consequência permitir um melhor refinamento da solução.

Em relação aos estudos de caso com variáveis mistas, o ACVA também foi capaz de encontrar uma boa estimativa para a solução ótima. Todavia, em apenas duas aplicações, o número de avaliações requeridas pela metodologia proposta foi superior as requeridas por outras abordagens. A Tabela 6.15 apresenta de forma geral os resultados da capacidade de desempenho do ACVA nos problemas de engenharia mistos estudados na secção 6.4.

Tabela 6.15 – Desempenho do ACVA nos Estudos de Caso de Sistemas de Engenharia com Variáveis Mistas.

Problema	Capacidade		
	<i>Solução (FO)</i>	<i>NAFO</i>	<i>Convergência (TC)</i>
Sistema de Engrenagem Problema inteiro - sem restrição	Igual*	Maior	Não
Viga de Concreto Problema inteiro-discreto-contínuo	Igual	Menor	Sim
Vaso de Pressão Problema contínuo-discreto	Reduz	Maior	Não
Mola sob Tração/Compressão Problema inteiro-discreto-contínuo	Igual	Menor	Sim
Viga Engastada Problema inteiro-discreto	Maior**	Menor	Sim

*Nem todas as simulações encontraram a solução. **Domínio de busca restrito.

Para os cinco estudos realizados o ACVA conseguiu reduzir ou manter o valor ótimo descrito pela literatura, exceto para o problema da viga engastada que foi tratado em contexto misto e comparado com os resultados obtidos em contexto contínuo. Todavia, o resultado se mostra viável dentro de suas especificações restritas, apresentando convergência da população e, conseqüentemente, redução no custo computacional. Tal comportamento também pode ser observado para os problemas de viga de concreto e mola sob tração/compressão. O que não acontece para os problemas de sistema de engrenagens e do vaso de pressão, onde tais resultados ainda podem ter sofrido a influência das metodologias utilizadas para análises de seus estudos, como para o primeiro problema, onde foi assumido um valor alto de indivíduos para garantir a frequência de experimentos de sucesso na obtenção do ótimo, como também o nível de precisão assumido para o valor da função objetivo (próximo a zero). Enquanto para o vaso de pressão, apesar de não convergir o ACVA conseguiu reduzir o valor ótimo apresentado na literatura (os comparativos numéricos foram apresentados na Seção 6.4), e o custo computacional foi maior somente em 1/4 das comparações realizadas.

Assim, em linhas gerais, considera-se que os resultados obtidos pelo ACVA, em termos de convergência e do número de chamadas da função objetivo, são coerentes com os

reportados na literatura, o que demonstra a qualidade do algoritmo proposto.

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de uma nova estratégia de otimização proposta para resolver problemas com variáveis mistas (reais, inteiras, discretas e binárias). Tal abordagem, denominada de Algoritmo de Colônia de Vagalumes Auto-Adaptativo (ACVA), consiste na associação do Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV) canônico a quatro novos operadores, descritos a seguir:

- um baseado no conceito de taxa de convergência para atualização dinâmica do tamanho da população. Que se baseia em uma característica observada nos algoritmos baseados em população, a saber, o fato da população tender a se tornar homogênea quando o número de gerações tende ao infinito. Assim foi possível desenvolver uma estratégia para a redução ou aumento do tamanho da população na medida em que essa se torna homogênea. Para tanta, considerou-se a definição de taxa de convergência para métodos de otimização baseados em população. Com a inserção do operador proposto foi possível, a priori, reduzir o número total de avaliações da função objetivo;
- uma fundamentada em um modelo caótico de busca para a atualização do fator de atratividade e do parâmetro de absorção da luz pelo meio no ACV, esse operador consiste em atualizar os parâmetros dinamicamente durante o processo evolutivo via aplicação de um modelo caótico de busca. De forma geral, foi observado que, para a grande maioria das aplicações, essa variação introduziu diversidade ao processo, visto que boas estimativas para a solução ótima global sempre foram obtidas. Cabe ressaltar que outros modelos caóticos podem ser empregados, todavia isso não foi objeto de estudo nesse trabalho;
- uma relação empírica para a atualização do parâmetro de inserção de regularidade em que no início do processo evolutivo este parâmetro assume um valor próximo da unidade e no final esta assume um valor próximo a zero. Essa relação foi baseada no trabalho de [Yang \(2008\)](#), o qual realiza uma análise sobre a influência deste parâmetro na qualidade da solução obtida;

- um para o tratamento de variáveis mistas, visto que os métodos de otimização baseados em população são, naturalmente, desenvolvidos para lidar apenas com variáveis contínuas. Esse operador consiste em transformar o domínio de cada uma das variáveis não-reais, isto é; binárias, inteiras e discretas, em variáveis reais. Desta forma, a estrutura original do ACV é preservada, sendo esta a sua principal vantagem. Assim, ressalta-se que esta pode ser facilmente incorporada a outros algoritmos de otimização sem nenhum tipo de prejuízo para a estrutura dos mesmos.

O algoritmo proposto foi aplicado em problemas puramente matemáticos e no projeto de sistemas de engenharia que apresentavam variáveis reais ou mistas. Em linhas gerais, para os problemas modelados com variáveis reais, o ACVA sempre foi capaz de encontrar a solução ótima global. Além disso, em todos os casos com um menor número de avaliações da função objetivo em relação às outras estratégias de otimização. Para os problemas modelados por variáveis mistas, o ACVA foi capaz de encontrar uma boa estimativa para a solução ótima. Entretanto, em apenas duas aplicações, o número de avaliações requeridas pelo ACVA foi superior às requeridas por outras abordagens. Apesar destes dois resultados, considera-se que os resultados obtidos pelo ACVA, em termos de convergência e do número de chamadas da função objetivo, são coerentes com os reportados na literatura. Isto demonstra que o ACVA tem potencial para a inserção de novos operadores, bem como para a sua aplicação em estudos de caso de maior complexidade.

Finalmente, ressalta-se que o desenvolvimento do ACVA justifica-se: *i)* pela simples dificuldade em se definir valores para os parâmetros no ACV canônico que sejam capazes de lidar com todo o tipo de estudo de caso; *ii)* pelo fato de que na natureza o tamanho da população nas espécies é variável (assim, não existe razão para o desenvolvimento de estratégias onde a população é variável); *iii)* pela capacidade de, a priori, poderem ser gerados candidatos que apresentam maior diversidade, visto que sempre foi possível obter uma boa estimativa para a solução do problema em análise; *iv)* pela quantidade de estratégias que sejam capazes de lidar diretamente com problemas que apresentam variáveis mistas; e *v)* pelo fato de que o futuro dos métodos de otimização baseados em população é o desenvolvimento de metodologias com parâmetros auto-adaptativos.

Como sugestões para trabalhos futuros pretende-se desenvolver uma versão do algoritmo proposto para o contexto multi-objetivo, bem como avaliar a sua aplicabilidade em estudos de caso reais em engenharia e áreas afins.

REFERÊNCIAS

ADJIMAN, C. *et al.* A global optimization method, α BB, for general twice-differentiable constrained NLPs — I. Theoretical advances. *Computers Chemical Engineering*, v. 22, n. 9, p. 1137–1158, 1998. Citado na página 61.

ALATAS, B.; AKIN, E.; OZER, A. B. Chaos embedded particle swarm optimization algorithms. *Chaos, Solutions and Fractals*, v. 2, n. 1, p. 1–10, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 58.

ALI, M.; TORN, A. Population set-based global optimization algorithms: some modifications and numerical studies. *Computers & Operations Research*, v. 31, n. 10, p. 1703 – 1725, 2004. Citado na página 61.

ALOISE, D. *et al.* Heurísticas de colônia de formigas com path-relinking para o problema de otimização da alocação de sondas de produção terrestre - SPT. XXXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, p. 488 – 499, Nov 2002. Citado na página 31.

BABU, T. S. *et al.* Particle swarm optimization based solar pv array reconfiguration of the maximum power extraction under partial shading conditions. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, v. 9, n. 1, p. 74–85, Jan 2018. ISSN 1949-3029. Citado na página 30.

BAYKASOGLU, A.; OZSOYDAN, F. B. Adaptive firefly algorithm with chaos for mechanical design optimization problems. *Applied Soft Computing*, v. 36, n. Supplement C, p. 152 – 164, 2015. ISSN 1568-4946. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494615004482>>. Citado 6 vezes nas páginas 21, 32, 38, 42, 58 e 83.

BAYKASOĞLU, A.; OZSOYDAN, F. B. An improved firefly algorithm for solving dynamic multi-dimensional knapsack problems. *Expert Systems with Applications*, v. 41, n. 8, p. 3712 – 3725, 2014. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417413009603>>. Citado na página 42.

BEQUETTE, B. W. *Process Dynamics: Modeling, Analysis and Simulation*. New Jersey: Prentice Hall, 1998. ISBN 0132068893. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 66.

BI, W.; DANDY, G.; MAIER, H. Improved genetic algorithm optimization of water distribution system design by incorporating domain knowledge. *Environmental Modelling & Software*, v. 69, p. 370 – 381, 2015. ISSN 1364-8152. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364815214002631>>. Citado na página 29.

BRONDANI, M. de F. *Modelagem Matemática do Tempo de Vida de Baterias de Lítio Íon Polímero utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Unijuí, Ijuí, RS, 2015. Disponível em: <<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/2781>>. Citado na página 29.

BUI, D. T. *et al.* A hybrid artificial intelligence approach using gis-based neural-fuzzy inference system and particle swarm optimization for forest fire susceptibility modeling at a tropical area. *Agricultural and Forest Meteorology*, v. 233, p. 32 – 44, 2017. ISSN 0168-1923. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168192316304269>>. Citado na página 30.

CAO, Y. J.; WU, Q. H. Evolutionary programming. In: *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC '97)*. Indianapolis, USA: IEEE, 1997. p. 443–446. Citado na página 34.

CHAVES, E. N. *et al.* Simulated annealing - MPPT in partially shaded PV systems. *IEEE Latin America Transactions*, v. 14, n. 1, p. 235–241, Jan 2016. ISSN 1548-0992. Citado na página 31.

CHEN, S.; WU, Y.; LUK, B. L. Combined genetic algorithm optimization and regularized orthogonal least squares learning for radial basis function networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 10, n. 5, p. 1239–1243, Sep 1999. ISSN 1045-9227. Citado na página 29.

CHIN, V. J.; SALAM, Z.; ISHAQUE, K. An accurate modelling of the two-diode model of pv module using a hybrid solution based on differential evolution. *Energy Conversion and Management*, v. 124, p. 42 – 50, 2016. ISSN 0196-8904. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890416305659>>. Citado na página 30.

COELHO, L. dos S.; BERNERT, D. L. de A.; MARIANI, V. C. A chaotic firefly algorithm applied to reliability-redundancy optimization. *2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)*, p. 517–521, June 2011. ISSN 1089-778X. Citado 4 vezes nas páginas 32, 38, 42 e 58.

COELHO, L. S.; MARIANI, V. C. Combining of chaotic differential evolution and quadratic programming for economic dispatch optimization with valve-point effect. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 2, p. 989–996, 2006. Citado na página 32.

_____. Use of chaotic sequence in a biologically inspired algorithm for engineering design optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 2, n. 1, p. 22–32, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 58.

_____. Improved firefly algorithm approach applied to chiller loading for energy conservation. *Energy and Buildings*, v. 59, p. 273–278, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 38.

COELLO, C. A. C. Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems. *Computers in Industry*, v. 41, n. 2, p. 113 – 127, 2000. ISSN 0166-3615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166361599000469>>. Citado 5 vezes nas páginas 67, 68, 69, 70 e 82.

COELLO, C. A. C.; BECERRA, R. L. Efficient evolutionary optimization through the use of a cultural algorithm. v. 36, p. 219–236, 04 2004. Citado na página 45.

CSENDES, T.; RATZ, D. Subdivision direction selection in interval methods for global optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 34, n. 3, p. 922–938, 1997. Citado na página 61.

DAS, T. K.; VENAYAGAMOORTHY, G. K. Bio-inspired algorithms for the design of multiple optimal power system stabilizers: SPPSO and BFA. *Conference Record of the 2006, IEEE Industry Applications Conference, Forty-First IAS Annual Meeting*, v. 2, p. 635–641, Oct 2006. Citado na página 38.

DATTA, D.; FIGUEIRA, J. R. A real-integer-discrete-coded particle swarm optimization for design problems. *Applied Soft Computing*, v. 11, n. 4, p. 3625 – 3633, 2011. ISSN 1568-4946. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494611000445>>. Citado 6 vezes nas páginas 35, 78, 83, 84, 85 e 86.

DAVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Ajieja: Addison-Wesley, 1987. Citado na página 57.

DEB, K. GeneAS: A robust optimal design technique for mechanical component design. In: _____. *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997. p. 497–514. ISBN 978-3-662-03423-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03423-1_27>. Citado 5 vezes nas páginas 67, 68, 69, 70 e 82.

_____. *Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001. 498 p. (Wiley International Series in Systems and Optimization). Citado na página 28.

DEB, K. *et al.* Optimizing engineering designs using a combined genetic search. In: *Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms*. [S.l.]: Morgan Kaufman Publishers, 1995. p. 521–528. Citado na página 78.

DEEP, K. *et al.* A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 212, n. 2, p. 505 – 518, 2009. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300309001830>>. Citado 5 vezes nas páginas 34, 72, 73, 74 e 75.

DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. *Positive Feedback as a Search Strategy*. Milano, Italy, 1991. Citado na página 31.

EDGAR, T. F.; HIMMELBLAU, D. M.; LASDON, L. S. *Optimization of Chemical Process*. Second edition. New York: McGraw-Hill Chemical Engineering Series, 2001. Citado na página 33.

EGLESE, R. Simulated annealing: A tool for operational research. *European Journal of Operational Research*, v. 46, n. 3, p. 271 – 281, 1990. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179090001R>>. Citado na página 31.

ESFE, M. H. *et al.* Design of a heat exchanger working with organic nanofluids using multi-objective particle swarm optimization algorithm and response surface method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 119, p. 922 – 930, 2018. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017344460>>. Citado na página 30.

ESTRADA, E. d. S. D. *Otimização geométrica de cavidades e caminhos de alta condutividade empregando Design Construtal e algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2016. Citado na página 29.

FEOKTISTOV, V.; PIETRAVALLE, S.; HESLOT, N. Optimal experimental design of field trials using differential evolution. In: *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. San Sebastian, Spain: [s.n.], 2017. p. 1690–1696. Citado na página 30.

FISTER, I. *et al.* A review of chaos-based firefly algorithms: Perspectives and research challenges. *Applied Mathematics and Computation*, v. 252, n. Supplement C, p. 155 – 165, 2015. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300314016518>>. Citado na página 42.

GANDOMI, A. *et al.* Firefly algorithm with chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 18, n. 1, p. 89 – 98, 2013. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570412002717>>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 42 e 58.

GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; ALAVI, A. H. Mixed variable structural optimization using firefly algorithm. *Computers & Structures*, v. 89, n. 23, p. 2325 – 2336, 2011. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794911002185>>. Citado 6 vezes nas páginas 38, 80, 81, 82, 83 e 84.

_____. Cuckoo search algorithm: a metaheuristic approach to solve structural optimization problems. *Engineering with Computers*, v. 29, n. 1, p. 17–35, Jan 2013. ISSN 1435-5663. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00366-011-0241-y>>. Citado na página 81.

GHAEDI, M. *et al.* Principal component analysis-artificial neural network and genetic algorithm optimization for removal of reactive orange 12 by copper sulfide nanoparticles-activated carbon. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, v. 20, n. 3, p. 787 – 795, 2014. ISSN 1226-086X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1226086X13002529>>. Citado na página 29.

_____. Isotherm and kinetics study of malachite green adsorption onto copper nanowires loaded on activated carbon: Artificial neural network modeling and genetic algorithm optimization. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, v. 142, p. 135 – 149, 2015. ISSN 1386-1425. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386142515001079>>. Citado na página 29.

GISVOLD, K. M.; MOE, J. A method for nonlinear mixed integer programming and its application to design problems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, v. 94, n. 1, p. 353–364, 1972. Citado na página 33.

GOKHALE, S.; KALE, V. An application of a tent map initiated chaotic firefly algorithm for optimal overcurrent relay coordination. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 78, p. 336–342, jun 2016. Citado na página 44.

GOUDOS, S. K. *et al.* Optimization of power consumption in 4g lte networks using a novel barebones self-adaptive differential evolution algorithm. *Telecommunication Systems*, v. 66, n. 1, p. 109–120, Sep 2017. ISSN 1572-9451. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11235-017-0279-2>>. Citado na página 30.

GUO, C.-x. *et al.* Swarm intelligence for mixed-variable design optimization. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, v. 5, n. 7, p. 851–860, Jul 2004. ISSN 1862-1775. Disponível em: <<https://doi.org/10.1631/jzus.2004.0851>>. Citado na página 78.

GURARSLAN, G.; KARAHAN, H. Solving inverse problems of groundwater-pollution-source identification using a differential evolution algorithm. *Hydrogeology Journal*, v. 23, n. 6, p. 1109–1119, Sep 2015. ISSN 1435-0157. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10040-015-1256-z>>. Citado na página 30.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical Genetic Algorithms*. 2nd. ed. New Jersey: Wiley, 2004. 272 p. (Wiley InterScience electronic collection). ISBN 9780471671756. Citado 4 vezes nas páginas 26, 29, 39 e 45.

HU, X. *et al.* Engineering optimization with particle swarm. In: *Swarm Intelligence Symposium, 2003. SIS '03. Proceedings of the 2003 IEEE*. IN, USA: [s.n.], 2003. p. 53–57. Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 70.

JAMSHIDI, M. *et al.* Ultrasound-assisted removal of Al^{3+} ions and alizarin red s by activated carbon engrafted with ag nanoparticles: central composite design and genetic algorithm optimization. *RSC Adv*, The Royal Society of Chemistry, v. 5, p. 59522–59532, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C5RA10981G>>. Citado na página 29.

KANNAN, B. K.; KRAMER, S. N. An augmented lagrange multiplier based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design. *Journal of Mechanical Design*, v. 116, n. 2, p. 405–411, 1994. Citado na página 33.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*. WA, Australia: [s.n.], 1995. v. 4, p. 1942–1948. Citado 5 vezes nas páginas 30, 59, 78, 83 e 86.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C.; SHI, Y. Chapter seven - the particle swarm. In: KENNEDY, J.; EBERHART, R. C.; SHI, Y. (Ed.). *Swarm Intelligence*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001, (The Morgan Kaufmann Series in Artificial Intelligence). p. 287 – 325. ISBN 978-1-55860-595-4. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781558605954500073>>. Citado na página 30.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/220/4598/671>>. Citado na página 31.

LAMPINEN, J.; ZELINKA, I. Mixed integer-discrete-continuous optimization by differential evolution - part 1: the optimization method. In: OŠMERA, P. (Ed.). *Proceedings of MENDEL'99, 5th International Mendel Conference on Soft Computing*. Brno, Czech Republic: Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Automation and Computer Science, 1999. (1999, 12), p. 71–76. Citado na página 34.

LAND, A. H.; DOIG, A. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, v. 28, n. 2, p. 297–320, 1960. Citado na página 33.

LEIDENFROST, R.; ELMENREICH, W. Establishing wireless time-triggered communication using a firefly clock synchronization approach. In: *2008 International Workshop on Intelligent Solutions in Embedded Systems*. Regensburg, Germany: [s.n.], 2008. p. 1–18. Citado na página 38.

LI, B.; JIANG, W. Optimization of complex functions by chaos search. *International Journal of Cybernetics and Systems*, v. 29, n. 4, p. 409–419, 1998. Citado na página 56.

LI, Z.-C. *et al.* Identification of protein methylation sites by coupling improved ant colony optimization algorithm and support vector machine. *Analytica Chimica Acta*, v. 703, n. 2, p. 163 – 171, 2011. ISSN 0003-2670. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003267011011068>>. Citado na página 31.

LIAO, T. W.; KUO, R.; HU, J. Hybrid ant colony optimization algorithms for mixed discrete–continuous optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 6, p. 3241 – 3252, 2012. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312009630>>. Citado na página 34.

LIEU, Q. X.; DO, D. T.; LEE, J. An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints. *Computers and Structures*, v. 195, p. 99–112, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.

LIN, S.-S.; ZHANG, C. C.; WANG, H.-P. B. ON MIXED-DISCRETE NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS: A COMPARATIVE STUDY. *Engineering Optimization*, Informa UK Limited, v. 23, n. 4, p. 287–300, apr 1995. Citado na página 34.

LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos (2a edição)*. BRASPORT, 2008. ISBN 9788574523736. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=it0kv6UsEMEC>>. Citado na página 29.

LOBATO, F. S. *Otimização Multi-Objetivo Para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Engenharias, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 59.

LOBATO, F. S.; STEFFEN, V. J.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. Uma abordagem evolutiva baseada em modelos caóticos de busca associado ao algoritmo de evolução diferencial. In: *17º Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica*. Uberlândia - MG, Brasil: POS-MEC2007, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 23, 32, 58, 87, 88 e 89.

LUZ, E. F. P.; BECCENERI, J. C.; VELHO, H. F. C. Conceitualização do algoritmo vagalume e sua aplicação na estimativa de condição inicial da equação de calor. *IX Workshop do Curso de Computação Aplicada do INPE (WORCAP 2009)*, São José dos Campos, 2009. Citado na página 38.

MAHESHWAR; KAUSHIK, K.; ARORA, V. A hybrid data clustering using firefly algorithm based improved genetic algorithm. *Procedia Computer Science*, v. 58, n. Supplement C, p. 249 – 256, 2015. ISSN 1877-0509. Second International Symposium on Computer Vision and the Internet (VisionNet'15). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915021298>>. Citado na página 42.

MAMANO, N.; HAYES, W. B. Sana: simulated annealing far outperforms many other search algorithms for biological network alignment. *Bioinformatics*, v. 33, n. 14, p. 2156–2164, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/bioinformatics/btx090>>. Citado na página 32.

MARZBAND, M. *et al.* Real time experimental implementation of optimum energy management system in standalone microgrid by using multi-layer ant colony optimization. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 75, p. 265 – 274, 2016. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061515003920>>. Citado na página 31.

MASON, K.; DUGGAN, J.; HOWLEY, E. A multi-objective neural network trained with differential evolution for dynamic economic emission dispatch. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 100, p. 201 – 221, 2018. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061517330697>>. Citado na página 30.

MASTA, I. B. *et al.* Projeto de sistemas de engenharia mecânica usando o algoritmo *Line-Up*. *Simpósio de Mecânica Computacional, 23 a 25 de Maio na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 70.

MOHAMMADI, S. *et al.* An adaptive modified firefly optimisation algorithm based on hong's point estimate method to optimal operation management in a microgrid with consideration of uncertainties. *Energy*, Elsevier BV, v. 51, p. 339–348, mar 2013. Citado na página 43.

MOHANTY, B.; PANDA, S.; HOTA, P. Controller parameters tuning of differential evolution algorithm and its application to load frequency control of multi-source power system. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 54, p. 77 – 85, 2014. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061513002895>>. Citado na página 30.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Maryland, USA: Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002. 478 p. Citado na página 57.

RAHMANI, A.; MIRHASSANI, S. A hybrid firefly-genetic algorithm for the capacitated facility location problem. *Information Sciences*, v. 283, n. Supplement C, p. 70 – 78, 2014. ISSN 0020-0255. New Trend of Computational Intelligence in Human-Robot Interaction. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025514006203>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 42.

RAHNAMAYAN, S.; TIZHOOSH, H. R.; SALAMA, M. M. A novel population initialization method for accelerating evolutionary algorithms. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 53, n. 10, p. 1605 – 1614, 2007a. Citado na página 61.

RAHNAMAYAN, S.; TIZHOOSH, H. R.; SALAMA, M. M. A. Opposition-based differential evolution (ODE) with variable jumping rate. In: *2007 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence*. [S.l.: s.n.], 2007b. p. 81–88. Citado na página 61.

RIZZI, M. *et al.* Método do enxame de partículas para otimização de modelos de regressão multivariada empregados na determinação de biodiesel em blendas biodiesel/ Óleo vegetal/ diesel. *Revista Virtual de Química*, v. 8, n. 6, p. 1877–1892, 2016. ISSN 1984-6835. Citado na página 30.

SANDGREN, E. Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design optimization. *Journal of Mechanical Design*, ASME International, v. 112, n. 2, p. 223, 1990. Citado na página 34.

SANTIS, R. D. *et al.* An adapted ant colony optimization algorithm for the minimization of the travel distance of pickers in manual warehouses. *European Journal of Operational Research*, v. 267, n. 1, p. 120 – 137, 2018. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717310287>>. Citado na página 31.

SARIMVEIS, H.; NIKOLAKOPOULOS, A. A line up evolutionary algorithm for solving non-linear constrained optimization problems. *Computers & Operations Research*, v. 32, n. 6, p. 1499 – 1514, 2005. Citado na página 61.

SHIH, C.; YANG, Y. Generalized hopfield network based structural optimization using sequential unconstrained minimization technique with additional penalty strategy. *Advances in Engineering Software*, v. 33, n. 7, p. 721 – 729, 2002. ISSN 0965-9978. Engineering Computational Technology & Computational Structures Technology. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997802000601>>. Citado na página 81.

SHUKLA, R.; SINGH, D. Selection of parameters for advanced machining processes using firefly algorithm. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, v. 20, n. 1, p. 212 – 221, 2017. ISSN 2215-0986. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2215098616300593>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 38.

SÁNCHEZ, D.; MELIN, P.; CASTILLO, O. Optimization of modular granular neural networks using a firefly algorithm for human recognition. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 64, n. Supplement C, p. 172 – 186, 2017. ISSN 0952-1976. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0952197617301264>>. Citado na página 22.

SOCHA, K. Aco for continuous and mixed-variable optimization. In: *Proceedings in Fourth International Workshop on Ant Colony Optimization and Swarm Intelligence*. Brussels - Belgium: Optimization Group, 2004. Citado na página 33.

STORN, R.; PRICE, K. *Differential Evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*. Berkeley, CA, 1995. Tech. Rep. TR-95-012. Citado na página 29.

SUNDARI, M. G.; RAJARAM, M.; BALARAMAN, S. Application of improved firefly algorithm for programmed PWM in multilevel inverter with adjustable DC sources. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 41, p. 169–179, apr 2016. Citado na página 43.

TANG, L.; ZHAO, Y.; LIU, J. An improved differential evolution algorithm for practical dynamic scheduling in steelmaking-continuous casting production. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 18, n. 2, p. 209–225, April 2014. ISSN 1089-778X. Citado na página 30.

TAVAZOEI, M. S.; HAERI, M. Comparison of different one-dimensional maps as chaotic search pattern in chaos optimization algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, v. 187, n. 2, p. 1076–1085, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 23, 32, 56 e 58.

TEY, K. S. *et al.* Improved differential evolution-based mppt algorithm using sepic for pv systems under partial shading conditions and load variation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, p. 1–1, 2018. ISSN 1551-3203. Citado na página 30.

TING, C.-J.; CHEN, C.-H. A multiple ant colony optimization algorithm for the capacitated location routing problem. *International Journal of Production Economics*, v. 141, n. 1, p. 34 – 44, 2013. ISSN 0925-5273. Meta-heuristics for manufacturing scheduling and logistics problems. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527312002393>>. Citado na página 31.

TORT, C.; ŞAHIN, S.; HASANÇEBİ, O. Optimum design of steel lattice transmission line towers using simulated annealing and pls-tower. *Computers & Structures*, v. 179, p. 75 – 94, 2017. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794916300694>>. Citado na página 31.

VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. Third edition. USA: VR D INC. Colorado Springs, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 25, 28, 33 e 45.

VARGAS, D. *et al.* Um algoritmo baseado em evolução diferencial para problemas de otimização estrutural multiobjetivo com restrições. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 32, n. 2, p. p 91–99, 2016. Citado na página 30.

VENTER, G.; SOBIESKI, J. S. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Denver - USA: AIAA, 2002. Citado na página 33.

VERDAGUER, M. *et al.* Application of ant-colony-optimization algorithm for improved management of first flush effects in urban wastewater systems. *Science of The Total Environment*, v. 485-486, p. 143 – 152, 2014. ISSN 0048-9697. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0048969714003349>>. Citado na página 31.

VERMA, S.; MUKHERJEE, V. Firefly algorithm for congestion management in deregulated environment. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, v. 19, n. 3, p. 1254 – 1265, 2016. ISSN 2215-0986. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2215098615300689>>. Citado na página 22.

VIANA, F. A. C.; STEFFEN JR, V. Ant colony optimization applied to discrete-continuous problems. In: *CD ROM do VII Simpósio de Mecânica Computacional - SIMMEC*. Araxá - MG: DEM, 2006. Citado na página 33.

WAINTRAUB, M. *Algoritmos Paralelos de Otimização por Enxame de Partículas em Problemas Nucleares*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e pesquisa de engenharia (COPPE), Programa de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro, RJ, 2009. Citado na página 30.

WANG, H. *et al.* A hybrid multi-objective firefly algorithm for big data optimization. *Applied Soft Computing*, Elsevier BV, v. 69, p. 806–815, aug 2018. Citado na página 43.

_____. Firefly algorithm with neighborhood attraction. *Information Sciences*, v. 382–383, p. 374–387, 2017. Citado na página 33.

WANG, J. *et al.* Two-layer simulated annealing and tabu search heuristics for a vehicle routing problem with cross docks and split deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, v. 112, p. 84 – 98, 2017. ISSN 0360-8352. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835217303339>>. Citado na página 31.

WANG, L. *et al.* A hybrid-coded human learning optimization for mixed-variable optimization problems. *Knowledge-Based Systems*, v. 127, p. 114 – 125, 2017. ISSN 0950-7051. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950705117301892>>. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 72 e 75.

- WANG, L.; ZENG, Y.; CHEN, T. Back propagation neural network with adaptive differential evolution algorithm for time series forecasting. *Expert Systems with Applications*, v. 42, n. 2, p. 855 – 863, 2015. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417414004941>>. Citado na página 30.
- WANG, Y.-J.; ZHANG, J.-S.; ZHANG, G.-Y. A dynamic clustering based differential evolution algorithm for global optimization. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 1, p. 56 – 73, 2007. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706011064>>. Citado na página 61.
- WEILE, D. S.; MICHIELSSEN, E. Genetic algorithm optimization applied to electromagnetics: a review. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 45, n. 3, p. 343–353, Mar 1997. ISSN 0018-926X. Citado na página 29.
- WERNER-ALLEN, G. *et al.* Firefly-inspired sensor network synchronicity with realistic radio effects. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*. New York, NY, USA: ACM, 2005. (SenSys '05), p. 142–153. ISBN 1-59593-054-X. Citado na página 38.
- WIJAYA KUKUH DAUD PRIBADI, S. F. D. Maximum power point tracking using particle swarm optimization algorithm for hybrid wind-tidal harvesting system on the south coast of java. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, v. 7, n. 2, p. 659–666, 2017. ISSN 2088-8708. Citado na página 30.
- WONG, L.; MOIN, N. H. Ant colony optimization for split delivery inventory routing problem. *Malaysian Journal of Computer Science*, v. 30, n. 4, p. 333–348, 2017. Disponível em: <<https://ejournal.um.edu.my/index.php/MJCS/article/view/9900>>. Citado na página 31.
- YANG, D.; LI, G.; CHENG, G. On the efficiency of chaos optimization algorithms for global optimization. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 34, n. 4, p. 1366 – 1375, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 56.
- YANG, X.-S. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. United Kingdom: Luniver Press, 2008. ISBN 1905986106, 9781905986101. Citado 9 vezes nas páginas 22, 37, 38, 49, 51, 52, 58, 59 e 93.
- _____. Firefly algorithms for multimodal optimization. In: WATANABE, OSAMU AND ZEUGMANN, THOMAS. *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications: 5th International Symposium, SAGA 2009, Sapporo, Japan, October 26 – 28, 2009. Proceedings*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 169–178. ISBN 978 – 3 – 642 – 04944 – 6. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 41.
- _____. Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, v. 2, n. 2, p. 78 – 84, 2010a. ISSN 1758-0374. Disponível em: <<https://doi.org/10.1504/IJBIC.2010.032124>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.
- _____. Test problems in optimization. *Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Application*, John Wiley & Sons, 2010b. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1008.0549>>. Citado na página 61.
- YIN, Z. *et al.* Research on autodisturbance-rejection control of induction motors based on an ant colony optimization algorithm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 65, n. 4, p. 3077–3094, April 2018. ISSN 0278-0046. Citado na página 31.

- ZAHARIE, D. Critical values for the control parameters of differential evolution algorithms. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Soft Computing*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 62–67. Citado na página 32.
- ZHANG, C.; WANG, H.-P. B. MIXED-DISCRETE NONLINEAR OPTIMIZATION WITH SIMULATED ANNEALING. *Engineering Optimization*, Informa UK Limited, v. 21, n. 4, p. 277–291, sep 1993. Citado na página 34.
- ZHANG, L. *et al.* Classifier ensemble reduction using a modified firefly algorithm: An empirical evaluation. *Expert Systems with Applications*, Elsevier BV, v. 93, p. 395–422, mar 2018. Citado na página 43.
- _____. An automatic layout algorithm of main wiring diagram of substation based on improved simulated annealing algorithm. In: *2017 4th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)*. Hangzhou, China: [s.n.], 2017. p. 312–317. Citado na página 31.
- ZHANG, Y.; SONG, X. fang; GONG, D. wei. A return-cost-based binary firefly algorithm for feature selection. *Information Sciences*, Elsevier BV, v. 418-419, p. 561–574, dec 2017. Citado na página 43.
- ZHAO, Y.; LIU, S. Global optimization algorithm for mixed integer quadratically constrained quadratic program. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 319, p. 159 – 169, 2017. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042717300018>>. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.
- ZHENG, F. *et al.* An adaptive convergence-trajectory controlled ant colony optimization algorithm with application to water distribution system design problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 21, n. 5, p. 773–791, Oct 2017. ISSN 1089-778X. Citado na página 31.