UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO

Alcione Borges Purcina

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM VISTAS A ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[** X **] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Alcione Borges Purcina				
E-mail:	alcyone.borges@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Bolsista				
Agência de fomento:	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás	Sigla:	FAPEG		
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	
Título:	Análise de Estabilidade em Sistemas Mecânicos Não Lineares com Vistas a Atenuação de Vibrações				
Palavras-chave:	Sistemas Mecânicos Não Lineares, Solução Numérica, Método das Múltiplas Escalas, Estabilidade, Caos.				
Título em outra língua:	Stability Analysis of the Nonlinear Mechanical Systems aiming to mitigating vibrations				
Palavras-chave em outra língua:	Mechanical Systems Nonlinear, Numerical Integration of Multiple Scales Method, Stability.				
Área de concentração:	Modelagem e Otimização				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	09/03/2016				
Programa de Pós-Graduação:	Em Modelagem e Otimização				
Orientador (a):	Romes Antonio Borges				
E-mail:	romes@ufg.br				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Alcione Borges Purcina

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27 / 03 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ALCIONE BORGES PURCINA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM VISTAS A ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Prof. Dr. Romes Antonio Borges

CATALÃO – GO
2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Purcina, Alcione Borges
Análise de Estabilidade em Sistemas Mecânicos Não Lineares com Vistas a Atenuação de Vibrações [manuscrito] / Alcione Borges Purcina. - 2016.
84 f.

Orientador: Prof. Dr. Romes Antonio Borges.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Catalão, 2016.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Sistemas mecânicos não lineares. 2. Solução numérica. 3. Método das Múltiplas Escalas. 4. Estabilidade. 5. Caos. I. Borges, Romes Antonio, orient. II. Título.

ALCIONE BORGES PURCINA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM VISTAS A ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Trabalho **aprovado** em 09 de Março de 2016.

Prof. Dr. **Romes Antonio Borges**
Orientador - IMTec - UFG

Prof. Dr. **Antônio Marcos Gonçalves de Lima**
Membro Externo/FEMEC-UFU

Prof. Dr. **Celso Vieira Abud**
Membro Interno/ IMTec - UFG

Catalão – GO
2016

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois Ele me concedeu forças e determinação para que conseguisse concretizá-lo.

Dedico também aos meus pais, Vilma e José, a minha irmã Aline, minha sobrinha Julia e ao meu esposo Gilson que sempre me apoiaram e incentivaram durante a minha caminhada, em especial, na realização deste trabalho.

Agradecimentos

A **Deus,** que me conduziu durante todo o percurso dessa etapa de minha vida, pelas vitórias e bênçãos concedidas.

Ao Professor Dr. **Romes Antonio Borges** pela oportunidade e confiança em mim depositada e pela orientação, amizade, compreensão, paciência e dedicação que sempre teve comigo ao longo destes anos.

Aos meus **familiares**, em especial, meus pais **Vilma Imidio Rosa Borges** e **José Aurelino Borges** e a minha irmã **Aline Borges Borba** que souberam compreender minha ausência em alguns momentos e sempre me apoiaram.

Ao meu esposo **Gilson Lúcio Purcina** pelo companheirismo, paciência, compreensão, apoio e por sempre acreditar em mim e colaborar para que meus sonhos se tornem realidade.

Aos meus **colegas de mestrado,** em especial, **Daniel Ferreira Gonçalves, José Salviano Borges, Lázaro Antônio da Fonseca Júnior, Raina Ribeiro Marques, Rosane Gonçalves Ferreira** e **Tatiane Nunes da Costa,** pelo companheirismo, ajuda e incentivo durante esta fase de minha vida.

Aos **Professores do IMTec –** Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, que fazem parte de minha história acadêmica e profissional.

A **FAPEG** – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás; **CAPES** – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e **CNPq** – Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico; pelo apoio financeiro durante todo o curso de Mestrado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização (**PPGMO**) da **Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão**, pela oportunidade de estudo.

“O caos revela que, em vez de resistir às incertezas da vida, devemos aproveitá-las”.

(Briggs e Peat)

RESUMO

PURCINA, A. B. *Análise de Estabilidade em Sistemas Mecânicos Não Lineares com Vistas a Atenuação de Vibrações*. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Nos últimos anos, é crescente o interesse pelo estudo dos fenômenos não lineares, isso porque com a modernização das estruturas e o emprego de materiais inovadores e mais flexíveis, as não linearidades tornaram-se mais evidentes. Nesse sentido, este trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de um sistema mecânico de 2 graus de liberdade com características não lineares, em ressonância primária. A estrutura consiste do sistema principal conectado a um sistema secundário que atuará como um Absorvedor Dinâmico de Vibração não linear que, por sua vez, absorve parcial ou totalmente a energia vibratória do sistema. As soluções numéricas do problema são obtidas utilizando o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem e as soluções analíticas aproximadas, são obtidas utilizando o Método das Múltiplas Escalas, para então verificar o quão próximas tais soluções conseguem aproximar-se das soluções numéricas. Através do Método de Perturbação mencionado, também, são determinadas as respostas para as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que descrevem a modulação das amplitudes e fases. Sendo assim, a solução em regime permanente e sua estabilidade são estudadas utilizando a curva resposta de frequência. Além disso, o comportamento do sistema principal e do absorvedor são investigados através de simulações numéricas, tais como: respostas no domínio do tempo, os planos de fase e os seções de Poincaré; as quais evidenciam que o sistema exibe movimentos periódicos, quase-periódicos e caótico.

Palavras-chaves: Sistemas Mecânicos Não Lineares, Solução Numérica, Método das Múltiplas Escalas, Estabilidade, Caos.

ABSTRACT

PURCINA, A. B. *Stability Analysis of the Nonlinear Mechanical Systems aiming to mitigating vibrations*. 2016. 84 f. M. Sc. Dissertation (Mestrado em Modelagem e Otimização) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

In the last years, there is a growing interest in the study of nonlinear phenomena that because with the modernization of the structures and employment of innovative and more flexible materials, the nonlinearities become more evident. In that sense, this work aims to study the behavior of a mechanical system with two degrees of freedom with non-linear characteristics in primary resonance. The structure consists of the main system connected to a secondary system to act as a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber, which partially or fully absorbs the vibrational energy of the system. The numerical solutions of the problem are obtained using the Runge-Kutta methods of 4th order and approximate analytical solutions are obtained using the Multiple Scales Method, and then it turns out how close can be closer to the numerical solutions. Through the mentioned disturbance method, too, it is determined the answers for the ordinary differential equations of the first order, which describe the modulation amplitudes and phases. Thus, the solution in steady state and the stability are studied using the frequency response. Furthermore, the behavior of the main system and the absorber are investigated through numerical simulations, such as responses in the time domain, phase planes and Poincaré map; which show that the system displays periodic movements, quasi-periodic and chaotic.

Keywords: Mechanical Systems Nonlinear, Numerical Integration of Multiple Scales Method, Stability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1 – Sistema massa mola amortecedor. 29
Figura 2. 2 – Atrator de Lorenz para os parâmetros de controle $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. 32
Figura 2. 3 – (a) Trajetória, (b) Curva integral, (c) Órbita e (d) Retrato de fase, no espaço de fase. 34
Figura 2. 4 – Natureza da Estabilidade dos Pontos Fixos do Oscilador de Duffing para (a) $\alpha = -1$, (b) $\alpha = 1$ e (c) $\alpha = 0$. 36
Figura 2. 5 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.2$. 37
Figura 2. 6 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.3$. 37
Figura 2. 7 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.37$. 38
Figura 2. 8 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.5$. 38
Figura 2. 9 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.8$. 39
Figura 2. 10 – Evolução dos Expoentes de Lyapunov do Oscilador de Duffing para (a) $\Gamma = 0.2$, (b) $\Gamma = 0.3$, (c) $\Gamma = 0.37$, (d) $\Gamma = 0.5$ e (e) $\Gamma = 0.8$. 40
Figura 2. 11 – Diagrama de Bifurcação para o Oscilador de Duffing. 42

Figura 3. 1 – Solução do Oscilador Mecânico de Duffing. 46
Figura 3. 2 – (a) Amplitude do sistema em ressonância primária e (b) descrição do fenômeno de salto. 50

Figura 4. 1 – Modelo do Sistema de 2 g. d. l. 52
Figura 4. 2 – (a) Sistema principal e (b) Absorvedor. 56
Figura 4. 3 – Variação de a e η calculada numericamente. 59
Figura 4. 4 – (a) Amplitude do sistema principal em ressonância primária para $f = 0.2N$, (b) descrição do fenômeno de salto. 62

Figura 5. 1 – (a) Respostas no domínio do tempo do sistema não linear sem absorvedor e com absorvedor não linear, (b) plano de fase do sistema principal sem absorvedor e (c) sistema principal com absorvedor não linear para $f = 0.02$. 66
Figura 5. 2 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal não linear e do absorvedor não linear, respectivamente, para $f = 0.02$. 67

Figura 5. 3– Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 5*. 68
Figura 5. 4 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 15*. 69
Figura 5. 5 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 25*. 70
Figura 5. 6 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 30*. 71
Figura 5. 7 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 40*. 72
Figura 5. 8 – Evolução dos Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor não linear para (a) *f = 0.02*, (b) *f = 5*, (c) *f = 15*, (d) *f = 25*, (e) *f = 30* e (f) *f = 40*. 74
Figura 5. 9 – Diagrama de bifurcação do (a) sistema principal e (b) absorvedor não-linear.. 75

LISTA DE TABELAS

Tabela 4 1 – Valores dos parâmetros do sistema não linear com absorvedor não linear. 52
Tabela 4. 2 – Autovalores do sistema não linear com absorvedor não linear com *f = 0.02*.....63

Tabela 5. 1 – Sinais dos expoentes de Lyapunov para cada valores de amplitude de força *f* do sistema. 75

LISTA DE SÍMBOLOS

m — Massa

c — Coeficiente de amortecimento

k — Coeficiente de rigidez

F — Força externa aplicada na massa m

α — Coeficiente de amortecimento

ω_0 — Frequência natural de oscilação

β — Termo de não linearidade

Γ — Amplitude de força

Ω — Frequência de excitação

t — Tempo

x — Deslocamento no tempo

$\dot{x}$ — Velocidade da massa na direção do movimento

$\ddot{x}$ — Aceleração da massa na direção do movimento

λ_j — Expoentes de Lyapunov

r — Distância do ponto no mapa de Poincaré

ε — Fator de perturbação

T_n — Escala de tempo

D_n — Operadores diferenciais

J — Matriz Jacobina

x_1 — Deslocamento do sistema principal

x_2 — Deslocamento do absorvedor

m_1 — Massa do sistema principal

m_2 — Massa do absorvedor

k_1 — Rigidez linear do sistema principal

k_1' — Rigidez não linear do sistema principal

k_2 — Rigidez linear do absorvedor

$k_2^{'}$ — Rigidez não linear do absorvedor

c_1 — Coeficiente de amortecimento do sistema principal

c_2 — Coeficiente de amortecimento do absorvedor

ω_1 — Frequência natural

ω_2 — Frequência natural

α_i — Parâmetros lineares

β_i — Parâmetros não lineares

ξ_i — Coeficientes de amortecimento

f — Amplitude da força

σ — Parâmetro de sintonia

a — Amplitude do sistema principal

b — Amplitude do absorvedor

θ — Fase do sistema principal

γ — Fase do absorvedor

H — Matriz Hurwitz

a_{max} — amplitude máxima

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 25

2. TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES 28

2.1 Sistemas Dinâmicos 28

2.1.1 Sistemas mecânicos 29

2.1.2 Sistemas dinâmicos não lineares 30

2.2 Caos 31

2.3 Oscilador Mecânico de Duffing 32

2.4 Espaço de Fase 33

2.5 Seção de Poincaré 35

2.6 Expoente de Lyapunov 39

2.7 Diagrama de Bifurcação 41

3. TEORIA DAS PERTURBAÇÕES: O MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS 43

3.1 O Método das Múltiplas Escalas 43

3.2 O Método das Múltiplas Escalas Aplicado ao Oscilador de Duffing 44

3.3 Avaliação da Resposta Obtida pelo Método das Múltiplas Escalas 46

3.4 Estudo de Estabilidade do Oscilador de Duffing 47

3.5 Resposta em Frequência para o Sistema 49

4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA MECÂNICO NÃO LINEAR 51

4.1 Equações do Movimento 51

4.2 Método das Múltiplas Escalas Aplicado ao Sistema Mecânico Não Linear 53

4.2.1 Avaliação da resposta obtida pelo Método das Múltiplas Escalas 55

4.3 Estudo da Estabilidade do Sistema Mecânico Não Linear 56

4.4 Bifurcação Sela-nó 61
4.5 Critério de Routh-Hurwitz 61
4.6 Resposta em frequência do sistema 62
5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS 65
5.1 Análise das Respostas no Domínio do Tempo para o Sistema 65
5.2 Expoentes de Lyapunov 73
5.3 Diagrama de Bifurcação 75
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS 77
REFERÊNCIAS 79
CÁLCULOS DO MÉTODO DAS MULTIPLAS ESCALAS 82
CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ 84

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Diminuir os níveis de vibração na resposta de um sistema é de grande importância para se ter um projeto eficiente e confiável, uma vez que vibrações são fenômenos indesejáveis que podem ocasionar danos, falhas e, por vezes, a destruição de máquinas e estruturas. Nesse sentido, é crescente o interesse em ferramentas para a atenuação de vibrações indesejadas em vários tipos de sistemas, destacando-se os Absorvedores Dinâmicos de Vibrações (ADVs).

Um ADV clássico consiste em uma massa acoplada por meio de uma mola e um amortecedor a um dado sistema, concedendo a ele um novo grau de liberdade. Esse sistema é então sintonizado para vibrar com amplitudes mais elevadas, absorvendo, assim, parcial ou totalmente a energia vibratória no ponto de acoplamento (COSTA, PURCINA e BORGES, 2011).

Os ADVs podem ter características lineares ou não lineares. Contudo, nos últimos anos, é crescente o interesse em se estudar os ADVs com características não lineares, devido a sua maior robustez quando comparado com o absorvedor linear, fundamentada no fato do ADV linear funcionar satisfatoriamente somente na sua frequência de sintonização (PURCINA, COSTA e BORGES, 2015).

Devido a utilização de materiais cada vez mais flexíveis e inovadores, as não linearidades tornaram-se mais ativas e proporcionam uma maior variabilidade nos tipos de soluções dos sistemas. Por este motivo, tem-se grande necessidade em analisar e compreender características dos fenômenos não lineares, em destaque para o comportamento caótico (BELUSSO, 2011). Entretanto, os métodos para análise dos sistemas não lineares, ao contrários dos lineares, são bem menos conhecidos, algumas se acham somente parcialmente desenvolvidas, e a análise das equações que modelam um dado problema de difícil aplicação (PURCINA, COSTA e BORGES, 2015).

As não linearidades podem ser consideradas no modelo do sistema dinâmico de muitas maneiras. Sua origem pode ser devido à geometria do sistema ou do tipo de material, ou

associada com a presença de forças não lineares ou com a configuração física do sistema. Qualquer componente das equações do movimento como, por exemplo, os termos inerciais, os termos que descrevem forças restauradoras elásticas e inelásticas, os termos dissipativos, os termos que descrevem a excitação externa e até mesmo as condições de contorno do sistema (PURCINA e BORGES, 2015).

A análise de vibrações em sistemas mecânicos permite conhecer e aperfeiçoar o projeto, em termos de qualidade, durabilidade e produtividade. Com esse objetivo Sayed, et al (2011), estudaram um sistema vibratório de dois graus de liberdade com não linearidades quadráticas e cúbicas submetido a força de excitação externa. Já Zhu, et al (2004) estudaram o comportamento dinâmico não linear de um sistema mecânico discreto com amortecimento não linear e mola também não linear, onde pôde-se fazer o estudo da estabilidade deste sistema.

A análise de problemas descritos por sistemas dinâmicos não lineares, possui duas abordagens distintas: a quantitativa, que busca avaliar a evolução deste sistema no tempo, e a qualitativa, que visa entender o comportamento global de um dado sistema (SAVI, 2004). Este trabalho utiliza essas duas abordagens.

A teoria de perturbação é dada por métodos interativos que tem o intuito de obter soluções aproximadas envolvendo o parâmetro de perturbação (ε), este por sua vez tem a condição ser um número pequeno (NAYFEH, 2004). Dentre os métodos de perturbação destaca-se o Método das múltiplas escalas. A ideia básica este método consiste em realizar a expansão da solução representando a resposta como sendo uma função de múltiplas variáveis independentes ou múltiplas escalas (SAVI, 2004).

Um dos critérios mais importantes e utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos são os expoentes de Lyapunov. Estes medem a taxa exponencial média de divergência ou convergência das trajetórias do espaço de fase a partir de pontos iniciais próximos. Sendo assim, o comportamento dinâmico de um sistema pode ser previsto através dos sinais dos expoentes de Lyapunov, de modo que um expoente de Lyapunov positivo indica a presença de comportamento caótico (PURCINA, COSTA e BORGES, 2015).

Contudo, o objetivo da presente dissertação é investigar o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares. Para isso, alguns conceitos fundamentais referentes a abordagem qualitativa, tais como: sistemas mecânicos, espaço de fase, seção de Poincaré, expoentes de Lyapunov e diagrama de bifurcação, são analisados. Além disso, para a análise quantitativa de sistemas dinâmicos não lineares destaca-se o Método de Perturbação denominado Método das Múltiplas Escalas.

O presente trabalho está dividido em 6 capítulos, sendo este o capítulo 1. Os demais capítulo são organizados conforme descrito abaixo.

- Capítulo 2: Neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais referentes ao estudo de sistemas dinâmicos não lineares. O intuito principal é introduzir a base teórica que sustenta a compreensão dos resultados obtidos neste trabalho.
- Capítulo 3: Apresenta as principais características do Método das Múltiplas Escalas, descreve-se os passos seguidos até a obtenção da solução analítica aproximada. Considerando o caso de ressonância primária, encontra-se a resposta em frequência a qual é utilizada para obter mais informações sobre o comportamento do sistema.
- Capítulo 4: No capítulo 4 um sistema mecânico não linear com absorvedor não linear é modelado. Com o objetivo de analisar o comportamento deste sistema para o caso de ressonância primária, aplica-se o Método das Múltiplas Escalas e obtêm-se as equações que descrevem as modulações de amplitude e fase do sistema. Obtém-se a resposta em frequência e determina-se as regiões de estabilidade através da aplicação do critério de Routh-Hurwitz.
- Capítulo 5: Neste, são apresentados os resultados numéricos obtidos através simulações computacionais do sistema não linear com absorvedor não linear descrito no capítulo 4. Nesse sentido, o comportamento do sistema, tanto principal quanto do absorvedor, é investigado a partir das respostas no domínio do tempo, dos planos de fase, das seção de Poincaré e dos expoentes de Lyapunov para diferentes valores de amplitude de força. Além disso, são apresentados os diagramas de bifurcação do sistema não linear, visando investigar o seu comportamento global.
- Capítulo 6: Neste capítulo tem-se as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Por fim, são listadas as referências bibliográficas e, ainda, são apresentados equacionamentos referentes aos cálculos da resposta obtida por meio do Método das Múltiplas Escalas (apêndice A), e abordada a definição do Critério de Routh-Hurwitz (anexo A).

Capítulo 2

TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

O objetivo deste capítulo é a introdução de conceitos fundamentais para a realização de uma análise qualitativa de sistemas dinâmicos não lineares, os quais fornecem uma compreensão global do comportamento do sistema dinâmico. Nesse sentido, apresenta-se tópicos básicos referentes à dinâmica de sistemas não lineares tais como: retrato de fase, seção de Poincaré, expoente de Lyapunov e diagrama de bifurcação, os quais são exemplificados utilizando o oscilador mecânico de Duffing.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema pode ser definido como um conjunto de elementos que interagem de forma a existir relações de causa e efeitos nos fenômenos que ocorrem com seus elementos. Existem uma grande variedade de sistemas e, podem ser aplicados em diversas áreas do conhecimento como na Matemática, Engenharia, Física, Biologia, Química, Economia, entre outras (MONTEIRO, 2006).

Neste trabalho, serão tratados exclusivamente os sistemas dinâmicos, sendo que um sistema é dito dinâmico quando uma ou mais grandezas que o caracterizam dependem do tempo. Em outras palavras, sistemas dinâmicos são representações matemáticas que permitem realizar uma descrição do comportamento de um determinado sistema ao longo do tempo e, na maioria das vezes, são descritos por equações diferenciais ordinárias e resolvidos por inúmeros métodos em diferentes software, os quais permitem uma caracterização qualitativa e quantitativa de suas soluções (BELUSSO, 2011).

Os sistemas dinâmicos podem ser descritos por equações lineares, cujas variáveis dependentes aparecem como termos de primeiro grau e, para resolver tal sistema, pode-se aplicar o Princípio da Superposição. Já o sistema não linear apresenta, em suas equações, alguma componente ou subsistema não linear, as quais podem ser próprias do sistema ou

intencionalmente introduzidas com o intuito de controlar e/ou melhorar o comportamento dos sistemas.

Um sistema dinâmico contínuo pode ser classificado observando a dependência ou não do tempo, ou seja, autônomo, quando não se depende explicitamente do tempo, ou não autônomo, quando existe uma dependência explicita no tempo.

Um sistema dinâmico não autônomo pode ser convertido em um autônomo. Para tanto, há um acréscimo na dimensão do espaço, introduzindo-se uma variável a mais associada ao tempo, isto é:

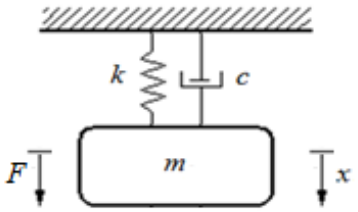
$$t = z, \text{ tal que } \frac{dz}{dt} = 1 . \tag{2.1}$$

Existem vários tipos de sistemas dinâmicos como: econômicos, biológicos, elétricos, hidráulicos, térmicos, híbridos. Porém, neste trabalho, tem-se um interesse maior pelos sistemas mecânicos, descritos a seguir.

2.1.1 Sistemas mecânicos

Um sistema mecânico é composto por massas, as quais armazenam energia cinética e potencial gravitacional, molas, que armazenam energia potencial elástica, e amortecedores, que dissipam energia mecânica do mesmo. Um exemplo de sistema mecânico simples, com um grau de liberdade, é mostrado na Figura 2.1.

Figura 2. 1 – Sistema massa mola amortecedor.



Fonte: o autor.

A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos é a segunda lei de Newton. Sendo assim, a equação do movimento, do sistema apresentado na Figura 2.1, é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\,, \tag{2.2}$$

onde m é a massa, c o coeficiente de amortecimento, k o coeficiente de rigidez, x o deslocamento da massa m na direção do movimento, $\dot{x}$ é a velocidade da massa m na direção do movimento; $\ddot{x}$ a aceleração da massa m na direção do movimento e F a força externa aplicada na massa m.

Na eq. (2.2), um movimento oscilatório é livre e não-amortecido quando $c = 0$ e $F = 0$, todavia, quando $c \neq 0$ e $F = 0$, o movimento oscilatório é livre e amortecido. Seguindo o mesmo raciocínio, o movimento oscilatório é forçado e não-amortecido quando $c = 0$ e $F \neq 0$ e forçado e amortecido quando $c \neq 0$ e $F \neq 0$ (SILVA, 2009). Define-se ainda como sendo o grau de liberdade (g. d. l.) de um sistema mecânico o número de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante de tempo (RAO, 2008).

2.1.2 Sistemas dinâmicos não lineares

Durante vários anos, a análise de sistemas lineares foi considerada suficiente para a compreensão das características vibratórias das estruturas, cujos métodos disponíveis se encontram desenvolvidos e consolidados. No entanto, com a modernização das estruturas e o emprego de materiais inovadores e mais flexíveis, as não linearidades tornaram-se mais ativas, provocando o surgimento de vibrações com características não lineares, cujos métodos de análise são menos conhecidos e até mesmo de difícil aplicação (LIMA, 2008).

Sendo assim, os sistemas dinâmicos não lineares descrevem de maneira mais efetiva os fenômenos físicos apresentando em suas equações uma ou mais componentes não lineares. Tais não linearidades podem ser consideradas no modelo do sistema dinâmico de muitas maneiras. Sua origem pode ser devido à geometria do sistema ou do tipo de material, ou associada com a presença de forças não lineares ou com a configuração física do sistema. Qualquer componente das equações do movimento como, por exemplo, os termos inerciais, os termos que descrevem forças restauradoras elásticas e inelásticas, os termos dissipativos, os termos que descrevem a excitação externa e até mesmo as condições de contorno do sistema, podem ser afetados por algum tipo de não linearidade (BORGES, 2008).

O comportamento caótico é uma das inúmeras possibilidades que podem ocorrer na resposta de sistemas dinâmicos não lineares. Além desse, diferentes comportamentos podem ser exibidos na dinâmica de sistemas não lineares, tais como: órbitas periódicas e quase-

periódicas, ciclos limite e bifurcações (VIANA, 2011). Tais conceitos serão abordados nas seções seguintes.

2.2 Caos

O estudo de fenômenos relacionados a teoria do caos tem-se intensificado nos últimos anos. De maneira geral, a palavra caos está relacionada à desordem e confusão. Segundo Stewart (1991), a ciência moderna conceitua o caos como o comportamento estocástico de um sistema determinístico. Dessa maneira, Savi (2004) explica que para variáveis de entrada conhecidas do sistema aparece uma resposta aparentemente aleatória. Contudo, não se pode confundir caos com aleatoriedade, uma vez que fenômenos aleatórios correspondem a sistemas não-determinísticos e fenômenos caóticos são determinísticos.

O caos está presente em muitos acontecimentos cotidianos, como: nas ondas do mar, no sistema solar, na meteorologia, no escoamento de fluidos, crescimento populacional entre outros. Um exemplo famoso relacionado ao comportamento caótico se deu com os estudos de Lorenz. Ao trabalhar com os fundamentos matemáticos do sistema de equações da meteorologia a partir das equações de Navier-Stokes, ele verificou que as soluções não eram regulares e possuíam um comportamento totalmente imprevisível. Este sistema é descrito, de forma simplificada, por um sistema de equações diferenciais ordinárias:

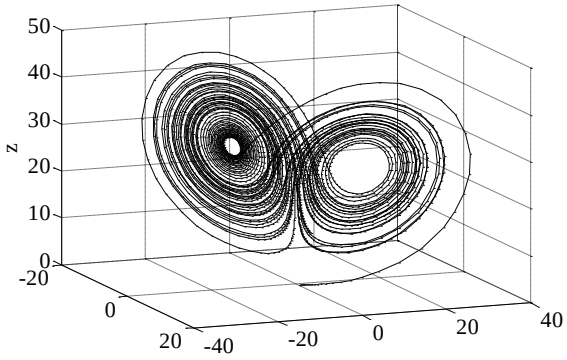
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}, \tag{2.3}$$

onde $\sigma, r, b > 0$ são parâmetros, x é proporcional à velocidade de circulação do fluido, y caracteriza a diferença de temperatura entre elementos de fluidos ascendentes e descendentes e z é proporcional aos desvios da temperatura vertical desde o valor de equilíbrio.

Lorenz, com o auxílio de computadores, calculou as soluções aproximadas do sistema de eqs. (2.3) e identificou uma sensibilidade às condições iniciais, de modo que, a partir de condições iniciais próximas, as soluções oscilavam irregularmente, porém nunca se repetiam (VIVANCO, 2009).

A trajetória das soluções encontradas por Lorenz, denominada Atrator de Lorenz, lembra as asas de uma borboleta, conforme pode ser visualizado na Figura 2.2.

Figura 2. 2 – Atrator de Lorenz para os parâmetros de controle *σ = 10*, *r = 28* e *b = 8/3*.



Fonte: o autor.

Na Figura 2.2 a trajetória começa na origem e vai para o centro da espiral a esquerda, realiza algumas voltas e retorna para a exterior da espiral da direita, realizando mais algumas voltas e retornando mais uma vez para a espiral da esquerda, e assim indefinidamente de forma randômica, porém se mantendo sempre numa região limitada do espaço de fase.

O caos é um comportamento típico de sistemas não lineares, o qual associa-se a imprevisibilidade e sensibilidade às condições iniciais. Além disso, o caos é um comportamento dinâmico muito rico, com várias possibilidades de respostas, possuindo infinitas trajetórias periódicas e não periódicas, além de uma possibilidade infinita de atratores (BELUSSO, 2011).

2.3 Oscilador Mecânico de Duffing

A fim de exemplificar os conceitos e fenômenos envolvidos no estudo de sistemas mecânicos não lineares, considera-se a equação diferencial de segunda ordem não linear com amortecimento linear, dada por:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \Gamma cos(\Omega t), \tag{2.4}$$

onde α é o coeficiente de amortecimento, ω_0 a frequência natural de oscilação, β o termo de não linearidade, Γ a amplitude de força, Ω a frequência de excitação, t o tempo, x o deslocamento no tempo e $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ as derivadas de x em relação ao tempo, ou seja, velocidade e aceleração, respectivamente.

A eq. (2.4) é denominada Equação de Duffing em homenagem aos estudos de Georg Duffing, na década de 1930 e descreve a resposta de uma série de fenômenos físicos importantes como, por exemplo, um circuito elétrico e uma viga de Moon & Holmes (SAVI, 2004).

Fazendo $\dot{x} = y$, a eq. (2.4) pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem, da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega_0^2 x - \alpha y - \beta x^3 + \Gamma \cos(\Omega t) \end{cases}. \tag{2.5}$$

Além disso, o sistema de eqs. (2.5), trata-se de um sistema não autônomo o qual pode ser transformado em um autônomo, introduzindo-se uma terceira variável associada ao tempo. Dessa maneira, obtém-se um sistema de equações tridimensional dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega_0^2 x - \alpha y - \beta x^3 + \Gamma \cos(\Omega z) \\ \dot{z} = 1 \end{cases}. \tag{2.6}$$

Os sistemas de eqs. (2.5) e (2.6) são utilizados nas seções posteriores de modo a exemplificar, em especial, os conceitos de: Retrato de fase, Seção de Poincaré, Expoentes de Lyapunov e diagrama de bifurcação.

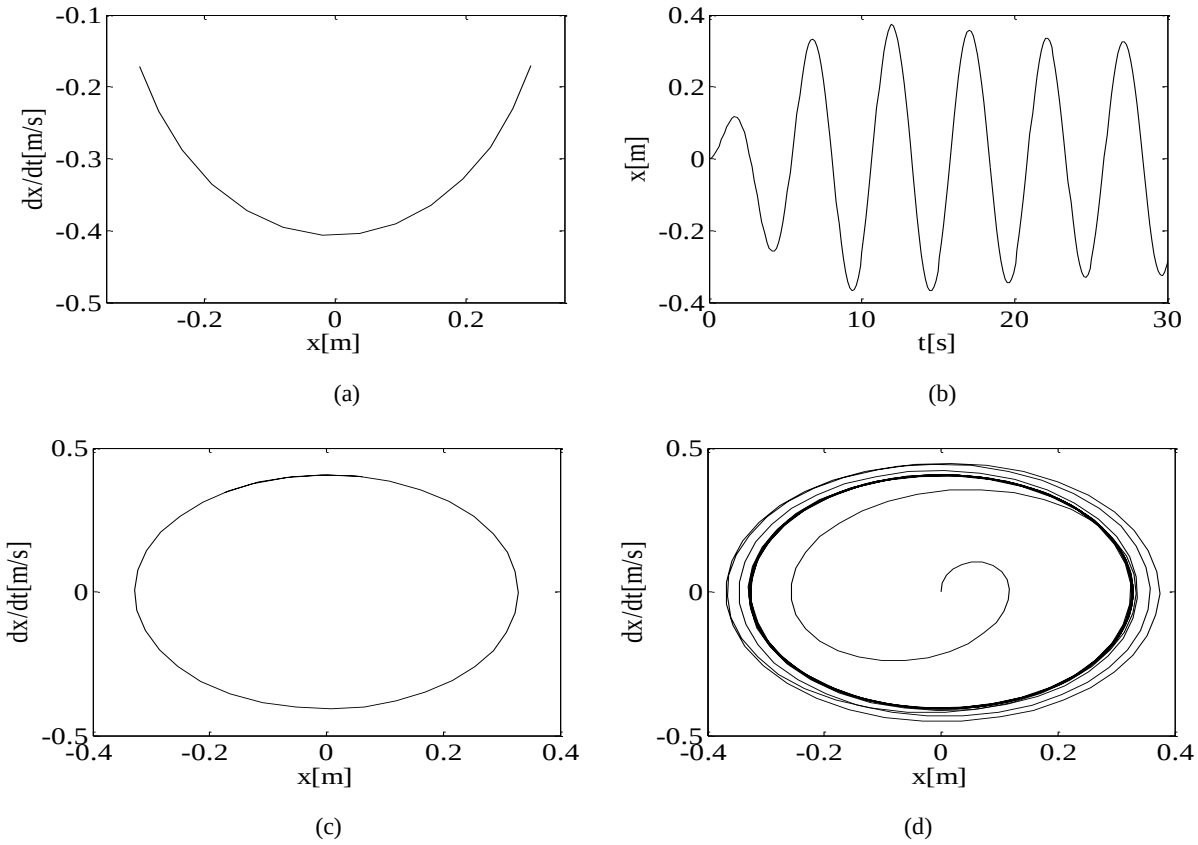
2.4 Espaço de Fase

O espaço de fase ou espaço de estados é definido como o espaço n-dimensional de um sistema dinâmico formado pelas suas variáveis dependentes. Considerando o sistema bidimensional, descrito pelo sistema de eqs. (2.5), algumas definições são feitas para um dado espaço de fase, tais como (SAVI, 2004):

- Trajetória: percurso da solução no espaço de fase, Figura 2.3 (a);
- Curva integral ou série temporal: À medida que o sistema evolui no tempo, os sucessivos pontos traçam uma curva no espaço de fase solução evoluindo no tempo, Figura 2.3 (b);
- Órbita: lugar geométrico no espaço de fase, para uma dada condição inicial, por onde a solução passa na medida que o tempo *t* evolui, Figura 2.3 (c) e

- Fluxo ou retrato de fase: representam o conjunto de órbitas, de soluções possíveis, Figura 2.3 (d).

Figura 2. 3 – (a) Trajetória, (b) Curva integral, (c) Órbita e (d) Retrato de fase, no espaço de fase.



Fonte: o autor.

As curvas da Figura 2.3 representam soluções do oscilador de Duffing descrito pela eq. (2.5) para as condições iniciais nulas, isto é, $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ e os parâmetros $\omega_0 = -1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0.2$ e $\Omega = 1.25$.

O plano de fase de um sistema dinâmico contém muitas informações acerca de seu comportamento. De maneira geral, quando o sistema exibe um comportamento periódico a trajetória formada se caracterizará por uma curva fechada, de modo que o sistema visita repetidas vezes os mesmos pontos. No entanto, no caso de respostas caóticas e quase-periódicas, tem-se como trajetória, uma curva aberta, uma vez que devido à falta de periodicidade as trajetórias nunca se fecham (SANTOS, 2012). Estes comportamentos podem ser identificados de modo mais preciso, como será mostrado a seguir, por meio da determinação do seção de Poincaré.

2.5 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é um método qualitativo que possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema através de uma identificação sintética do comportamento apresentado no espaço de fase. É um procedimento em que se torna possível reduzir um sistema dinâmico contínuo no tempo a um sistema discreto, eliminando pelo menos uma variável do problema (VIVANCO, 2009).

A ideia geral consiste em, dado um sistema *n*-dimensional, considera-se uma superfície de dimensão $n - 1$ transversal ao fluxo do sistema, de modo que as trajetórias irão cruzá-la marcando pontos. O conjunto desses pontos de interseção constituem o mapa de Poincaré do sistema e a superfície transversal escolhida é chamada de seção de Poincaré. Sendo assim, as seções de Poincaré são úteis na verificação ou não de periodicidade em um sistema (SANTOS, 2012).

Resumidamente, a seção de Poincaré pode assumir três diferentes formas (PIRES, 2013):

- número finito *n* de pontos, indicando que a órbita possui periodicidade *n*;
- diversos pontos sem recorrência, que formam uma curva fechada, indicando uma órbita quase-periódica;
- diversos pontos sem repetição, referente a um comportamento caótico.

Visando evidenciar a utilidade da seção de Poincaré na determinação de comportamento periódico ou caótico apresenta-se, a seguir, os retratos de fase e as seções de Poincaré do oscilador de Duffing, descrito pelo sistema de eqs. (2.5), para diferentes amplitudes de força Γ (LYNCH, 2014).

Quando $\Gamma = 0$, o sistema de eqs. (2.5) tornam-se:

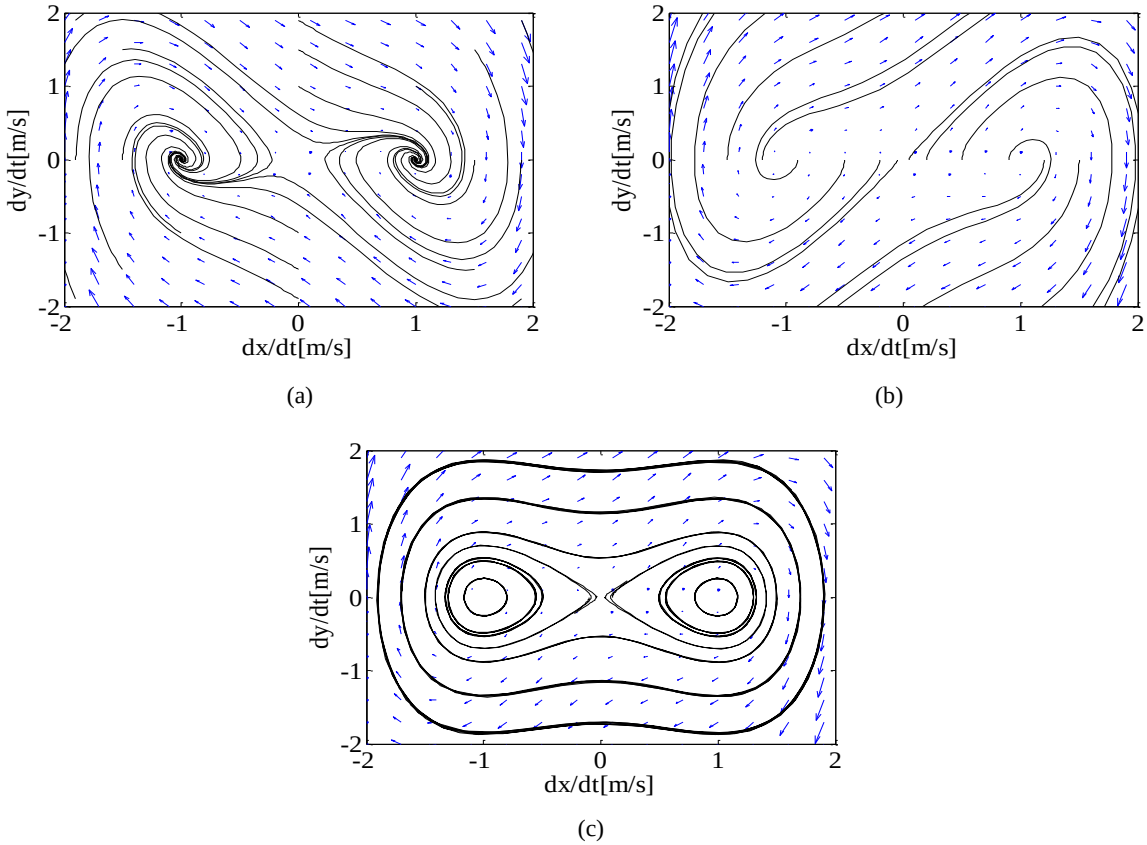
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega_0^2 x - \alpha y - \beta x^3 \end{cases} . \tag{2.7}$$

Considerando que o sistema de eqs. (2.7) depende do parâmetro α e que $\omega_0 = \beta = 1$ e fazendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$, obtém-se três pontos fixos: $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ e $P_3(-1,0)$. Para avaliar a natureza da estabilidade dos pontos fixos, calcula-se os autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 - 12x^2}}{2}. \tag{2.8}$$

O comportamento do oscilador de Duffing, variando o parâmetro α, é apresentado na Figura 2.4 de modo a observar a natureza dos pontos fixos.

Figura 2. 4 – Natureza da Estabilidade dos Pontos Fixos do Oscilador de Duffing para (a) $\alpha = -1$, (b) $\alpha = 1$ e (c) $\alpha = 0$.



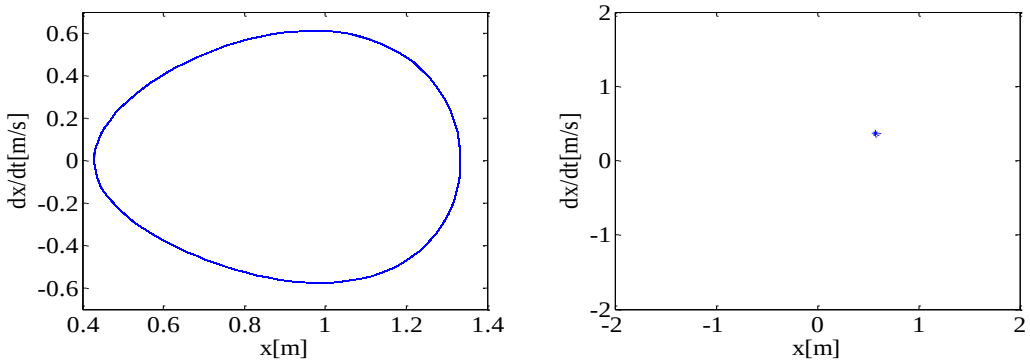
Fonte: o autor.

Se o parâmetro α for diferente de zero, ocorre uma mudança na estrutura de órbitas do sistema, de modo que, P_1 é um ponto de sela e P_2 e P_3 são pontos do tipo espiral estável para α = -1, apresentado na Figura 2.4 (a), e focos instáveis para α = 1, Figura 2.4 (b). Em α = 0, tem-se um sistema Hamiltoniano, em que existe uma órbita homoclínica que une o ponto fixo sela. Neste caso, P_2 e P_3 são pontos do tipo centro conforme observa-se na Figura 2.4 (c).

A seguir, as Figuras de 2.5 a 2.9 exibem os planos de fase e as seções de Poincaré do oscilador de Duffing para os respectivos valores de amplitude de força: $\Gamma = 0.2$, $\Gamma = 0.3$, $\Gamma = 0.37$, $\Gamma = 0.5$ e $\Gamma = 0.8$. Para a obtenção deste, efetuou-se a integração numérica do sistema de eqs. (2.4) com os valores dos parâmetros $\omega_0 = 1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1$, $\Omega = 1.25$ e as condições iniciais

x(0) = 0 e *y(0) = 1*. Considerou-se ainda, os ciclos periódicos do ponto crítico $P_2(1,0)$ e desconsiderou-se a parte transiente inicial, isto porque nessa fase, geralmente, a resposta do sistema é bastante irregular.

Figura 2. 5 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.2$.

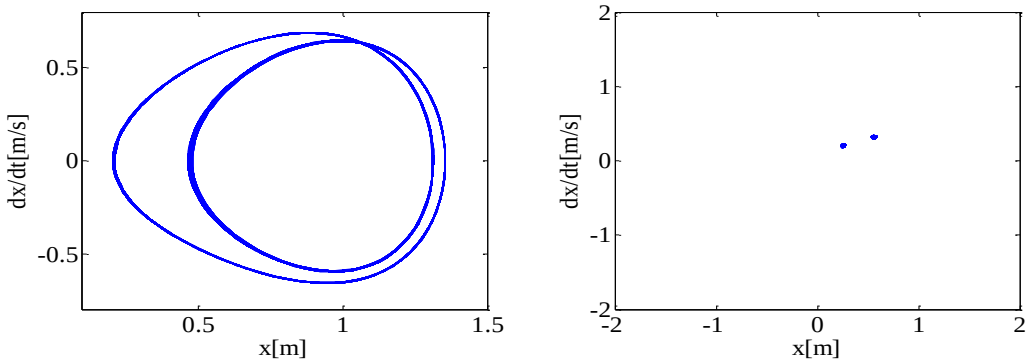


(a) (b)

Fonte: o autor.

Quando $\Gamma = 0.2$ o oscilador de Duffing apresenta em seu retrato de fase um comportamento periódico, bem comportado, que se repete ao longo do tempo, descrevendo uma curva fechada (Figura 2.5 (a)). Neste caso, o sistema exibe uma órbita de período 1 representada na seção de Poincaré por um único ponto, Figura 2.3 (b).

Figura 2. 6 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.3$.

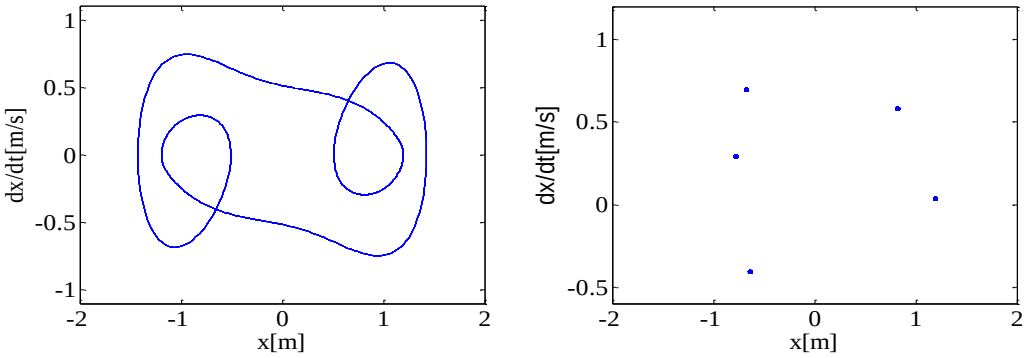


(a) (b)

Fonte: o autor.

Na Figura 2.6 (a) com um incremento no valor da amplitude de força para $\Gamma = 0.3$ observa-se que o sistema exibe o dobro de período visto na Figura 2.5. Além disso, verifica-se que um ciclo de dois períodos é representado por dois pontos na seção de Poincaré (Figura 2.6 (b)).

Figura 2. 7 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.37$.

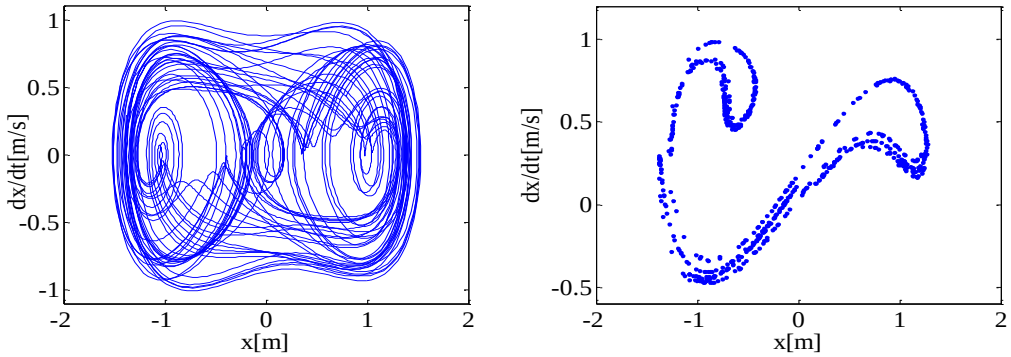


(a) (b)

Fonte: o autor.

Quando $\Gamma = 0.37$ há um ciclo centrado no ponto $P_1(0,0)$ e que contorna tanto $P_2(1,0)$ e $P_3(-1,0)$, conforme mostra a Figura 2.7 (a). Neste caso o sistema apresenta uma órbita de período 5 representada na seção de Poincaré por cinco pontos, conforme observa-se na Figura 2.7 (b).

Figura 2. 8 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma = 0.5$.

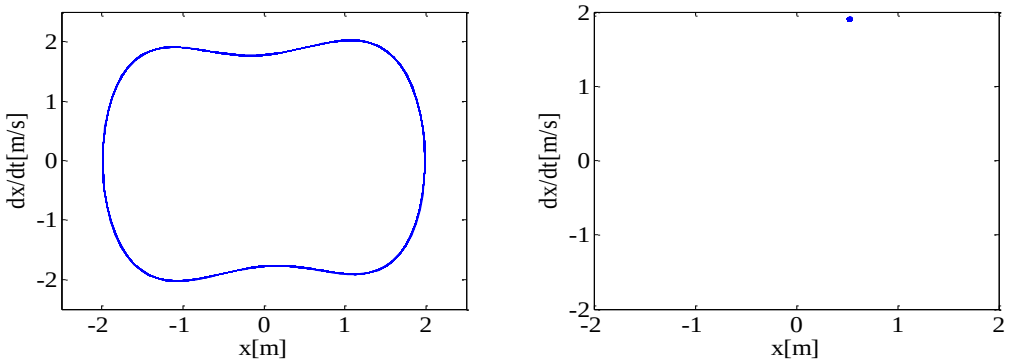


(a) (b)

Fonte: o autor.

Quando $\Gamma = 0.5$ uma trajetória traçada no retrato de fase apresenta um emaranhado de curvas que nunca se fecham, indicando um possível comportamento caótico, conforme observa-se a Figura 2.8 (a). Esse comportamento é evidenciado pela seção de Poincaré, mostrado na Figura 2.8 (b), onde o sistema apresenta um comportamento não-periódico indicando o caos. Além disso, a resposta apresenta um atrator estranho, de modo que os sucessivos valores de suas variáveis ao longo do tempo, descrevem uma trajetória que fica confinada em uma região do espaço.

Figura 2. 9 – (a) Retrato de fase e (b) Seção de Poincaré do Oscilador de Duffing para $\Gamma=0.8$.



Fonte: o autor.

Para $\Gamma = 0.8$ o sistema exibe novamente um comportamento periódico, porém centrado no ponto $P_1(0,0)$, conforme observa-se no retrato de fase, Figura 2.9 (a). Sendo assim, o sistema exibe uma órbita de período 1 que é representada por um único ponto na seção de Poincaré, Figura 2.9 (b).

2.6 Expoente de Lyapunov

Uma ferramenta importante e útil na análise de sistemas dinâmicos são os expoentes de Lyapunov. Tais expoentes avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência ou convergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas (SANTOS, 2012).

Em outras palavras, os expoentes de Lyapunov definem a média da razão exponencial de divergência ou convergência de órbitas próximas no espaço de fase. Um expoente negativo mostra que as órbitas não divergem exponencialmente. Já um expoente positivo indica que existe separação exponencial das órbitas próximas no espaço de fase, entretanto essa separação é limitada de modo que em algum momento as órbitas dobraram para trás em direção ao centro do espaço de fase, definindo o caos. Assim, o comportamento caótico é caracterizado pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Para situações de existência de mais de um expoente positivo, tem-se o chamado hipercaos (THOMSEN, 2003).

Os expoentes de Lyapunov a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas e podem ser definidos da seguinte forma (VIVANCO, 2009):

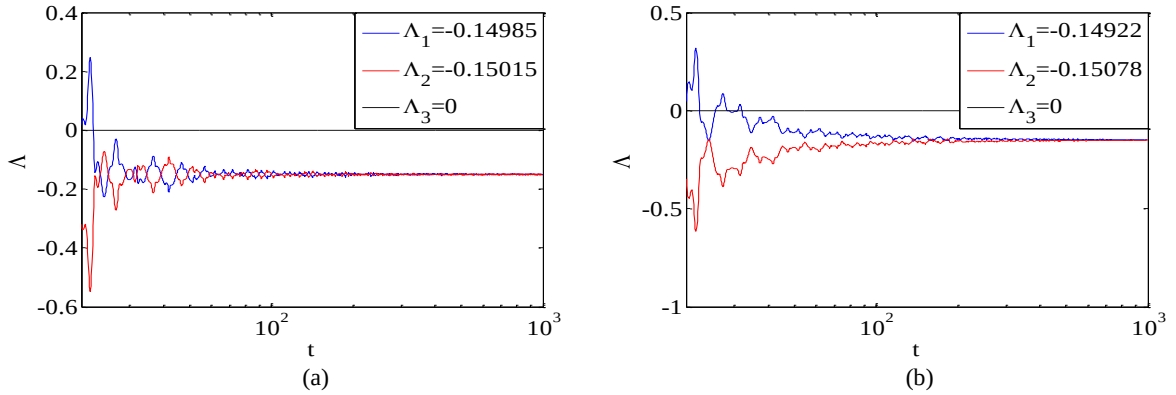
$$\Lambda_j = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} log_2 \left(\frac{p_j(t)}{p_j(0)} \right) \right], j = 1,...,n \,. \tag{2.10}$$

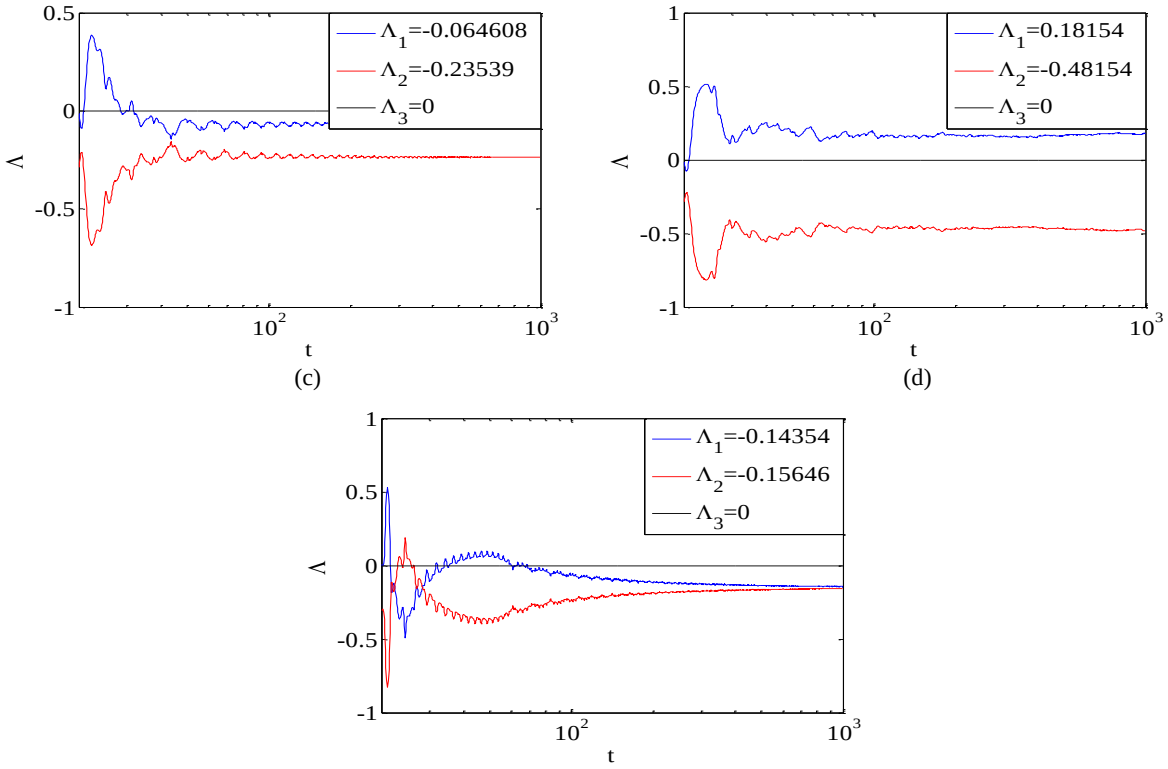
O número de expoentes de Lyapunov está relacionado com a dimensão do sistema, de modo que, um mapa unidimensional possui um único expoente, um sistema tridimensional possui três expoentes e um sistema *n*-dimensional apresenta *n* expoentes. Porém, para estabelecer se um sistema dinâmico tem comportamento caótico, é suficiente conhecer apenas o maior dos expoentes de Lyapunov. Desse modo, se $\Lambda_{max} > 0$ o processo é caótico e as trajetórias vizinhas divergem. Caso ele seja negativo ou nulo pode-se dizer que o sistema apresenta um comportamento regular (SAVI, 2004).

De maneira geral, é possível determinar o tipo de atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. Por exemplo, em um espaço de fase tridimensional: Se os expoentes são todos negativos (-, -, -) tem-se ponto fixo; Se um dos expoentes é igual a zero (-, -, 0) tem-se ciclo limite; Se os dois maiores expoentes são iguais a zero (0, 0, -) tem-se órbitas quasi periódicas confinadas na superfície de um toro; E se um dos expoentes for positivo (+, 0, -) tem-se atrator estranho (VIVANCO, 2009).

A evolução dos expoentes de Lyapunov do oscilador de Duffing descrito pelo sistema autônomo de eq. (2.6) para diferentes valores da amplitude de força *Γ*, é apresentado na Figura 2.10.

Figura 2. 10 – Evolução dos Expoentes de Lyapunov do Oscilador de Duffing para (a) *Γ = 0.2*, (b) *Γ = 0.3*, (c) *Γ = 0.37*, (d) *Γ = 0.5* e (e) *Γ = 0.8*.





Fonte: o autor.

Para os valores de amplitude de força $\Gamma = 0.2$, $\Gamma = 0.3$, $\Gamma = 0.37$, e (e) $\Gamma = 0.8$, Figura 2.10 (a), (b), (c) e (e) respectivamente, tem-se um expoente zero e dois negativos o que indica que o sistema apresenta comportamento periódico e estável. Quando $\Gamma = 0.5$, Figura 2.10 (d), tem-se um expoente positivo definindo que o sistema apresenta comportamento caótico. Vale mencionar que, para este caso, tem-se um atrator estranho, conforme pôde-se observar na Fig. 2.8.

2.7 Diagrama de Bifurcação

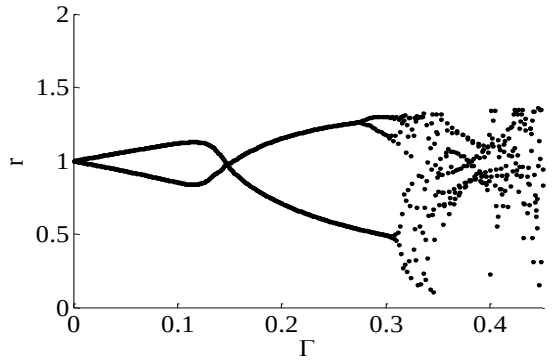
Os Diagramas de bifurcação são bastantes utilizados para analisar o comportamento global do sistema, uma vez que apresentam informações úteis para identificar a influência de um dado parâmetro na resposta de um sistema (SAVI, 2004).

Contudo, existem diferentes maneiras para se construir um diagrama de bifurcação. Lynch (2014) descreve dois deles, denominados como primeiro e segundo métodos iterativos. No primeiro método iterativo, um parâmetro é fixado e um ou mais pontos iniciais são iterados para a frente. O parâmetro é então aumentado por um comprimento de passo adequado e o processo é repetido. Já o segundo método iterativo consiste, basicamente, em variar um

parâmetro e utilizar a solução da iteração anterior como condição inicial para a iteração seguinte apresentando, assim, um mecanismo de feedback.

De modo a resumir todos os possíveis comportamentos de como o parâmetro de amplitude de força Γ varia, na Figura 2.11 apresenta-se um diagrama de bifurcação para o Oscilador de Duffing, descrito pela eq. (2.5), para a amplitude de força no intervalo $0 < \Gamma < 0.45$. O eixo vertical denominado por r representa a distância do ponto no mapa de Poincaré a partir da origem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Figura 2. 11 – Diagrama de Bifurcação para o Oscilador de Duffing.



Fonte: o autor.

A Figura 2.11 mostra um possível diagrama de bifurcação para o sistema de eqs. (2.4), obtido por meio do segundo método interativo, de modo que a amplitude de força Γ é aumentado de zero para 0.45 e, em seguida, diminuído de 0.45 a zero. Nela observa-se que existem regiões onde o parâmetro Γ está associado a um número finito de pontos, entre $0 < \Gamma < 0.32$, e regiões onde ele está associado a uma nuvem de pontos, para $0.32 < \Gamma > 0.45$, onde ocorre um possível o comportamento caótico do sistema.

Capítulo 3

TEORIA DAS PERTURBAÇÕES: O MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS

Equações diferenciais que descrevem sistemas vibratórios, geralmente, são não lineares e nem sempre é possível obter uma solução analítica. Entretanto, muitas vezes, pode-se obter uma aproximação analítica. Nesse caso, essas não linearidades são tratadas como perturbações em relação a um sistema linear, daí vem o nome Métodos de Perturbação (BORGES, 2000). Existem várias técnicas de perturbação e a aplicação de cada uma delas é basicamente definida por características específicas do sistema dinâmico em estudo. Nesse sentido, no presente trabalho tem-se uma atenção especial com uma das principais técnicas de perturbação utilizada para resolver sistemas não lineares com a presença de amortecimento, o Método das Múltiplas Escalas.

3.1 O Método das Múltiplas Escalas

A ideia básica do Método das Múltiplas Escalas (MME) consiste em realizar uma expansão da solução, representando a resposta como sendo uma função de múltiplas variáveis independentes (ou múltiplas escalas). Resumindo, trata-se de um procedimento analítico usado para obter solução no domínio do tempo.

A solução é representada pela seguinte expansão:

$$x(t;\varepsilon) = x_0(T_0,T_1,T_2,...) + \varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2,...) + \varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,T_2,...) + ..., \tag{3.1}$$

em que $T_n = \varepsilon^n t, n = 0,1...$ e $\varepsilon << 1$ é um fator de perturbação.

Vale destacar que, o número de escalas de tempo necessárias para a expansão depende da ordem de potência de ε que se deseja trabalhar. Assim, por exemplo, ao se descartar os termos de ordem $O(\varepsilon^2)$, apenas as escalas T_0 e T_1 são necessárias.

Como a variável independente original (escala temporal *t*) é substituída por novas variáveis (escalas) independentes $T_0, T_1, \ldots$ as derivadas em relação a *t* devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_n tal que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1} + \ldots = D_0 + \varepsilon D_1 + \ldots, \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_1} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \ldots, \tag{3.3}$$

onde $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, n = 0,1,\ldots$ são operadores diferenciais.

Substituindo a expansão dada na eq. (3.1) em uma equação diferencial de interesse, um sistema de equações é obtido ordenando os termos em relação as potências de ε. Cada equação deve ser resolvida sucessivamente, sendo que a solução obtida para a 1ª equação (considerando os termos até ordem ε^0) deve ser considerada nas equações seguintes (para ordens superiores). Com isso, propõe-se uma solução na seguinte forma:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots. \tag{3.4}$$

3.2 O Método das Múltiplas Escalas Aplicado ao Oscilador de Duffing

Aplicando o Método das Múltiplas Escalas (MME), de acordo com Thomsen (2003), deseja-se encontrar uma solução de primeira ordem do oscilador mecânico de Duffing, descrito pela eq. (2.4). Para isso, inicialmente, arranja-se esta equação assumindo não linearidades fracas e pequeno amortecimento reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\left[\Gamma\, cos(\Omega t) - \alpha\dot{x} - \beta x^3\right] \ , \tag{3.5}$$

onde $\varepsilon << 1$ indica uma pequena grandeza assumida.

Considerando dois termos de expansão de x, a solução pode ser expressa como:

$$x(t;\varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1), \tag{3.6}$$

onde $T_0 = t$ e $T_1 = \varepsilon t$, uma vez que, neste trabalho, a expansão será realizada até $O(\varepsilon)$, e $x_j, j = 0,1$ são funções a serem determinadas.

As derivadas de primeira e segunda ordem de x em relação ao tempo devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_n. Assim, tem-se que:

$$\frac{dx}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1, \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1, \tag{3.8}$$

onde $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}, n = 0,1$.

Substituindo as eqs. (3.7) e (3.8) na eq. (3.5) e ordenando cada termo em relação as potências de ε^0 e ε^1, tem-se, respectivamente, o seguinte conjunto de equações:

- Para ordem ε^0:

$$\left(D_0^2 + \omega_0^2\right)x_0 = 0. \tag{3.9}$$

- Para ordem ε^1:

$$\left(D_0^2 + \omega_0^2\right)x_1 = \Gamma \cos(\Omega T_0) - 2D_0 D_1 x_0 - \alpha D_0 x_0 - \beta x_0^3. \tag{3.10}$$

A solução geral da eq. (3.9) pode ser expressa na seguinte forma:

$$x_0 = Ae^{i\omega_0 T_0} + cc, \tag{3.11}$$

onde A é uma função desconhecida em T_1 a ser determinada e cc representa o conjugado dos termos anteriores.

A solução particular das eq. (3.10), depois de eliminar os termos seculares, são dadas por:

$$x_1 = Be^{i\omega_0 T_0} + U_0 e^{i\Omega T_0} + H_0 e^{3i\omega_0 T_0} + cc\,, \tag{3.12}$$

onde B, U_0 e H_0 são funções complexas em T_1.

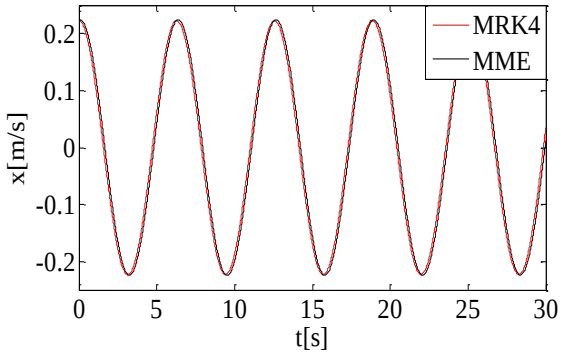
Contudo, a solução geral de x até a aproximação de primeira ordem é dada por:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1\,. \tag{3.13}$$

3.3 Avaliação da Resposta Obtida pelo Método das Múltiplas Escalas

Com a solução analítica eq. (3.13) obtida através do MME, esta solução é mostrada na Fig. 3.1, juntamente com a solução numérica obtida através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, com parâmetros: $\omega_0 = 1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0.2$, $\Omega = 1.25$. Nesta figura pode-se observar que o MME obteve boa solução quando comparado com a solução numérica do sistema.

Figura 3. 1 – Solução do Oscilador Mecânico de Duffing.



Fonte: o autor.

Dessa maneira, verifica-se que a solução geral obtida pelo método das múltiplas escalas, até a aproximação de primeira ordem, é suficientemente próxima da solução numérica para o oscilador mecânico de Duffing.

3.4 Estudo de Estabilidade do Oscilador de Duffing

A estabilidade do oscilador mecânico de Duffing, com amortecimento e forçamento externo, é investigada para o caso de ressonância primária, isto é, para $\Omega = \omega_1$. Em vez de usar a frequência de excitação Ω como parâmetro, introduz-se um parâmetro de sintonia σ, tal que:

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \tag{3.14}$$

que descreve quantitativamente a proximidade de Ω para ω_0 e $\sigma = O(1)$.

Substituindo a eq. (3.14) na eq. (3.10) e eliminando os termos seculares conduz à:

$$2i\omega_0 D_1 A = -\alpha i\omega_0 A - 3\beta A^2 \overline{A} + \frac{\Gamma}{2} e^{i\sigma T_1}. \tag{3.15}$$

Expressando a função complexa *A*, na forma polar, como:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}, \tag{3.16}$$

onde a e φ são reais. Substituindo a eq. (3.16) na eq. (3.15) e separando as partes real e imaginária, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$a' = -\alpha a + \frac{\Gamma}{2\omega_0} sen(\psi), \tag{3.17}$$

$$a\psi' = \sigma a - \frac{3\beta}{8\omega_0} a^3 + \frac{\Gamma}{2\omega_0} cos(\psi), \tag{3.18}$$

onde, $\psi = \sigma T_1 - \varphi$. Além disso, a e φ são amplitudes e fase do sistema.

Na busca das soluções estacionárias, faz-se $a' = \varphi' = 0$ nas eqs. (3.17) e (3.18). Dessa maneira, os valores estacionários tornam-se soluções do sistema algébrico dado pelas equações (3.19) e (3.20):

$$-\alpha a + \frac{1}{2\omega_0}\Gamma sen(\psi) = 0\,, \tag{3.19}$$

$$\sigma a - \frac{3}{8\omega_0}\beta a^3 + \frac{1}{2\omega_0}\Gamma\, cos(\psi) = 0\,, \tag{3.20}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2\omega_0}\Gamma sen(\psi) = \alpha a\,, \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2\omega_0}\Gamma\, cos(\psi) = \left(-\sigma + \frac{3}{8\omega_0}\beta a^2\right)a\,, \tag{3.20}$$

Resolvendo as equações algébricas resultantes (eqs. (3.19) e (3.20)), tem-se que $a = 0$ não é uma solução. Dessa maneira, considerando $a \neq 0$, elevando ao quadrado os dois lados de cada uma destas equações e somando-as, obtém-se:

$$\alpha^2 a^2 + \left(\sigma a - \frac{3}{8\omega_0}\beta a^3\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2}\,, \tag{3.21}$$

que representa a equação da resposta em frequência do sistema.

A estabilidade das soluções estacionárias, indicadas pelo tipo de linha na Figura 3.2, é determinada através da avaliação de autovalores calculados a partir da matriz Jacobiana (J). Em um ponto singular $(\tilde{a}, \tilde{\psi})$ a matriz Jacobiana das equações de modulação, eqs. (3.17) e (3.18) é dada por:

$$J(\tilde{a},\tilde{\psi})=\begin{bmatrix} -\alpha & \dfrac{\Gamma}{2\omega_0}cos(\tilde{\psi}) \\ -\dfrac{3\beta}{4\omega_0}\tilde{a}-\dfrac{\Gamma}{2\omega_0}\dfrac{1}{\tilde{a}^2}cos(\tilde{\psi}) & -\dfrac{\Gamma}{2\omega_0}\dfrac{1}{\tilde{a}}sen(\tilde{\psi}) \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

onde os pontos singulares $\tilde{a}$ e $\tilde{\psi}$ são dados pelas soluções de (3.21) .

Utilizando as eqs. (3.19) e (3.20) com $a' = \varphi' = 0$ para eliminar $cos(\tilde{\psi})$ e $sen(\tilde{\psi})$obtém-se:

$$J(\tilde{a},\tilde{\psi})=\begin{bmatrix} -\alpha & -\left(\sigma-\dfrac{3\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right)\tilde{a} \\ \dfrac{1}{\tilde{a}}\left(\sigma-\dfrac{9\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right) & -\alpha \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Sendo assim, os autovalores dados por:

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{-\left(\sigma-\frac{3\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right)\left(\sigma-\frac{9\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right)}\,. \tag{3.24}$$

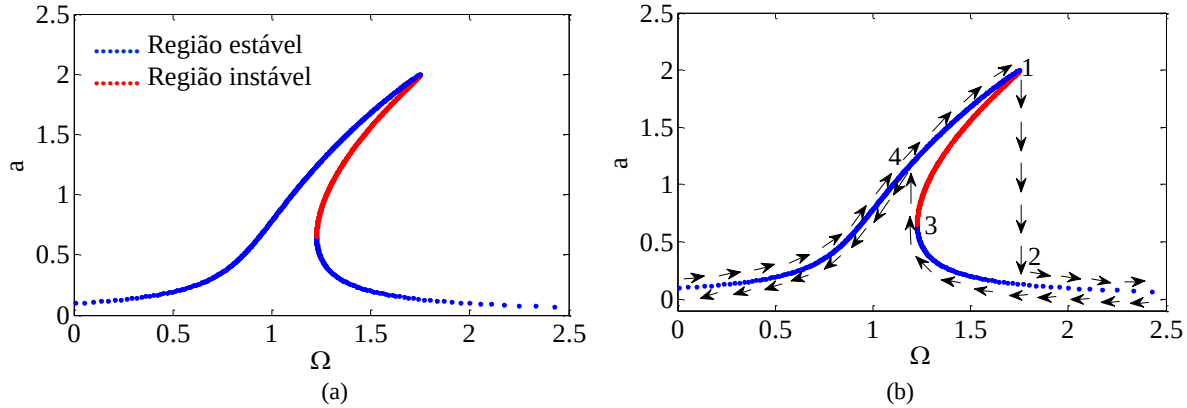
Uma solução $\tilde{a}$ é instável, se pelo menos um autovalor tem uma parte real positiva, caso contrário é estável. Nesse sentido, para $\tilde{a}$ ser instáveis, é necessário que:

$$\left(\sigma-\frac{3\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right)\left(\sigma-\frac{9\beta}{8\omega_0}\tilde{a}^2\right)+\alpha^2<0\,. \tag{3.25}$$

3.5 Resposta em Frequência para o Sistema

A partir da eq. (3.21) obtém-se, utilizando o software MATLAB ®, a curva da resposta em frequência, conforme mostra a Figura 3.2 (a). Nesta figura a curva composta por soluções estáveis, trajetórias azuis, e instáveis, trajetória vermelha e apresenta, o fenômeno do salto.

Figura 3. 2 – (a) Amplitude do sistema em ressonância primária e (b) descrição do fenômeno de salto.



Fonte: o autor.

A Figura 3.2 (b), ilustra o fenômeno de salto apresentado na resposta do oscilador de duffing. Neste caso, existe uma solução para $\Omega < 1.22$ e $\Omega > 1.75$ e três soluções para o intervalo $1.22 < \Omega < 1.75$. Nos locais de frequência $\Omega = 1.22$ e $\Omega = 1.75$, existem apenas duas soluções, nestes pontos a resposta periódica do oscilador Duffing forçado e amortecido perde estabilidade, levando a um salto na resposta.

Capítulo 4

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA MECÂNICO NÃO LINEAR

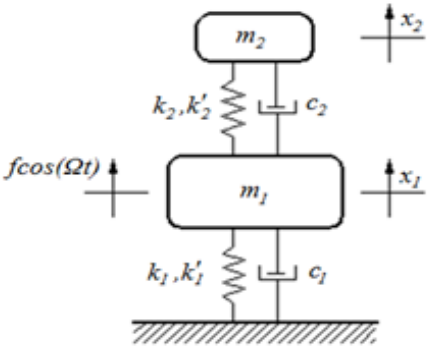
O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento de um sistema mecânico não linear com absorvedor não linear. Nesse sentido, inicialmente, apresenta-se as equações do movimento do sistema de dois graus de liberdade e, em seguida, obtém-se as soluções analíticas aproximadas de primeira ordem utilizando o Método das Múltiplas Escalas e, então, verifica-se quão próximo esta aproxima-se da solução numérica, obtida através do Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem. O Método das Múltiplas Escalas também é utilizado para obter equações que descrevem as modulações de amplitude e fase do sistema. Considerando o caso de ressonância primária, um parâmetro de sintonia é introduzido e uma solução livre de termos seculares é obtida. Para a análise no estado estacionário, considera-se que as equações diferenciais que descrevem as modulações de amplitude e fase do sistema são nulas. Por fim, encontra-se a equação resposta de frequência e determina-se as regiões de estabilidade através da aplicação do critério de Routh-Hurwitz.

4.1 Equações do Movimento

Apresenta-se, a seguir, um sistema vibratório de dois graus de liberdade, com amortecimento, cujo modelo é mostrado na Figura 4.1. Deseja-se, a partir do subsistema formado por $\left(m_2, k_2, k_2^{'}, c_2\right)$, atenuar os níveis de vibração da massa principal m_1. A este subsistema, dá-se no nome de Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV).

Nesse sistema, as coordenadas x_1 e x_2 representam os deslocamentos do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, $\dot{x}_j$ e $\ddot{x}_j$ são derivadas de $x_j, j = 1,2$ e t o tempo.

Figura 4. 1 – Modelo do Sistema de 2 g. d. l.



Fonte: o autor

Aplicando a Segunda lei de Newton, escreve-se as equações do movimento para o sistema, mostrado na Figura 4.1, da seguintes formas:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_1'x_1^3 + c_1\dot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) - k_2'(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f\,cos(\Omega t), \tag{4.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_2'(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0\,. \tag{4.2}$$

Destaca-se que este sistema é composto por molas (k_1', k_2') com características não lineares e amortecedores lineares, e que a massa principal m_1 é excitada por uma força externa do tipo $F(t) = fcos(\Omega t)$. Além disso, os valores dos parâmetros estão listados na Tabela 4.1:

Tabela 4 1 – Valores dos parâmetros do sistema não linear com absorvedor não linear.

Símbolo	Parâmetro	Valores	Unidade
m_1	Massa do sistema principal	10	*kg*
m_2	Massa do absorvedor	0.8	*kg*
k_1	Rigidez linear do sistema principal	44	*N/m*
k_1'	Rigidez não linear do sistema principal	8	N/m^3
k_2	Rigidez linear do absorvedor	2	*N/m*
k_2'	Rigidez não linear do absorvedor	0.5	N/m^3
c_1	Coeficiente de amortecimento do sistema principal	0.1	*Ns/m*
c_2	Coeficiente de amortecimento do absorvedor	0.08	*Ns/m*

Fonte: Adaptado de Saberi, Nahvi (2014).

A partir de manipulações algébricas, as eqs. (4.1) e (4.2) são escritas como:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon\alpha_1 x_1^3 + \varepsilon\xi_1 \dot{x}_1 - \varepsilon\alpha_2 x_2 - \varepsilon\alpha_3 (x_2 - x_1)^3 + \varepsilon\xi_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \varepsilon f \cos(\Omega t), \tag{4.3}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + \varepsilon\beta_1 (x_2 - x_1)^3 + \varepsilon\xi_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 . \tag{4.4}$$

onde ω_1 e ω_2 são frequências naturais; $\alpha_i, i = 1,2,3$ e $\beta_i, i = 1,2,3$ são parâmetros lineares e não lineares, $\xi_i, i = 1,2,3$ são coeficientes de amortecimento, f é a amplitude da força, dados por:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \alpha_1 = \frac{k_1'}{m_1}, \alpha_2 = \frac{k_2}{m_1}, \alpha_3 = \frac{k_2'}{m_1}, \xi_1 = \frac{c_1}{m_1}, \xi_2 = \frac{c_2}{m_1}, \tag{4.5}$$

$$\xi_3 = \frac{c_2}{m_2}, \beta_1 = \frac{k_2'}{m_2}, f = \frac{f_0}{m_1}, \tag{4.6}$$

e $\varepsilon << 1$ indica uma pequena grandeza assumida.

4.2 Método das Múltiplas Escalas Aplicado ao Sistema Mecânico Não Linear

Aplicando o Método das Múltiplas Escalas (MME), de acordo com Nayfeh e Mook (1979), deseja-se encontrar uma solução uniforme de primeira ordem do sistema mecânico não linear com absorvedor não linear descrito na seção 4.1. Considerando dois termos de expansão de *x*, a solução pode ser expressa como:

$$x_1(t;\varepsilon) = x_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{11}(T_0, T_1), \tag{4.7}$$

$$x_2(t;\varepsilon) = x_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{21}(T_0, T_1), \tag{4.8}$$

onde $T_0 = t$ e $T_1 = \varepsilon t$, uma vez que, neste trabalho, a expansão será realizada até $O(\varepsilon)$, e $x_j, j = 1,2$ são funções a serem determinadas.

As derivadas de primeira e segunda ordem de x em relação ao tempo devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_n. Assim, tem-se que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \varepsilon D_1 , \tag{4.9}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial(D_0 + \varepsilon D_1)}{\partial T_1} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 , \tag{4.10}$$

onde $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}, n = 0,1$.

Substituindo as eqs. (4.9) e (4.10) nas eqs. (4.3) e (4.4) e ordenando cada termo em relação as potências de ε^0 e ε^1, tem-se, respectivamente, o seguinte conjunto de equações:

- Para ordem ε^0:

$$\left(D_0^2 + \omega_1^2\right)x_{10} = 0 , \tag{4.11}$$

$$\left(D_0^2 + \omega_2^2\right)x_{20} = \omega_2^2 x_{10} . \tag{4.12}$$

- Para ordem ε^1:

$$\begin{aligned}\left(D_0^2 + \omega_1^2\right)x_{11} = {} & f\cos(\Omega T_0) - 2D_0D_1x_{10} - \xi_1 D_0 x_{10} - \alpha_1 x_{10}^3 + \alpha_2 x_{20} \\ & + \alpha_3(x_{20} - x_{10})^3 - \xi_2 D_0(x_{10} - x_{20}),\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\left(D_0^2 + \omega_2^2\right)x_{21} = -2D_0D_1x_{20} + \omega_2^2 x_{11} + \beta_1(x_{20} - x_{10})^3 - \xi_3 D_0(x_{20} - x_{10}). \tag{4.14}$$

As soluções gerais das eqs. (4.11) e (4.12 podem ser expressas nas seguintes formas:

$$x_{10} = Ae^{i\omega_1 T_0} + cc , \tag{4.15}$$

$$x_{20} = Be^{i\omega_2 T_0} + \Gamma_1 A e^{i\omega_1 T_0} + cc\,, \tag{4.16}$$

onde $\Gamma_1 = \dfrac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$, A e B são funções desconhecidas em T_1 e , que podem ser determinadas a partir da eliminação dos termos seculares e *cc* representa o conjugado dos termos anteriores. As soluções particulares das eqs. (4.13) e (4.14), depois de eliminar os termos seculares, são dadas por:

$$\begin{aligned} x_{11} = {} & Ce^{i\omega_1 T_0} + U_1 e^{i\Omega T_0} + H_1 e^{3i\omega_1 T_0} + H_2 e^{i\omega_2 T_0} + H_3 e^{3i\omega_2 T_0} + H_4 e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} \\ & + H_5 e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + H_6 e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + H_7 e^{i(\omega_1-2\omega_2)T_0} + cc\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} x_{21} = {} & De^{i\omega_2 T_0} + U_2 e^{i\Omega T_0} + H_8 e^{i\omega_1 T_0} + H_9 e^{3i\omega_1 T_0} + H_{10} e^{3i\omega_2 T_0} + H_{11} e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} \\ & + H_{12} e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + H_{13} e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + H_{14} e^{i(\omega_1-2\omega_2)T_0} + cc\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $C, D, U_s, s = 1,2$ e $H_k, k = 1,..14$ são funções complexas em T_1, apresentadas no Apêndice A.

Contudo, a solução geral de x_1 e x_2 até a aproximação de primeira ordem é dada por:

$$x_1 = x_{10} + \varepsilon x_{11}\,, \tag{4.19}$$

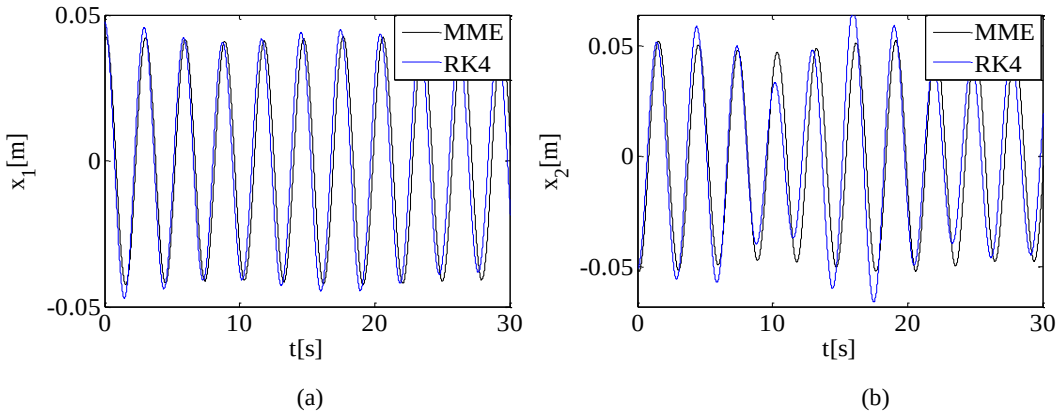
$$x_2 = x_{20} + \varepsilon x_{21}\,. \tag{4.20}$$

4.2.1 Avaliação da resposta obtida pelo Método das Múltiplas Escalas

A busca por soluções precisamente aproximadas de uma equação diferencial não linear é basicamente realizada de duas maneiras: métodos numéricos e métodos analíticos aproximados. Nos métodos numéricos o sistema é resolvido por integração numérica das equações de movimento. Já a aproximação analítica é obtida quando algum parâmetro do problema pode ser considerado pequeno, sendo que métodos para realizar estas aproximações, são denominados Métodos de Perturbação (BORGES, 2000).

A Figura 4.2, apresenta as soluções numéricas para o sistema, obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), e as soluções analíticas, (eqs. (4.19) e (4.20)) obtidas através do MME, de modo a avaliar-se a eficiência do Método de Perturbação aplicado ao sistema não linear em questão. Os valores dos parâmetros utilizados estão listados na Tabela 4.1 mostrada anteriormente.

Figura 4. 2 – (a) Sistema principal e (b) Absorvedor.



Fonte: o autor.

Observa-se que, tanto para o sistema principal, Figura 4.2 (a), quanto para o absorvedor, Figura 4.2 (b) a solução geral de x_1 e x_2 (eqs. (4.19) e (4.20) respectivamente), encontradas através da aplicação do MME, pouco diferem das soluções numéricas obtidas pelo método de RK4 para o sistema de eqs. (4.3) e (4.4).

Dessa maneira, verifica-se que a solução geral obtida pelo método de perturbação com a aproximação de primeira ordem, é muito próxima da solução numérica para o sistema não linear em questão. Vale destacar que, a teoria de perturbação só é válida para pequenos valores do parâmetro de perturbação e que para uma maior precisão da solução analítica, geralmente, é necessário a consideração de termos de ordens superiores na expansão (MARQUES, 2013).

4.3 Estudo da Estabilidade do Sistema Mecânico Não Linear

A seguir, a estabilidade do sistema vibratório de dois graus de liberdade (g.d.l.), com amortecimento, é investigada para o , ou seja, em que a frequência da excitação externa Ω, é muito próxima da frequência natural $\Omega \cong \omega_1$. Em vez de usar a frequência de excitação Ω como parâmetro, introduz-se um parâmetro de sintonia σ, tal que:

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma\,, \tag{4.21}$$

que descreve quantitativamente a proximidade de Ω para ω_1 e $\sigma = O(1)$.

Substituindo a eq. (4.21) nas eqs. (4.13) e (4.14) e eliminando os termos seculares conduz às seguintes condições de solvibilidade:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A = {} & \left[-\xi_1 i\omega_1 + \alpha_2\Gamma_1 + \xi_2 i\omega_1(\Gamma_1 - 1)\right]A - 3\left[\alpha_1 + \alpha_3(\Gamma_1 - 1)^3\right]A^2\overline{A} \\ & + 6\alpha_3(\Gamma_1 - 1)AB\overline{B} + \frac{f}{2}e^{i\sigma T_1}\,, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} 2iD_1\omega_2 B = {} & \frac{\omega_2^2}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}\left[6\alpha_3(\Gamma_1 - 1)^2 A\overline{A}B + \left(\xi_2 i\omega_2 + \alpha_2\right)B + 3\alpha_3 B^2\overline{B}\right] \\ & - 6\beta_1(\Gamma_1 - 1)^2 A\overline{A}B - \xi_3 i\omega_2 B - 3\beta_1 B^2\overline{B}\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Expressando as funções complexas A e B, na forma polar, como:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\theta}\,, \tag{4.24}$$

$$B = \frac{1}{2}be^{i\gamma}\,, \tag{4.25}$$

onde a, b, θ e γ são reais. Substituindo as eqs. (4.24) e (4.25) nas eqs. (4.22) e (4.23) e separando as partes real e imaginária, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$a' = c_1 a - d\ sen\ (\eta), \tag{4.26}$$

$$a\eta' = c_2 a + c_3 a^3 + c_4 ab^2 - d\cos\ (\eta), \tag{4.27}$$

$$b' = c_5 b\,, \tag{4.28}$$

$$b\gamma' = c_6 b + c_7 b^3 + c_8 a^2 b\,, \tag{4.29}$$

onde,

$$d = \frac{f}{2\omega_1}, c_1 = \frac{1}{2}\left[-\xi_1 + \xi_2(\Gamma_1 - 1)\right], c_2 = -\frac{1}{2\omega_1}\alpha_2\Gamma_1, c_3 = \frac{3}{8\omega_1}\left[\alpha_1 - \alpha_3(\Gamma_1 - 1)^3\right], \tag{4.30}$$

$$c_4 = -\frac{3}{4\omega_1}\alpha_3(\Gamma_1 - 1), c_5 = \frac{1}{2}\left(\xi_2\omega_2^2\Gamma_2 - \xi_3\right), c_6 = \frac{1}{2}\alpha_2\Gamma_2\omega_2, c_7 = -\frac{3}{8}\alpha_3\omega_2\Gamma_2 + \frac{3}{8\omega_2}\beta_1\,, \tag{4.31}$$

$$c_8 = -\frac{3}{4}\alpha_3(\Gamma_1 - 1)^2\omega_2\Gamma_2 + \frac{3}{4\omega_2}\beta_1(\Gamma_1 - 1)^2\,, \tag{4.32}$$

e $\Gamma_2 = \dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \eta = \theta - \sigma T_1$. Além disso, a e θ são amplitudes e fase do sistema principal, respectivamente, b e γ são amplitudes e fase do absorvedor.

Na busca das soluções estacionárias, faz-se $a' = b' = \eta' = \gamma' = 0$ em (4.26) – (4.29). Dessa maneira, os valores estacionários tornam-se soluções do sistema algébrico dado pelas equações de (4.33) a (4.36):

$$c_1 a - d sen(\eta) = 0\,, \tag{4.33}$$

$$(c_2 - \sigma)a + c_3 a^3 - c_4 a b^3 - d\cos(\eta) = 0\,, \tag{4.34}$$

$$c_5 b = 0\,, \tag{4.35}$$

$$c_6 b + c_7 b^3 + c_8 a^2 b = 0\,. \tag{4.36}$$

Resolvendo as equações algébricas resultantes, eqs. (4.33) – (4.36) produz três possibilidades para os pontos fixos, a saber:

- Caso (1): $a \neq 0, b = 0$;
- Caso (2): $a = 0, b \neq 0$;

- Caso (3): $a \neq 0, b \neq 0$.

dos quais apenas o primeiro pode acontecer.

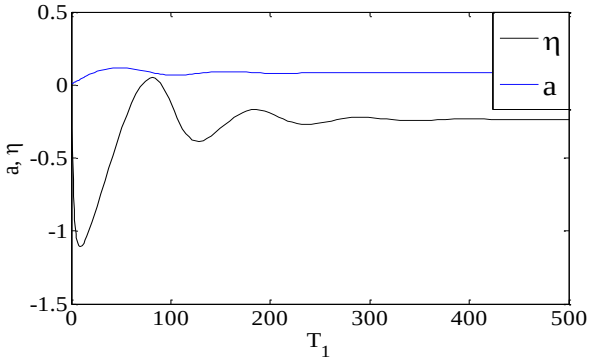
Assim, considerando $b = 0$ e elevando ao quadrado os dois lados de cada uma das eqs. (4.33) e (4.34) e somando-as, obtém-se:

$$\left[\left(c_2 - \sigma + c_3 a^2\right)^2\right] a^2 + c_1^2 a^2 = d^2 \quad , \tag{4.37}$$

que representa a equação da resposta em frequência do sistema.

Vale mencionar que, os valores de a e η são soluções das eqs. (4.33) e (4.34), uma vez que considera-se o caso (1), em que $b = 0$. A variação de a e η em relação a T_1 é apresentada na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Variação de a e η calculada numericamente.



Fonte: o autor.

A Figura 4.3 mostra a variação de a e η em relação a T_1 calculada numericamente à partir das eqs. (4.33) e (4.34), para $\sigma = 0$, $b = 0$, $a(0) = 0.01$ e $\eta(0) = 0.01$. Nela, observa-se que, a princípio, a e η apresentam oscilações mas, no estado estacionário tornam-se constantes.

A estabilidade do sistema sob ressonância primária será estudada utilizando o Método de Andronov e Vitt (Nayfeh and Mook, 1979). Dessa forma, considera-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} a = a_0 + a_1 \\ \eta = \eta_0 + \eta_1 \\ b = b_0 + b_1 \end{cases}, \tag{4.38}$$

onde a_0, η_0 e b_0 são soluções em estado estacionário das Eqs. (4.33) – (4.36) e a_1, η_1 e b_1 são pequenas perturbações.

Substituindo o sistema de eqs. (4.38) nas eqs. (4.33) – (4.36) obtém-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ \eta_1' \\ b_1' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} a_1 \\ \eta_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

onde J é a matriz Jacobiana dada por:

$$J = \begin{bmatrix} c_1 & -(c_2 - \sigma)a_0 - c_3 a_0^3 & 0 \\ \dfrac{(c_2 - \sigma)}{a_0} & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix}, \tag{4.40}$$

Sendo assim, a equação característica escrita como:

$$\lambda^3 + c_9\lambda^2 + c_{10}\lambda + c_{11} = 0, \tag{4.41}$$

onde

$$c_9 = -2c_1 - c_5, c_{10} = 3a_0^4 c_3^2 + 4a_0^2 c_2 c_3 - 4a_0^2 c_3 \sigma + c_2^2 - 2c_2\sigma + c_1^2 + 2c_5 c_1 + \sigma^2, \tag{4.42}$$

$$c_{11} = -3c_5 a_0^4 c_3^2 - 4c_5 a_0^2 c_2 c_3 + 4c_5 a_0^2 c_3 \sigma - c_5 c_2^2 + 2c_5 c_2 \sigma - c_5 c_1^2 - c_5 \sigma^2, \tag{4.43}$$

Os zeros da equação característica é dada pela:

$$-(\lambda - c_5)\left(\lambda^2 - 2\lambda c_1 + 3a_0^4 c_3^2 + 4a_0^2 c_2 c_3 + c_1^2 + c_2^2 - 2c_2\sigma + \sigma^2\right) = 0, \tag{4.44}$$

E os autovalores são:

$$\lambda_1 = c_1 + \sqrt{-\left(c_3 a_0^2 + c_2 - \sigma\right)\left(3c_3 a_0^2 + c2 - \sigma\right)}, \tag{4.45}$$

$$\lambda_2 = c_1 - \sqrt{-\left(c_3 a_0^2 + c_2 - \sigma\right)\left(3c_3 a_0^2 + c2 - \sigma\right)}, \tag{4.46}$$

$$\lambda_3 = c_5 . \tag{4.47}$$

4.4 Bifurcação Sela-nó

A solução real da eq. (4.37) determina a amplitude da resposta do sistema principal em ressonância primária. Nela, existem três soluções reais entre dois pontos de tangente vertical, que são denominados pontos limites de bifurcação, conhecido na literatura como bifurcação sela-nó (ELNAGGAR, KHALIL, 2014).

As localizações dos pontos de saltos são obtidos através da diferenciação da equação de resposta de frequência eq. (4.37) com relação a a^2 e considerando $\frac{d\sigma}{da^2} = 0$. Dessa maneira, a expressão resultante é dada por:

$$\left(c_3 a^2 + c_2 - \sigma\right)^2 + c_1^2 + 2a^2 c_3 \left(c_3 a^2 + c_2 - \sigma\right) = 0 , \tag{4.48}$$

com soluções:

$$\sigma_{\pm} = c_2 + 2c_3 a^2 \pm \sqrt{c_3^2 a^4 - c_1^2} . \tag{4.49}$$

Na Equação (4.49), se $c_3^2 a^4 - c_1^2$ existe um intervalo $\sigma_- < \sigma < \sigma_+$, o qual apresentam três respostas para a amplitude do sistema.

4.5 Critério de Routh-Hurwitz

A região de estabilidade da curva de resposta em frequência eq. (4.37), será determinada pelo critério de Routh-Rurwitz, descrito no Anexo A. Nesse sentido, considerando a eq. (4.41), constrói-se a matriz H :

$$H = \begin{bmatrix} c_9 & c_{11} & 0 \\ 1 & c_{10} & 0 \\ 0 & c_9 & c_{11} \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

As condições necessárias e suficientes para que os coeficientes da eq. (4.41) e os determinantes da matriz de Hurwitz, eq. (4.50), possuam parte real são negativa são:

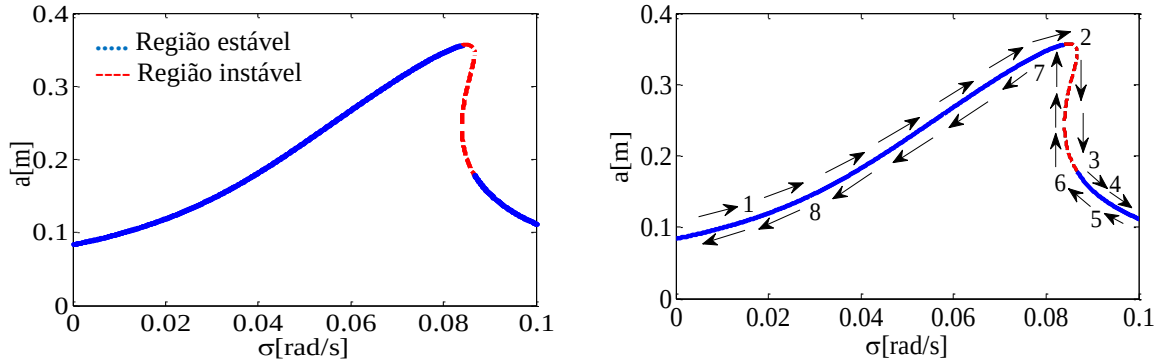
$$c_9 > 0, c_{10} > 0, c_{11} > 0, c_9 c_{10} - c_{11} > 0 \text{ e } c_9 c_{10} c_{11} - c_{11}^2 > 0. \tag{4.51}$$

Quando estas condições são satisfeitas, os pontos fixos são estáveis, caso contrário, são instáveis.

4.6 Resposta em frequência do sistema

A Equação (4.37) é uma equação algébrica não linear resolvida numericamente utilizando o software MATLAB ® e o resultado é apresentado na Figura 4.4. Nesta figura, a curva resposta em frequência é composta por linhas contínuas e tracejadas, que representam as soluções estáveis e instáveis, respectivamente, determinadas de acordo com o Critério de Routh-Hurwitz, conforme descrito na Subseção anterior.

Figura 4. 4 – (a) Amplitude do sistema principal em ressonância primária para *f = 0.2N*, (b) descrição do fenômeno de salto.



(a) (b)

Fonte: o autor.

Na Figura 4.4 (a), observa-se que a curva apresenta, uma das características marcantes de sistemas não lineares, o fenômeno de salto (*jump phenomenon*). A resposta em frequência do sistema principal possui amplitude de pico em $a_{max}=0.3568m$ que ocorre em $\sigma = 0.0850$ *rad/s* e *a* apresenta uma região instável no intervalo de $0.08399 < \sigma < 0.08669$, conforme mostra os autovalores listados na Tabela 4.2.

A Figura 4.4 (b) apresenta uma descrição do fenômeno de salto. Se a experiência começar no ponto 1 e a frequência é aumentada gradualmente, ocorrendo um salto do ponto 2 ao 3, acompanhadas por mudanças na amplitude e fase. Quando a frequência é ainda maior, a amplitude segue da trecho 3 para o ponto 4. Por outro lado, diminuindo o valor da frequência, a resposta segue a curva ao longo das passagens 5 – 6 – 7 – 8.

Tabela 4. 2 – Autovalores do sistema não linear com absorvedor não linear com $f = 0.02$.

σ	λ_1	λ_2	λ_3
0	-0.013762 + 0.05872i	-0.013762 - 0.05872i	-0.045238
0.08	-0.013762 + 0.014051i	-0.013762 - 0.014051i	-0.045238
0.08398	-0.013762 - 0.0073204i	-0.013762 + 0.0073204i	-0.045238
0.08399	-0.013762 + 0.007265i -0.028148 -0.026818	-0.013762 - 0.007265i 0.00062373 -0.00070583	-0.045238
0.08669	-0.013762 +0.01465i -0.026881 -0.028113	-0.013762 - 0.01465i -0.00064263 0.00058928	-0.045238
0.08671	-0.013762 + 0.01472i	-0.013762 - 0.01472i	-0.045238
0.09	-0.013762 + 0.023129i	-0.013762 - 0.023129i	-0.045238
0.1	-0.013762 + 0.03856i	-0.013762 - 0.03856i	-0.045238

Fonte: o autor.

A Tabela 4.2 apresentam os autovalores do sistema não linear com absorvedor não linear para $f = 0.02$, calculados através das Eqs. (4.45) à (4.47). Observa-se que no intervalo de $0.08399 < \sigma < 0.08669$ obtém-se três autovalores, sendo que λ_1 e λ_3 estão relacionados com a resposta estável e λ_2 com a resposta instável, uma vez que o sinal da parte real é positiva.

Vale ressaltar que, a região de estabilidade da curva também é determinada mediante a aplicação do critério de Routh Hurwitz, conforme descrito na seção 4.5.

Capítulo 5

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos através simulações computacionais do sistema não linear com absorvedor não linear, para o caso de ressonância primária. O intuito é analisar o comportamento do sistema para diferentes valores de amplitude de força. Sendo assim, serão mostrados figuras onde se estuda: respostas no domínio do tempo, planos de fase e seções de Poincaré. As simulações foram realizadas no software Matlab®, e considera-se as condições iniciais nulas. Com os resultados obtidos, são identificados os comportamentos principais deste sistema dinâmico.

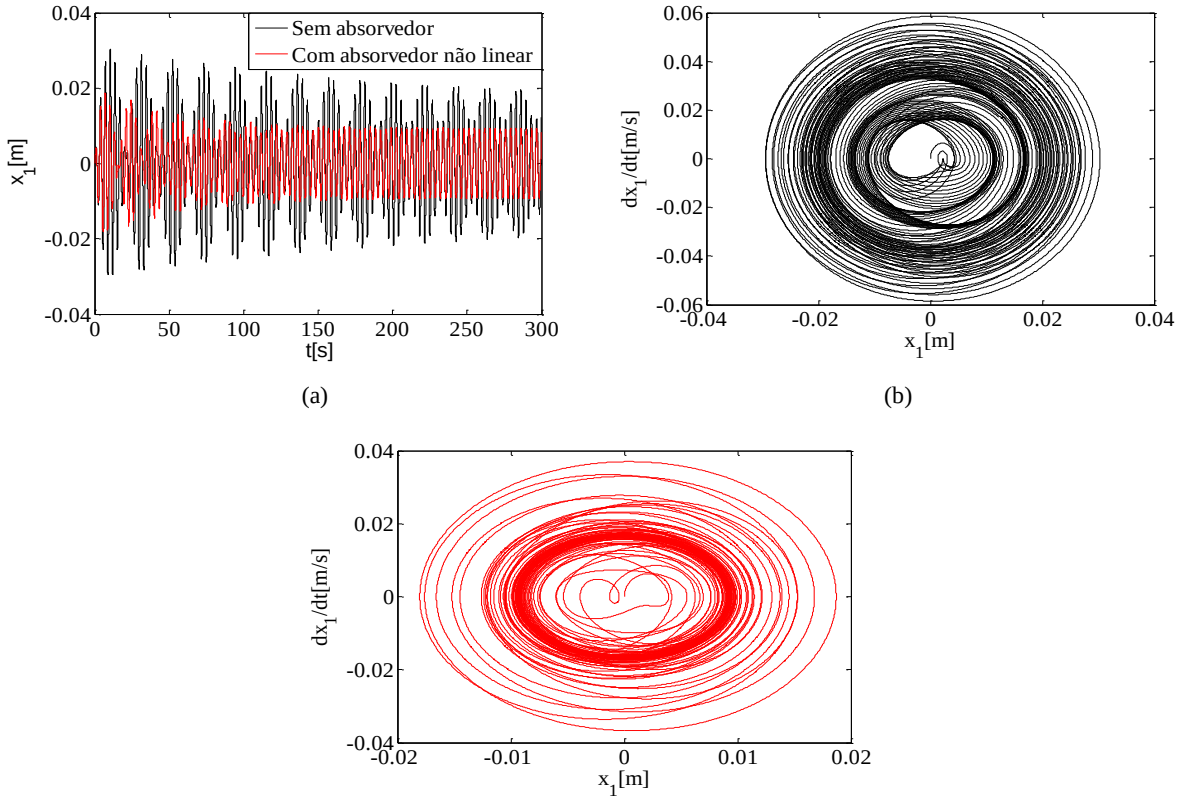
5.1 Análise das Respostas no Domínio do Tempo para o Sistema

A solução numérica do sistema não linear em questão, será obtida pela integração das eqs. (4.3) e (4.4). Para isso, inicialmente é necessário transformá-las em um sistema de equações primeira ordem, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon\alpha_1 x_1^3 - \varepsilon\xi_1 y_1 + \varepsilon\alpha_2 x_2 + \varepsilon\alpha_3 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon\xi_2 (y_1 - y_2) + \varepsilon f \cos(\Omega t) \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 (x_2 - x_1) - \varepsilon\beta_1 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon\xi_3 (y_2 - y_1) \end{cases} \tag{5.1}$$

A Figura 5.1 apresenta o comportamento do sistema principal não linear sem absorvedor e com absorvedor, em ressonância primária, isto é, para $\Omega \cong \omega_1$. Nesse caso, considera-se as condições iniciais nulas e os valores de parâmetros $\alpha_1 = 0.8$, $\xi_1 = 0.01$ e $f = 0.02$.

Figura 5. 1 – (a) Respostas no domínio do tempo do sistema não linear sem absorvedor e com absorvedor não linear, (b) plano de fase do sistema principal sem absorvedor e (c) sistema principal com absorvedor não linear para *f = 0.02*.

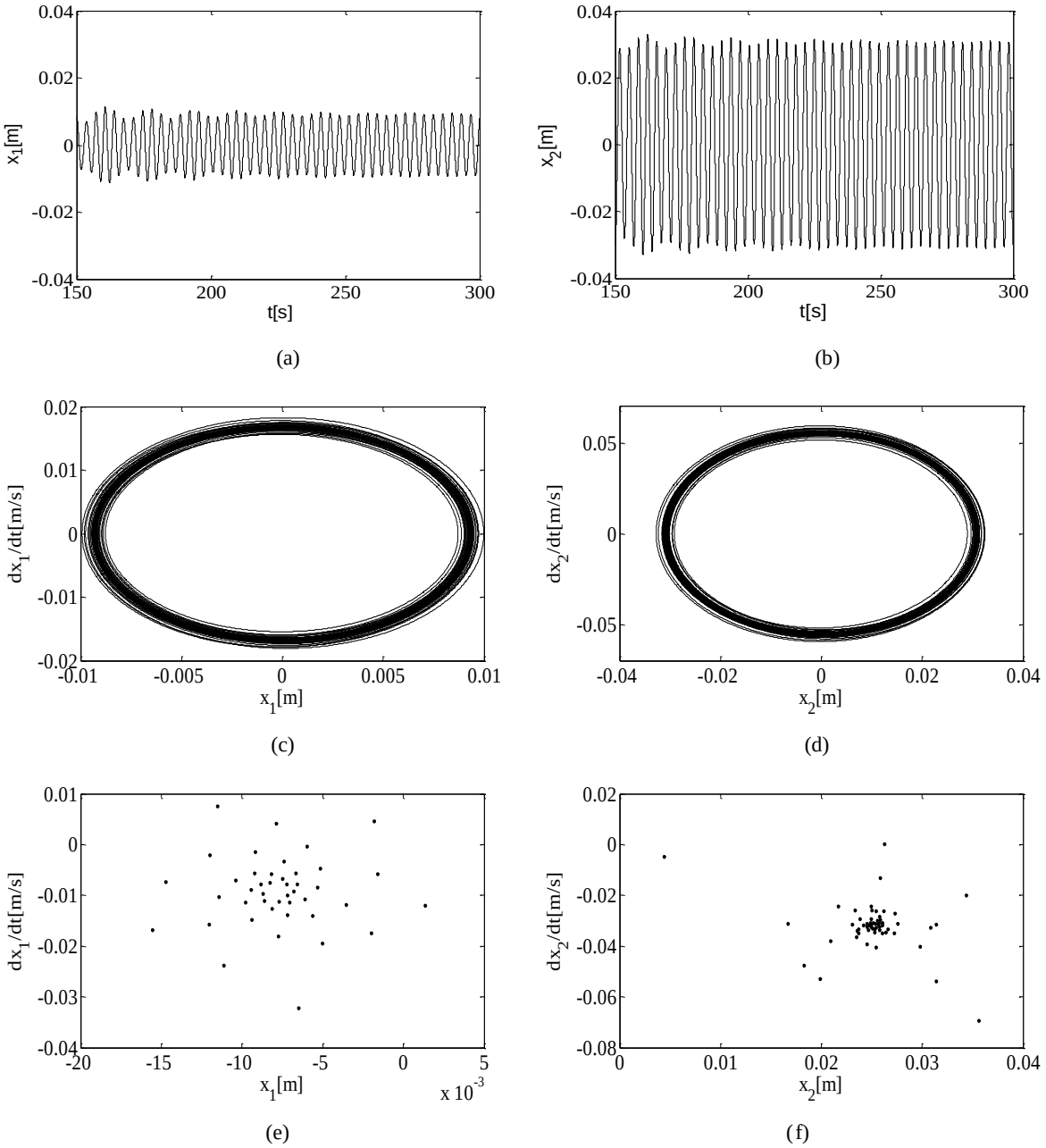


Fonte: o autor.

Na Figura 5.1 (a), observa-se que a inserção do absorvedor não linear proporciona uma atenuação na amplitude da resposta do sistema em questão. Porém, o plano de fase do sistema principal sem absorvedor (Figura 5.1 (b)) apresenta-se mais bem comportado quando comparado ao plano de fase do sistema principal com absorvedor não linear (Figura 5.2 (c)).

As respostas no domínio do tempo, os planos de fase e as seções de Poincaré do sistema principal e do absorvedor, originárias da variação do parâmetro de amplitude de força *f*, são apresentadas nas Figuras 5.2 – 5.7. Sendo considerados diferentes valores para a amplitude de força *f*, a fim de verificar a influência deste parâmetro no comportamento tanto do sistema principal quando do absorvedor.

Figura 5. 2 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal não linear e do absorvedor não linear, respectivamente, para *f = 0.02.*



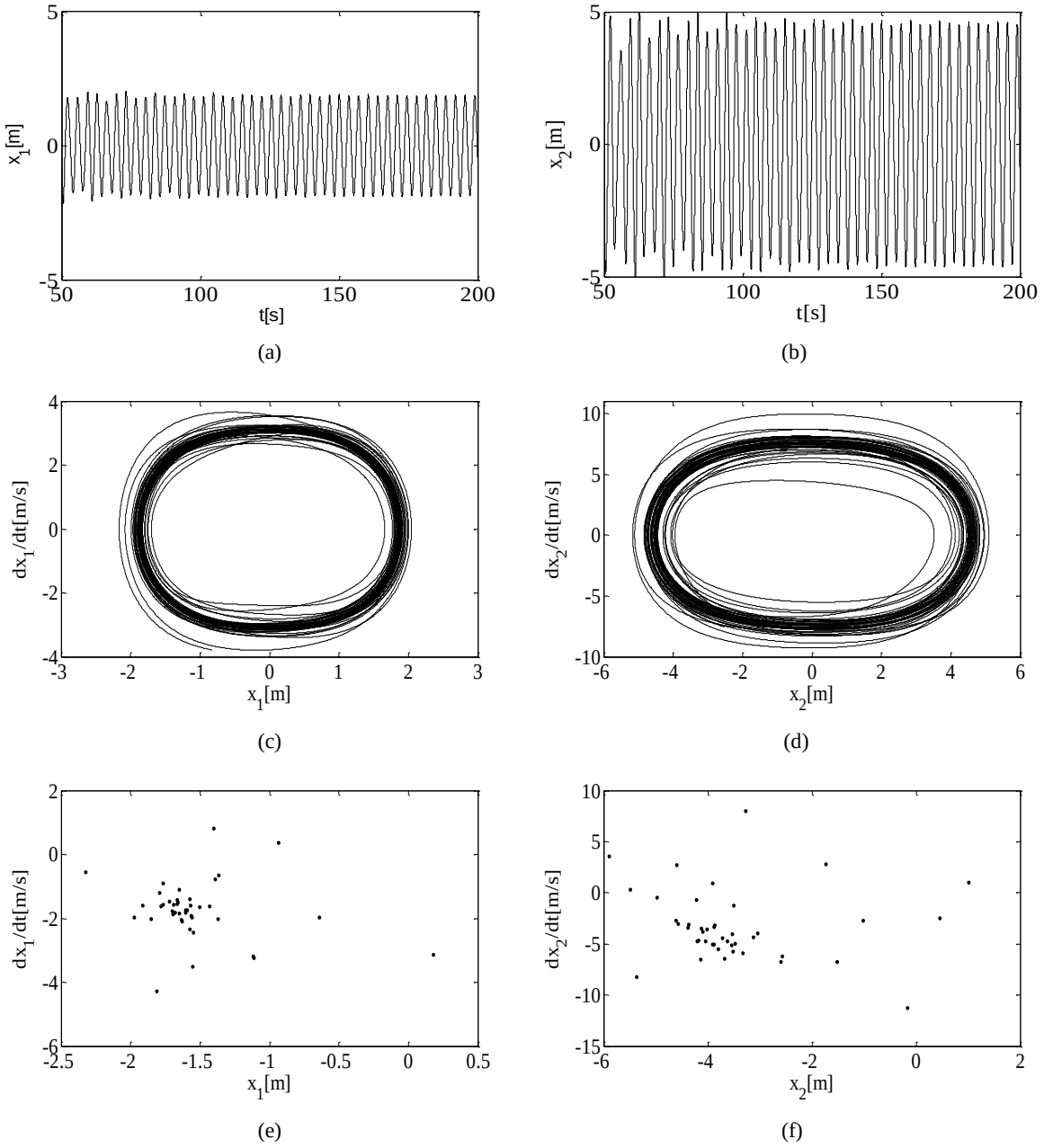
Fonte: o autor.

Vale mencionar que, neste estudo, considerou-se o caso de ressonância primária $\Omega = \omega_1$ e as condições iniciais nulas, isto é, $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, y_1(0) = 0$. As simulações foram realizadas eliminando a parte transiente inicial, e os valores dos parâmetros do sistema (5.1), estão listados na Tabela 4.1.

Quando *f = 0.*02, observa-se que os gráficos da evolução no domínio tempo, Figura 5.2 (a) e (b), sistema principal e absorvedor, respectivamente, exibem oscilações de baixa

amplitude em torno do ponto zero as quais são inicialmente irregulares e, após um período de tempo, se tornam regulares. As curvas fechadas presentes nos retratos de fases, Figura 5.2 (c) e (d), sistema principal e absorvedor, respectivamente, mostram que ambos apresentam comportamentos periódicos. Assim, como as seções de Poincaré, Figura 5.2 (c) e (d), sistema principal e absorvedor, respectivamente, que apresentam pontos agrupados no plano.

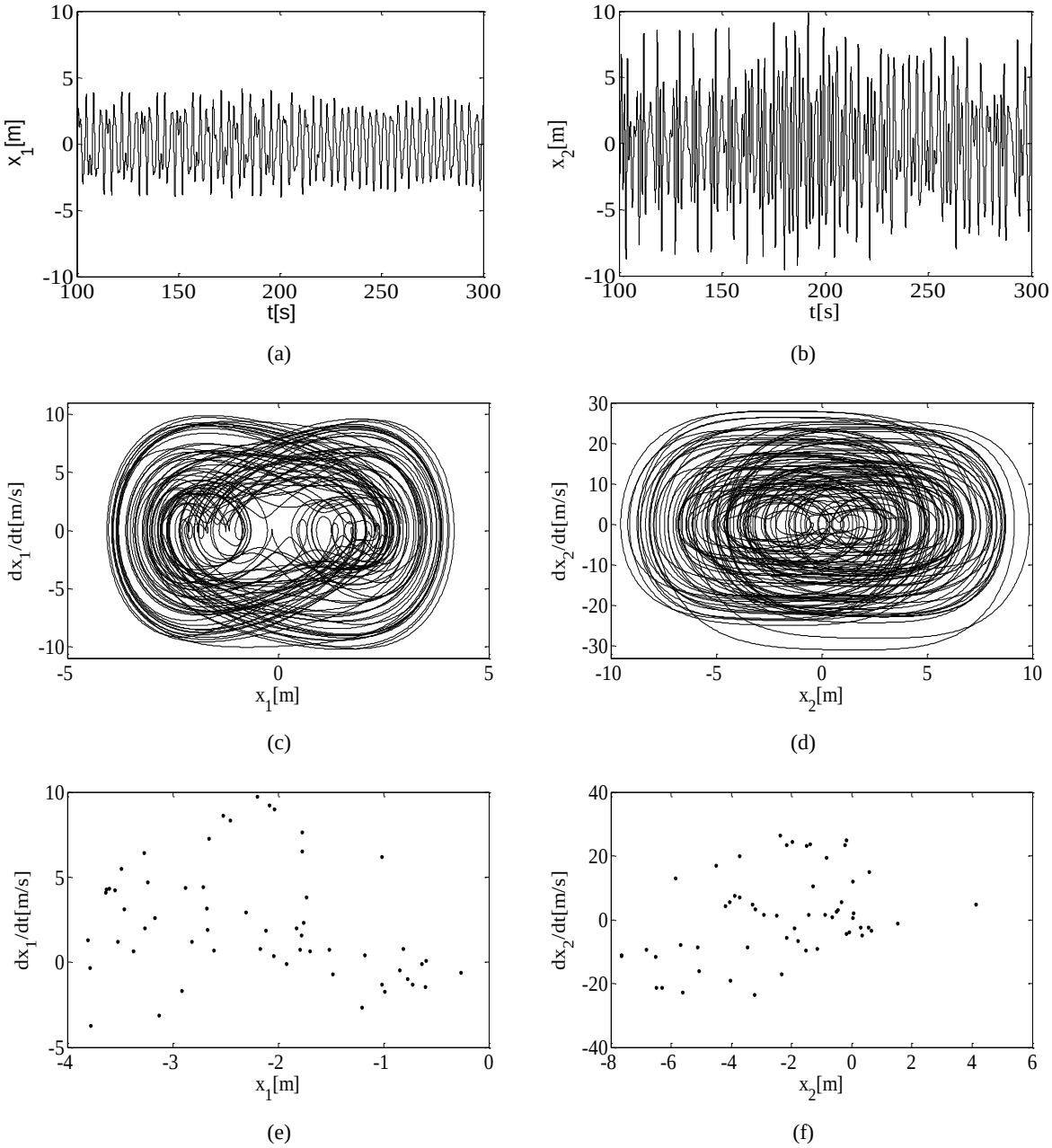
Figura 5. 3– Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 5*.



Fonte: o autor.

Para $f = 5$, Figura 5.3 (a) e (b), nota-se um aumento considerável nas amplitudes de resposta tanto do sistema principal quanto do absorvedor. Na Figura 5.3 (c) e (d), os planos de fase, também, apresentaram um aumento nas oscilações. Entretanto, ambos os sistemas continuam apresentando comportamento consideravelmente estável, conforme observa-se nas seções de Poincaré, Figura 5.3 (e) e (f).

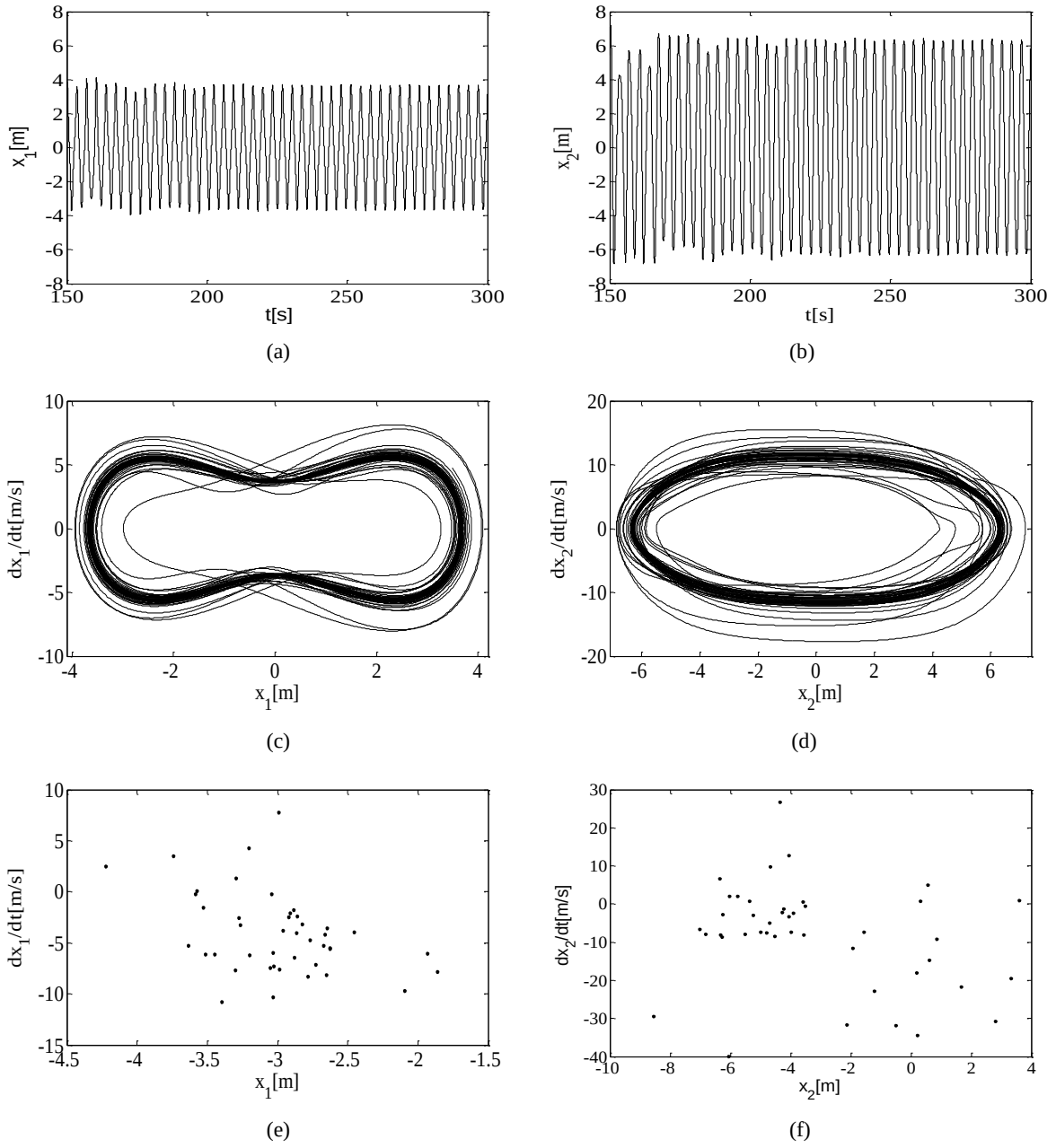
Figura 5. 4 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para $f = 15$.



Fonte: o autor.

Em *f = 15*, observa-se que, a resposta no domínio do tempo do sistema principal e do absorvedor, Figura 5.4 (a) e (b), respectivamente, apresentam oscilações irregulares e não há repetição do período. Na visualização dos espaços de fase, Figura 5.4 (c) e (d), sistema principal e absorvedor, respectivamente, verifica-se indícios de comportamento caótico. Tal comportamento é evidenciado através da análise das seções de Poincaré, do sistema principal e do absorvedor, Figura 5.4 (d) e (e), respectivamente, uma vez que, elas apresentam um grande número de pontos, espalhados de uma maneira irregular no plano.

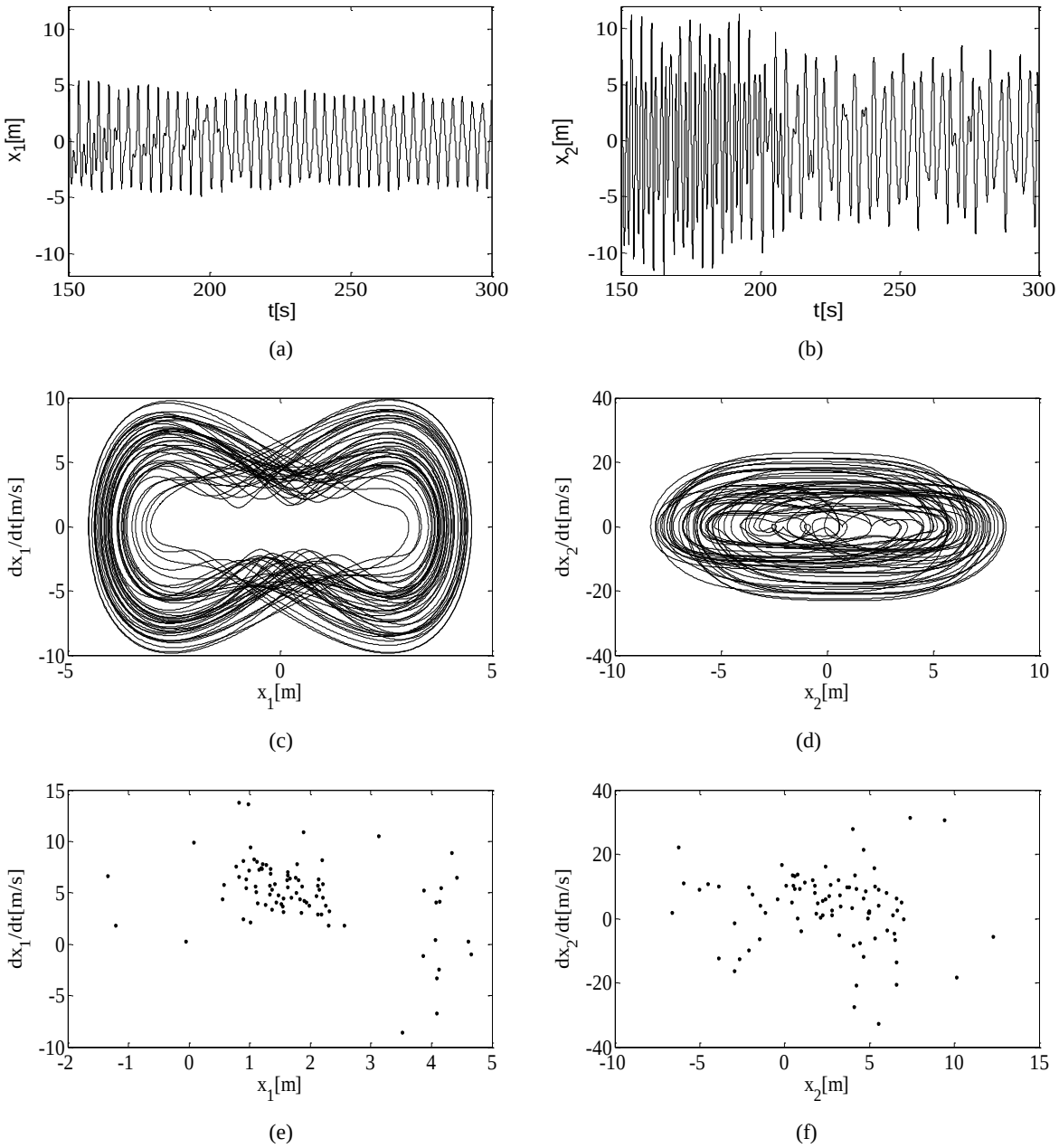
Figura 5. 5 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 25*.



Fonte: o autor.

Para *f = 25*, Figura 5.5, destaca-se que o comportamento do sistema principal e do absorvedor apresenta-se mais estável quando comparado com o resultado de *f = 15* da Figura 5.4, porém ele ainda apresenta comportamento caótico.

Figura 5. 6 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 30*.

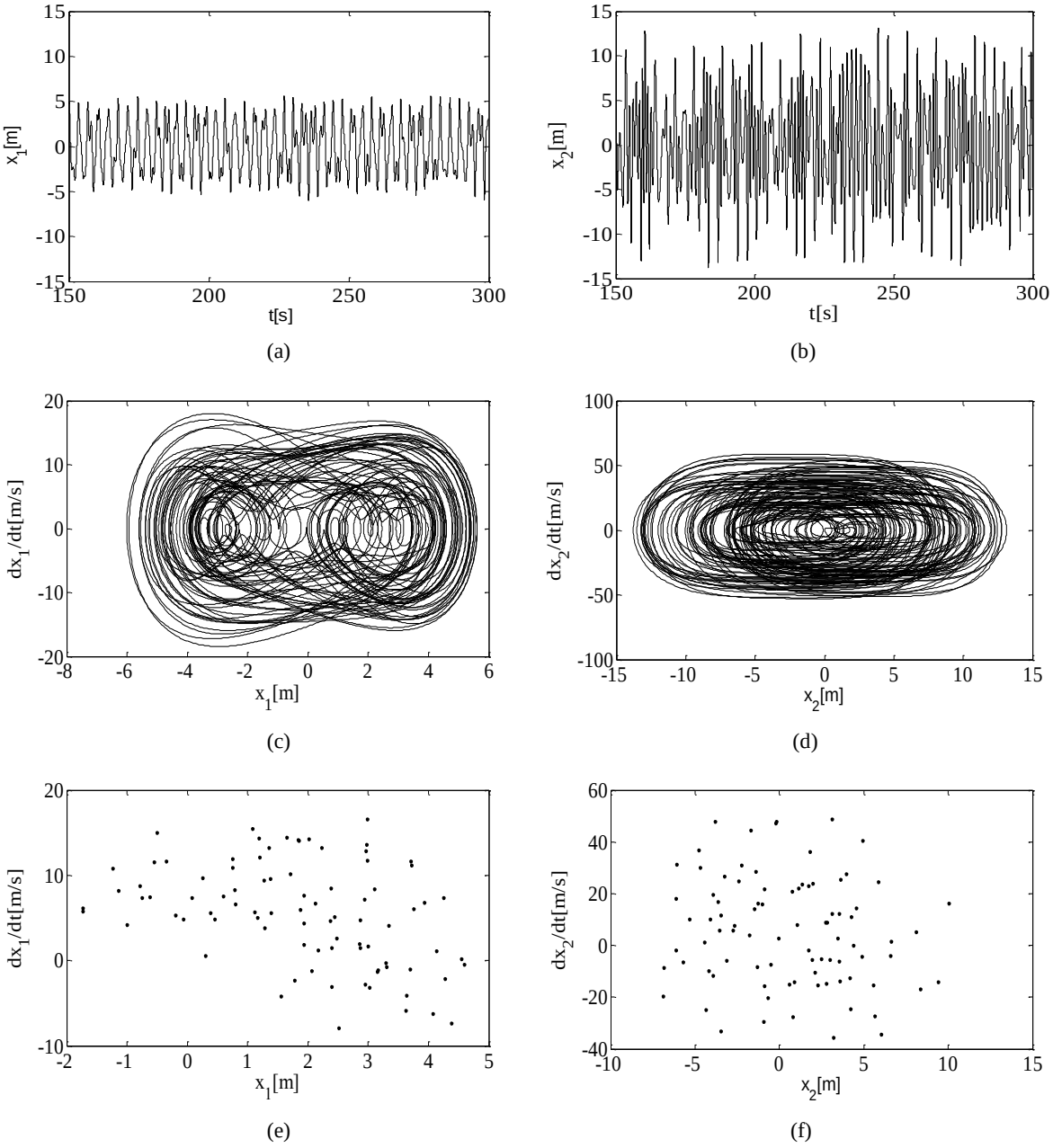


Fonte: o autor.

Em *f = 30*, apresentado na Figura 5.6, o sistema continua evidenciando um comportamento caótico, porém apresenta um aumento nas oscilações irregulares. Nesse

sentido, observa-se que a interseção das trajetórias dos sistemas, tanto principal quanto do absorvedor, com o plano, Figura 5.6 (e) e (f), permanece exibindo um grande número pontos espalhados no plano.

Figura 5. 7 – Respostas no domínio do tempo (a) e (b), planos de fase (c) e (d) e seções de Poincaré (e) e (f) do sistema principal e do absorvedor, respectivamente, para *f = 40*.



Fonte: o autor.

Para *f = 40* o comportamento continua evidente, conforme mostra a Figura 5.7. De modo geral, destaca-se que tanto o sistema principal quanto o absorvedor apresentam grandes oscilações, com aumento na amplitude de resposta.

A seguir, o comportamento do sistema não linear com absorvedor não linear será analisado, para os diferentes valores do parâmetro de amplitude de força Γ, utilizando-se o critério do expoente de Lyapunov, o qual classifica a estabilidade de acordo com o sinal do maior expoente.

5.2 Expoentes de Lyapunov

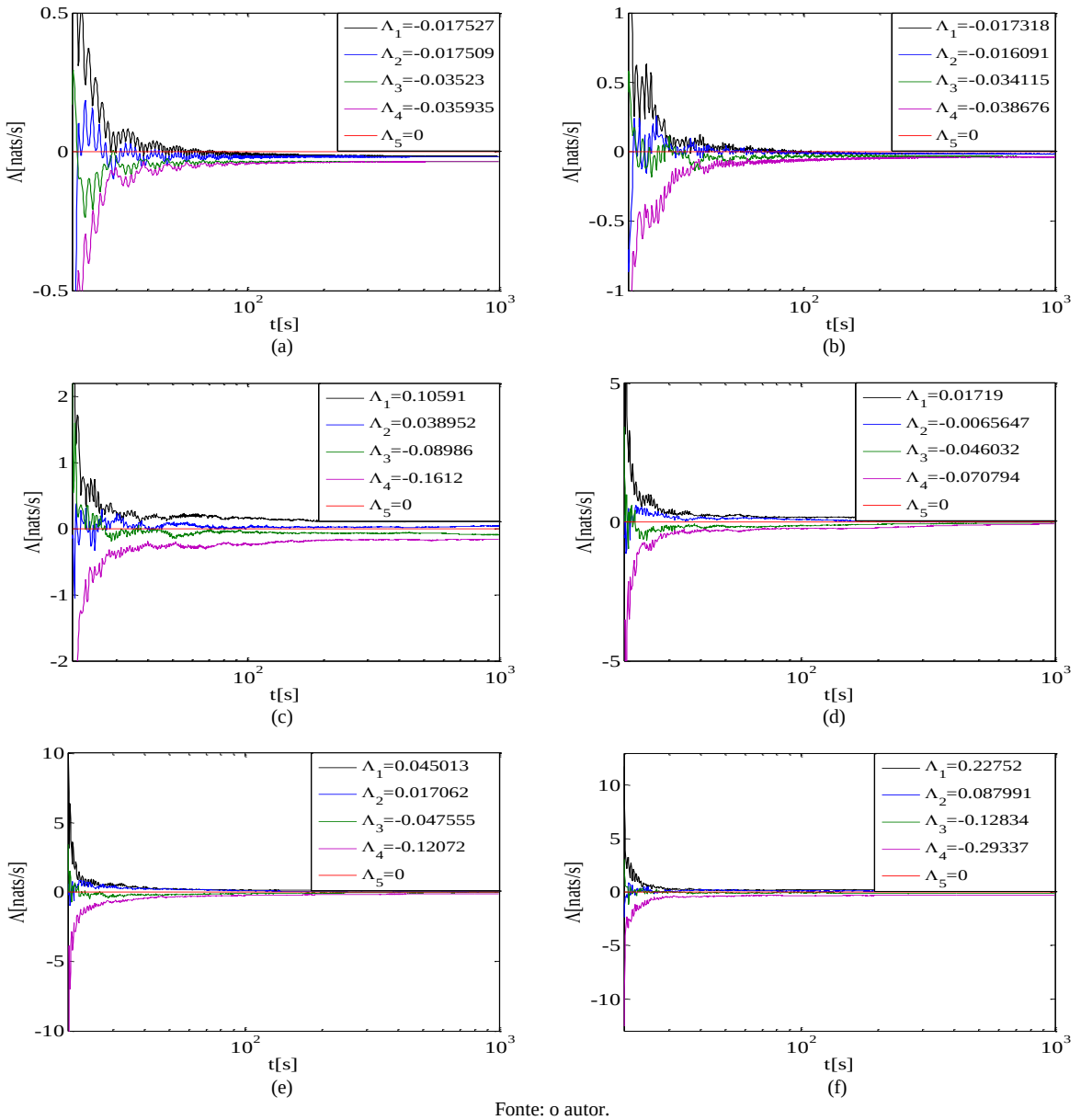
Os expoentes de Lyapunov definem a média da razão exponencial em que se diverge da vizinhança de uma dada trajetória, sendo que o comportamento dinâmico de um sistema pode ser previsto através do sinal do maior expoente.

Nesse sentido, a fim de comprovar a presença de comportamentos periódicos e caóticos do sistema (5.1) em questão, aplica-se a teoria dos expoentes de Lyapunov. No entanto, verifica-se que este sistema trata de um sistema não autônomo, que depende explicitamente da variável temporal. A fim de eliminar tal variável, introduz uma quinta variável $z = t$ e obtém-se um sistema autônomo, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon\alpha_1 x_1^3 - \varepsilon\xi_1 y_1 + \varepsilon\alpha_2 x_2 + \varepsilon\alpha_3 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon\xi_2 (y_1 - y_2) + \varepsilon f \cos(\Omega z) \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 (x_2 - x_1) - \varepsilon\beta_1 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon\xi_3 (y_2 - y_1) \\ \dot{z} = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

A partir do sistema de eqs. (5.2), efetua-se o cálculo dos expoentes de Lyapunov, utilizando-se de um programa computacional implementado no software Matlab®. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.8 de (a) até (f) para os valores $f = 0.02$, (b) $f = 5$, (c) $f = 15$, (d) $f = 25$, (e) $f = 30$ e (f) $f = 40$, respectivamente. Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações estão listados na Tabela 4.1, apresentada na seção 4.1, e as condições iniciais são consideradas nulas. Vale mencionar que, as duzentas primeiras iterações foram eliminadas, visando uma melhor interpretação destes expoentes.

Figura 5. 8 – Evolução dos Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor não linear para (a) *f = 0.02*, (b) *f = 5*, (c) *f = 15*, (d) *f = 25*, (e) *f = 30* e (f) *f = 40*.



Fonte: o autor.

Para *f = 0.02* e *f = 5*, Figuras 5.8 (a) e (b) respectivamente, o sistema tem comportamento periódico, uma vez que o maior de seus expoentes é nulo, indicando que as trajetórias não divergem e, para *f = 15*, *f = 25*, *f = 30* e *f* = 40, nas Fig. (5.7) (c), (d), (e) e (f), respectivamente, confirma-se o comportamento caótico, evidenciado nas simulações anteriores, apresentando estes expoentes de Lyapunov positivos. Nestes casos, há uma separação das trajetórias quando estas migram para determinada direção com o passar do tempo, caracterizando o caos.

A Tabela 5.1 ilustra a evolução dos expoentes de Lyapunov, em relação a variação dos valores da amplitude da força *f*, mostrando apenas os sinais de cada expoente.

Tabela 5. 1 – Sinais dos expoentes de Lyapunov para cada valores de amplitude de força *f* do sistema.

Amplitude de força *f*	Sinal dos Expoentes de Lyapunov			
0.02	–	–	–	–
5	–	–	–	–
15	+	+	–	–
25	+	–	–	–
30	+	+	–	–
40	+	+	–	–

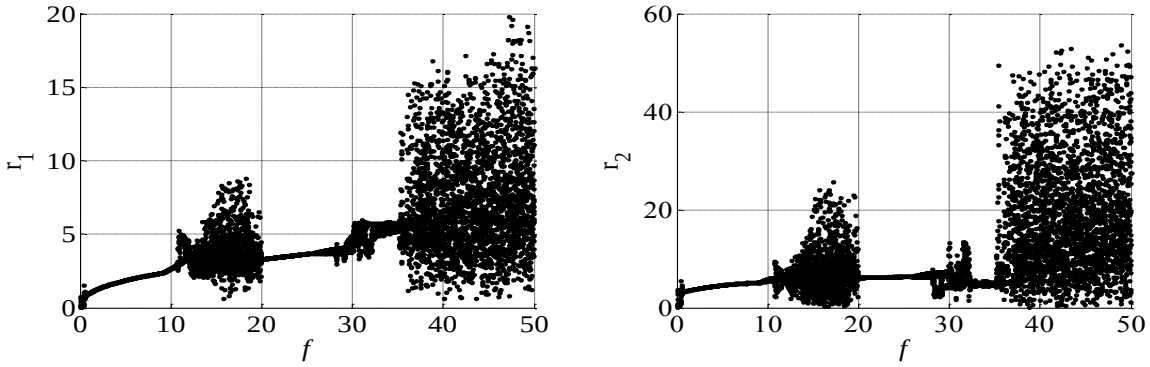
Fonte: o autor.

As respostas no domínio do tempo, os planos de fase e as seções de Poincaré evidenciam a presença de comportamento caótico na dinâmica do sistema, para alguns valores de amplitude de força, o qual é comprovado pela análise dos sinais dos Expoentes de Lyapunov, conforme apresentado na Tabela 5.1. Contudo, visando resumir todos os possíveis comportamentos de como o parâmetro de amplitude de força *f* varia, a seguir, apresenta-se os diagramas de bifurcação do sistema principal e do absorvedor.

5.3 Diagrama de Bifurcação

Visando ter uma ideia do comportamento global do sistema não linear com absorvedor não linear, descrito pelo sistema de eqs. (5.1), na Figura 5.8, apresentam-se os diagramas de bifurcação, produzido usando o segundo método iterativo, descrito na seção 2.7.

Figura 5. 9 – Diagrama de bifurcação do (a) sistema principal e (b) absorvedor não-linear.



(a) (b)

Fonte: o autor.

As Figuras 5.8 (a) e (b), mostram os diagramas de bifurcação do sistema principal e do absorvedor respectivamente, para a amplitude de força no intervalo de $0 < f < 50$. O eixo vertical denominado por r_i representa a distância do ponto no mapa de Poincaré a partir da origem $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. No diagrama de bifurcação, o parâmetro *f* é aumentado de zero para 50 e, em seguida, diminuído de $f = 50$ volta a zero.

No diagrama de bifurcação referente ao sistema principal, Figura 5.8 (a), observa-se que entre $0 < f < 10.5$ aproximadamente, existem regiões onde o parâmetro *f* está associado a um número finito de pontos. Conforme *f* aumenta o sistema passa por um regime caótico, mais precisamente em $10.5 < f < 20$ e, em $20 < f < 26$ apresenta-se mais bem comportado. Quando $26 < f < 50$ tem-se, novamente, um comportamento caótico, que é aumentado para os valores da amplitude da força seguintes.

A Figura 5.8 (b), mostra que o absorvedor apresenta um comportamento bastante similar ao sistema principal, sendo que entre $0 < f < 9$ e $20 < f < 26$ o parâmetro *f* está associado a um número finito de pontos, onde a variável *r* oscila com periodicidade dois, e entre $9 < f < 20$ e para $26 < f < 50$ têm-se as regiões onde o parâmetro *f* apresenta nuvens de pontos, indicando onde ocorre o comportamento caótico.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com este trabalho procurou-se destacar o crescente interesse pelo estudo dos fenômenos não lineares e ressaltar a importância da análise de vibrações em sistemas mecânicos com características não lineares.

Inicialmente, apresentou-se, de maneira geral, os conceitos fundamentais para a análise de sistemas dinâmicos não lineares. Tais conceitos foram exemplificados utilizando-se do oscilador mecânico de Duffing.

Posteriormente, realizou-se uma revisão acerca do Método Perturbação conhecido como Método das Múltiplas Escalas. Após descrever a ideia básica, aplicou-se este método na equação do oscilador de Duffing e avaliou-se a resposta aproximada obtida e estudou a estabilidade do sistema com amortecimento e forçamento externo para o caso de ressonância primária.

A partir deste ponto, pôde-se modelar um sistema mecânico não linear com absorvedor não linear e investigou-se o seu comportamento, também para o caso de ressonância primária. Com a aplicação do Método das Múltiplas Escalas verificou-se que as soluções aproximadas obtidas são bem próximas das soluções numéricas, destacando a eficiência deste método de perturbação. Para o caso de ressonância primária, a resposta em frequência do sistema com o absorvedor, aplicando uma certa força ao mesmo, é composta por uma curva contínua com soluções estáveis e instáveis e a presença do fenômeno de salto. A região de estabilidade das soluções são determinadas pelo critério de Routh-Rurwitz, o qual mostrou-se eficiente na análise tanto para situações de estabilidade quanto de instabilidade. Identificou-se então no intervalo, a região na qual o critério não é satisfeito e, portanto, são região denominada instável.

Na sequência, apresentou-se os resultados numéricos, de diferentes formas, através de gráficos que mostram a evolução das repostas no domínio tempo, na forma de planos de fase e de seções de Poincaré. As simulações foram realizadas com o auxílio do software MATLAB®. As respostas no domínio do tempo, retratos de fase e seção de Poincaré do sistema principal e

do absorvedor mostram trajetórias, inicialmente, irregulares que, com o passar do tempo, tornam-se regulares, evidenciando um comportamento estável para $f = 0.02$ e $f = 5$. A medida que a amplitude de força foi aumentada, observou-se que o sistema apresenta comportamento caótico. Neste caso, foi possível observar nas respostas um emaranhado de curvas que nunca se fecham e seção de Poincaré com diversos pontos espalhados de forma irregular no plano. Além disso, nota-se um aumento considerável nas amplitudes de resposta de ambos os sistemas.

Posteriormente, analisou-se a estabilidade do sistema não linear com absorvedor não linear para os diferentes valores do parâmetro de amplitude de força, utilizando o critério do maior expoente de Lyapunov. Os resultados obtidos comprovam a presença de comportamento caótico na dinâmica do sistema, para alguns valores de amplitude de força.

Por fim, investigou-se o comportamento global deste sistema através da apresentação dos diagramas de bifurcação do sistema principal e do absorvedor. Observou-se que existem regiões onde o parâmetro f está associado a um número finito de pontos e conforme f aumenta o sistema passa por um regime caótico.

Como sugestões para trabalhos futuros, a experiência adquirida com esta pesquisa permite apontar as seguintes possibilidades: analisar o comportamento do sistema para outros casos de ressonância em diversos tipos de sistemas, aplicar métodos de redução de modelos e técnicas de otimização de bio-inspiradas de modo a determinar parâmetros ótimos do absorvedor não linear para controle de vibrações e estudar técnicas para o controle do caos em sistemas mecânicos.

REFERÊNCIAS

BELUSSO, C. L. M. *Análise de Estabilidade do Modelo Não Linear de um Pulverizador Agrícola do Tipo Torre*. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Ijuí, 2011. Citado nas páginas 25, 28, 32 e 84.

BORGES, R A. *Métodos de Perturbação para Equações Algébricas Não Lineares*. 19 f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Goiás - Campus de Catalão, Curso de Especialização em Matemática, Catalão, 2000. Citado nas páginas 43 e 55.

_____. *Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações não-lineares*. 154 f. Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2008. Citados na página 30.

BRIGGS, J. e P., F. D. A sabedoria do caos: sete lições que vão mudar sua vida. Tradução: Cristiana de Assis Serra. Rio de Janeiro: Campus, 2000. Citado na página 11.

COSTA, T. N.; PURCINA, A. B. e BORGES, R. A. *Stochastic Analysis Of Nonlinear Mechanical System*. 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM, 2015, Rio de Janeiro – RJ. Citado na página 25.

ELNAGGAR, A. M. e KHALF, K. M. *The Response of Nonlinear Controlled System Under an External Excitation Via Time Delay State Feedback*. Journal of King Saud University – Engineering Sciences, 2014, http://dx.doi.org/10.1016/j.jksues.2014.01.003. Citado na página 61.

LIMA, R. de Q. *Estudo de Modelos Dinâmicos Lineares e Não Lineares*. Rio de Janeiro. 2008. Citado na página 30.

LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*. Manchester: Birkhäuser Science, 2014. Citado nas páginas 35 e 41.

MARQUES, L. S. *Métodos Perturbativos para o Estudo da Dinâmica Não Linear de uma partícula*. 36 f. Trabalho Final de Curso (Bacharel) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2013. Citado na página 56.

MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos.* 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. Citado na página 27.

NAYFEH, A, H. *Perturbation Methods*. Jonh Wiley & Sons, 2004. Citado na página 26.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley & Sons, 1979. Citado nas páginas 53 e 59.

PIRES, F. F. *Estudo da Dinâmica Não-Linear de Backlash em Engrenagens de Dentes Retos*. 41 f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado) - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, Brasília, 2013. Citado na página 35.

PURCINA, A. B. e BORGES, R. A. "*Estudo Numérico E Computacional De Um Absorvedor Dinâmico De Vibrações Com Característica Não Linear*", p. 199 - 209 . In: Seminário de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação da Regional Catalão – SPPGI (2.:2014:Goiás) Coletânea Interdisciplinar em Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação – Volume 4: Ciências Exatas e Tecnológicas. Anais [livro eletrônico] / organizado por Adriana Freitas Neves, Idelvone Mendes Ferreira, Maria Helena de Paula, Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos. São Paulo: Blucher, 2015. ISBN: 978-85-8039-115-2, DOI 10.5151/978859788580391152-V4_Cap14. Citado na página 26.

PURCINA, A. B.; COSTA, T. N. e BORGES, R. A.. *Stability Analysis in Nonlinear Mechanical System*. In: XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, 2015, Rio de Janeiro – RJ. Citado na página 26.

_____. *Análise De Estabilidade De Um Sistema Mecânico*. In: I Workshop Em Matemática Industrial, Modelagem e Otimização – WMiMO, 2015, Catalão – GO. Citado na página 25.

_____. *Estudos do Efeito de Incertezas em um Sistema Dinâmico Não Linear*. In: II Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Industria – CNMAI, 2015, Fortaleza – CE. Citado na página 25.

RAO, S. S.; MARQUES, A. S.; LIMA JUNIOR, J. J. de. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado na página 30.

SABERI, L.; NAHVI, H. *Vibration Analysis of a Nonlinear System with a Nonlinear Absorber under the Primary and Super-harmonic Resonances*. International Journal of Engineering Vol. 27, n. 3, 2014, 499 - 508. Citado na página 52.

SANTOS, M. V. S. dos. *Não-Linearidades e Controle em uma Treliça Pseudoelástica.* 53 f. Projeto de Graduação (Bacharelado) - Universidade De Brasília. Faculdade De Tecnologia. Departamento de Engenharia Mecânica, Brasília, 2012. Citado nas páginas 34, 35 e 39.

SAVI, M. A. *Dinâmica Não-Linear e Caos*. Rio de Janeiro. 2004. Citado nas páginas 26, 31, 33, 40 e 41.

SAYED, M.; HAMED, Y. S.; AMER, Y. A. *Vibration Reduction and Stability of Non-Linear System Subjected to External and Parametric Excitation Forces under a Non-Linear Absorber*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, n. 22, 2011, p. 1051 - 1070. Citado na página 26.

SILVA, S. da. *Vibrações Mecânicas*. Notas de aula - 2º Versão. Universidade do Oeste do Paraná. Foz do Iguaçu, 2009. Citado na página. 30.

STEWART, I. *Será que Deus Joga Dados? A Nova Matemática do Caos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor. 1991. Citado na página 31.

THOMSEN, J. J. *Vibration and Stability Advanced Theory, Analysis, and Tools.* Springer-Verlag, 2nd Edition, 2003. Citado nas páginas 39 e 44.

VIANA, R. L. *Introdução à Dinâmica Não-linear e Caos*. Curitiba, 2011. Citado na página 31.

VIVANCO, J. E. M. *Análise da Dinâmica Não-linear no Balanço Paramétrico de uma Embarcação Pesqueira*. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Rio de Janeiro, 2009. Citado nas páginas 31, 35, 39 e 40.

ZHU, et al. *Analysis of Non-Linear Dynamics of a Two-Degree-of-Freedom Vibration System with Non-Linear Damping and Non-Linear Spring.* Journal of Sound and Vibration, Vol. 271, n. 1-2, 2004, p. 15 - 24. Citado na página 26.

APÊNDICE A

CÁLCULOS DO MÉTODO DAS MULTIPLAS ESCALAS

No Capítulo 4, seção 4.2, vimos que as soluções particulares das eqs. (4.13) e (4.14), depois de eliminar os termos seculares, são dadas por:

$$\begin{aligned} x_{11} = {} & Ce^{i\omega_1 T_0} + U_1 e^{i\Omega T_0} + H_1 e^{3i\omega_1 T_0} + H_2 e^{i\omega_2 T_0} + H_3 e^{3i\omega_2 T_0} + H_4 e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} \\ & + H_5 e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + H_6 e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + H_7 e^{i(\omega_1-2\omega_2)T_0} + cc \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} x_{21} = {} & De^{i\omega_2 T_0} + U_2 e^{i\Omega T_0} + H_8 e^{i\omega_1 T_0} + H_9 e^{3i\omega_1 T_0} + H_{10} e^{3i\omega_2 T_0} + H_{11} e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} \\ & + H_{12} e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + H_{13} e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + H_{14} e^{i(\omega_1-2\omega_2)T_0} + cc \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $C, D, U_s, s = 1,2$ e $H_k, k = 1,..14$ são funções complexas em T_1, dadas por:

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{2i\omega_1}[& -2i\omega_1 D_1 A - \xi_1 i\omega_1 A - 3\alpha_1 A^2 \overline{A} + \alpha_2 \Gamma_1 A + 3\alpha_3 (\Gamma_1 - 1)^3 A^2 \overline{A} \\ & + 6\alpha_3 (\Gamma_1 - 1) AB\overline{B} + \xi_2 i\omega_1 (\Gamma_1 - 1) A], \end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{2i\omega_2}[-2i\omega_2 D_1 B + \omega_2^2 H_2 - 6\beta_1 (\Gamma_1 - 1)^2 A\overline{A}B - \xi_3 i\omega_2 B - 3\beta_1 B^2 \overline{B},$$

$$U_1 = \frac{f}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)},\ U_2 = \frac{1}{(\omega_2^2 - \Omega^2)}(\omega_2^2 U_1),\ H_1 = -\frac{1}{8\omega_1^2}\left[-\alpha_1 A^3 + \alpha_3 (\Gamma_1 - 1)^3 A^3\right],$$

$$H_2 = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[6\alpha_3 (\Gamma - 1)^2 A\overline{A}B + (\xi_2 i\omega_2 + \alpha_2)B + 3\alpha_3 B^2 \overline{B}\right],$$

$$H_3 = \frac{1}{\left(\omega_1^2 - 9\omega_2^2\right)}\left(\alpha_3 B^3\right),\ H_4 = \frac{1}{\left(-3\omega_1^2 - 4\omega_1\omega_2 - \omega_2^2\right)}\left[3\alpha_3\left(\Gamma_1 - 1\right)^2 A^2 B\right],$$

$$H_5 = \frac{1}{\left(-3\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 - \omega_2^2\right)}\left[3\alpha_3\left(\Gamma_1 - 1\right)^2 A^2 B\right],$$

$$H_6 = \frac{1}{-4\left(\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\right)}\left[3\alpha_3\left(\Gamma_1 - 1\right)AB^2\right],$$

$$H_7 = \frac{1}{4\left(\omega_2^2 - \omega_1\omega_2\right)}\left[3\alpha_3\left(\Gamma_1 - 1\right)A\overline{B}^2\right],$$

$$H_8 = \frac{1}{\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}\left[-2i\omega_1 D_1\Gamma_1 A + \omega_2^2 C - 3\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)^3 A^2\overline{A} - 6\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)AB\overline{B} - \xi_3 i\omega_1\left(\Gamma_1 - 1\right)A\right],$$

$$H_9 = \frac{1}{\left(\omega_2^2 - 9\omega_1^2\right)}\left[\omega_2^2 H_1 - \beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)^3 A^3\right],\ H_{10} = -\frac{1}{8\omega_2^2}\left(\omega_2^2 H_3 - \beta_1 B^3\right),$$

$$H_{11} = \frac{1}{-4\left(\omega_1^2 - \omega_1\omega_2\right)}\left[\omega_2^2 H_4 - 3\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)^2 A^2 B\right],$$

$$H_{12} = \frac{1}{4\left(\omega_1\omega_2 - \omega_1^2\right)}\left[\omega_2^2 H_5 - 3\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)^2 A^2\overline{B}\right],$$

$$H_{13} = \frac{1}{\left(-\omega_1^2 - 4\omega_1\omega_2 - 3\omega_2^2\right)}\left[\omega_2^2 H_6 - 3\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)AB^2\right],$$

$$H_{14} = \frac{1}{\left(-\omega_1^2 + 4\omega_1\omega_2 - 3\omega_2^2\right)}\left[\omega_2^2 H_7 - 3\beta_1\left(\Gamma_1 - 1\right)A\overline{B}^2\right].$$

ANEXO A

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

O Critério de Routh-Hurwitz é utilizado para investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos. Sabe-se que para um sistema ser considerado estável é necessário que todos os autovalores da matriz Jacobiana, associada a um determinado ponto de equilíbrio, possua parte real positiva. Nesse sentido, em 1974, Edward John Routh estabeleceu um primeiro critério para que um polinômio tivesse raízes com parte real negativa. Para Routh, bastavam apenas serem positivos os coeficientes do polinômio para que tal condição fosse satisfeita. Porém, em 1895, Adolf Hurwitz classificou esta condição como necessária, mas não suficiente estabelecendo um novo critério de modo que, além do polinômio ter todos os seus coeficientes positivos, faz-se necessário que todos os determinantes da matriz de Hurwitz (H) também sejam. Caso um dos coeficientes seja zero ou negativo, juntamente com pelo menos um coeficiente positivo, então há no mínimo uma raiz com parte real positiva indicando que o ponto de equilíbrio do sistema não é estável (BELUSSO, 2011).

Dado um polinômio:

$$P(\zeta) = \zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + a_2\zeta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\zeta + a_n \,,$$

a matriz H é construída através de seus coeficientes procedendo da seguinte forma:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

Observa-se que, a matriz Hurwitz consiste da primeira linha formada pelos coeficientes ímpares, a segunda linha pelos coeficientes pares, cujo termo a_0 deve ser sempre igual à 1 e a diagonal principal formada pelos coeficientes do polinômio.