



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO



Rosane Gonçalves Ferreira

**EFEITOS DO ATRASO SOBRE A ESTABILIDADE DE SISTEMAS
MECÂNICOS NÃO LINEARES**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CATALÃO – GO, 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Rosane Gonçalves Ferreira		
E-mail:	rosannymat@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	☒ Sim	☐ Não	
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:		Sigla:	
País:	UF:	CNPJ:	
Título:	Efeitos do Atraso Sobre a Estabilidade de Sistemas Mecânicos Não Lineares		
Palavras-chave:	Vibrações Mecânicas, Equações Diferenciais Com Tempo De Atraso, Modelagem Matemática, Sistema De Controle, Método De Perturbação Das Múltiplas Escalas, Métodos Numéricos		
Título em outra língua:	Effects Delay About System Stability Nonlinear Mechanics		
Palavras-chave em outra língua:	Mechanical Vibration, Differential Equations With Time Delay, Mathematical Modeling, Control System, Perturbation Method Of Multiple Scales, Numerical Methods		
Área de concentração:	Modelagem e Otimização		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	04/03/2016		
Programa de Pós-Graduação:	Modelagem e Otimização		
Orientador(a):	Dr. Marcos Napoleão Rabelo		
E-mail:	rabelo@dmf.ufpe.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



Assinatura do (a) autor (a)

Data: 04 / 03 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ROSANE GONÇALVES FERREIRA

EFEITOS DO ATRASO SOBRE A ESTABILIDADE DE SISTEMAS
MECÂNICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Otimização pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Orientador:
Marcos Napoleão Rabelo

CATALÃO – GO

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Ferreira, Rosane Gonçalves
Efeitos do Atraso Sobre a Estabilidade de Sistemas Mecânicos Não
Lineares [manuscrito] / Rosane Gonçalves Ferreira. - 2016.
101 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Dr. Marcos Napoleão Rabelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e
Otimização, Catalão, 2016.

Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras,
lista de tabelas.

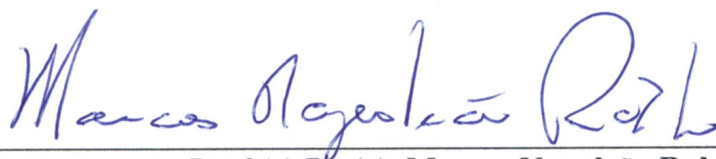
1. Vibrações mecânicas. 2. Equações diferenciais com tempo de atraso.
3. Modelagem matemática. 4. Sistema de controle. 5. Método de
perturbação das múltiplas escalas. I. Rabelo, Dr. Marcos Napoleão,
orient. II. Título.

ROSANE GONÇALVES FERREIRA

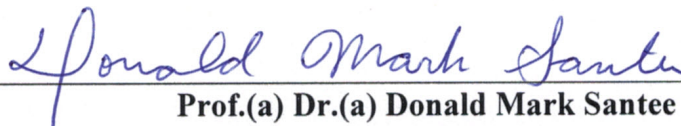
EFEITOS DO ATRASO SOBRE A ESTABILIDADE DE SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

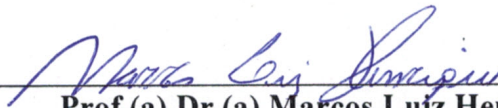
Trabalho **aprovado** em 04 de março de 2016.



Prof.(a) Dr.(a) Marcos Napoleão Rabelo
Orientador



Prof.(a) Dr.(a) Donald Mark Santee
IMTec/RC/UFG



Prof.(a) Dr.(a) Marcos Luiz Henrique
NICIT/CAA/UFPE

Catalão – GO
2016

Aos meus pais Pedro e Divina, a minha irmã Isadora.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, fonte de todo conhecimento, por me iluminar e me dar forças para que eu conseguisse finalizar este trabalho com êxito.

A meus pais Pedro e Divina por todo amor e por todo apoio durante a realização deste projeto. Obrigada por acreditarem em mim, mesmo quando eu não acreditava. Vocês são minha fortaleza.

A minha irmã Isadora, companheira de todas as horas, pela compreensão durante todo este período. Obrigada maninha, pelo amor e cumplicidade.

Ao meu orientador prof. Dr. Marcos Napoleão rabelo, primeiramente por toda a paciência que teve para comigo durante esses dois anos, pela orientação eficiente nesta pesquisa desafiadora, pelas sugestões valiosas e por acreditar que a concretização deste projeto seria possível.

Ao Dr. Marcos Luiz Henrique pela colaboração inestimável, sempre disponível e disposto a ajudar.

A Universidade Federal de Goiás pela oportunidade.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

“Há homens que lutam um dia e são bons. Há outros que lutam um ano e são melhores. Há os que lutam muitos anos e são muito bons. Porém há os que lutam toda a vida: esses são os imprescindíveis”. Bertolt Brecht

RESUMO

FERREIRA, R. G.. *Efeitos do Atraso Sobre a Estabilidade de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. 2016. 101 f. Dissertação (Mestrado) – Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

As vibrações possuem um campo extenso de estudos, ao quais trabalhos inteiros têm sido dedicados. Tamanha importância deve-se ao fato de que a maioria das atividades humanas envolve vibrações. Muitos sistemas construídos sofrem ou produzem vibração, tais como máquinas, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle. Um sistema vibratório geralmente apresenta comportamento complexo, assim a análise do comportamento dinâmico envolve o uso de ferramentas matemáticas sofisticadas. O modelo matemático incorpora os aspectos importantes do processo real, em termos de equações diferenciais lineares ou não lineares. Neste trabalho nosso objetivo é analisar o comportamento de um modelo de sistemas mecânicos. Os tempos de atrasos quando presentes em controladores e atuadores podem ser motivo de ineficiência ou mesmo causar a instabilidade do sistema. Porém, o controle adequado desses atrasos pode melhorar o desempenho de sistemas mecânicos. Os sistemas com tempo de atraso, assim como os sistemas ordinários, são modelados por equações diferenciais ordinárias ou parciais, mas diferentemente das equações ordinárias, equações com tempo de atraso, também conhecidas como equações funcionais, são modeladas em espaços de dimensão infinita, o que dificulta enormemente a análise de estabilidade, uma vez que, o espectro do semigrupo solução associado à parte linear do modelo pode apresentar infinitos autovalores. Assim, nossa contribuição ao estudo do comportamento dinâmico de tais sistemas foi feito em duas partes. Na primeira, aplicamos o método de perturbação das múltiplas escalas no sistema de equações diferenciais do modelo, uma vez que o sistema apresenta vibrações não lineares. Nesta parte, é importante ressaltar que a análise diferencial usada foi em um espaço de dimensão infinita, também conhecido como espaço de Banach; esta análise difere substancialmente daquela usada no caso ordinário. Em seguida obtemos soluções numéricas para a amplitude em estado estacionário usando o método de Newton Raphson e depois fizemos uma análise numérica da estabilidade do modelo com atraso e sem atraso para diferentes parâmetros, usando o método de Runge-Kutta.

Palavras-chaves: Vibrações Mecânicas, Equações Diferenciais Com Tempo De Atraso, Modelagem Matemática, Sistema De Controle, Método De Perturbação Das Múltiplas Escalas, Métodos Numéricos.

ABSTRACT

FERREIRA, R. G.. *Efeitos do Atraso Sobre a Estabilidade de Sistemas Mecânicos Não Lineares*. 2016. 101 f. Master Thesis - Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Catalão – GO.

Vibrations of mechanical systems have a wide field of research, where many work have been dedicated. Such importance is due to the fact that most human activities involve vibrations. It is worth noting that many device can suffer or produce vibrations, such as, machines, structures, motors, turbines. Vibratory systems, generally can produce complex behavior, thus the analysis of such dynamics behavior needs to use sophisticated mathematical tools. The mathematical model assigns important features of real processes with respect to linear and non-linear differential equations. In this work we are interested in the analysis of behavior of delayed mechanical systems. Time delayed can compromise the performance of controls even adding instability in the systems. On the other hand, write choose of delays can improve its performance. Systems with time delay, similar to ordinary systems, are molded by ordinary and/or partial differential equations, but, unlikely ordinary differential equations, delayed differential equations, also known as functional differential equations, are molded on Banach spaces with infinite dimension, which introduce serious difficulty in analysis of stability, since that, the spectra of solution semi-group associated with the linear part of the model can presents infinite eigenvalues. Thus, our contribution of the study of dynamics behavior of such systems will be in two directions. In the first one, we apply the perturbation method of multiple scales in the model of differential equations, since that the system shows nonlinear vibrations. It is worth noting that the differential analysis used in the stage regarding differential equations in Banach spaces, which has infinite dimension, this approach differ substantially from standards approaches. Then we obtain numerical solutions for the amplitude at steady state using the Newton Raphson method and then we made a numerical analysis of the model of stability with delay and without delay to different parameters, using the Runge-Kutta method.

Keywords: Mechanical Vibration, Differential Equations With Time Delay, Mathematical Modeling, Control System, Perturbation Method Of Multiple Scales, Numerical Methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema mecânico vibratório.	24
Figura 2 – Representação de um sistema com vibração livre.	26
Figura 3 – Representação de um sistema com vibração forçada.	26
Figura 4 – Representação de um sistema com vibração livre amortecida.	26
Figura 5 – Representação de um sistema com vibração forçada amortecida.	26
Figura 6 – Diagrama de corpo livre da Figura 2.	28
Figura 7 – Diagrama de corpo livre da Figura 4.	29
Figura 8 – Sistema não amortecido excitado harmonicamente.	30
Figura 9 – Diagrama de corpo livre.	30
Figura 10 – Fator de amplificação de um sistema não amortecido.	32
Figura 11 – Resposta harmônica quando $0 < \frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$	32
Figura 12 – Resposta harmônica quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} > 1$	33
Figura 13 – Resposta quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} = 1$	34
Figura 14 – Resposta total quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$	35
Figura 15 – Resposta total quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} > 1$	35
Figura 16 – Diagrama de corpo livre da Figura 5.	36
Figura 17 – Sistema massa-mola com dois graus de liberdade.	38
Figura 18 – Diagrama de corpo livre.	38
Figura 19 – Rigidez não linear devido a geometria dos mecanismos: mola sob tensão inicial com uma extremidade restrita se movendo verticalmente.	39
Figura 20 – Diagrama esquemático do modelo com absorvedor.	58
Figura 21 – Comportamento do sistema em ressonância primária.	82
Figura 22 – Comportamento do sistema em ressonância paramétrica principal.	82
Figura 23 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e paramétrica principal.	82
Figura 24 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e interna.	83
Figura 25 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna.	84
Figura 26 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea.	84

Figura 27 – Comportamento do sistema em ressonância primária.	85
Figura 28 – Comportamento do sistema em ressonância paramétrica principal.	86
Figura 29 – Comportamento do sistema ressonância simultânea, primária e paramétrica principal.	86
Figura 30 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e interna.	87
Figura 31 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna.	87
Figura 32 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea.	88
Figura 33 – Efeitos do parâmetro de detonação σ	89
Figura 34 – Efeitos de rigidez da mola não linear α_2	89
Figura 35 – Efeitos da amplitude de excitação F_1	89
Figura 36 – Efeitos da frequência natural ω_1	90
Figura 37 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_1	90
Figura 38 – Efeitos do coeficiente de amortecimento não linear ζ_2	90
Figura 39 – Efeitos do parâmetro de detonação σ	91
Figura 40 – Efeitos de rigidez da mola não linear α_2	91
Figura 41 – Efeitos da amplitude de excitação F_1	92
Figura 42 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_1	92
Figura 43 – Efeitos do coeficiente de amortecimento não linear ζ_2	93
Figura 44 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_3	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Valores numéricos do sistema principal sem atraso	96
Tabela 2 –	Valores numéricos do sistema principal com atraso	96
Tabela 3 –	E_a : amplitude de estado estacionário do sistema sem controle/amplitude de estado estacionário do sistema com controle	97

LISTA DE SÍMBOLOS

a_1, a_2 — Amplitude e fase

α_i, β_j — Parâmetros não lineares, onde $(j = 1, 2), (i = 1, \dots, 5)$

c_1 — Coeficiente de amortecimento linear do sistema principal

c_1 — Coeficiente de amortecimento não linear do sistema principal

c_3 — Coeficientes de amortecimento linear do controle

D_n — Operadores diferenciais, onde $(n = 0, 1)$

E_a — Amplitude de estado estacionário sem absorvedor / amplitude de estado estacionário com absorvedor

ϵ — Pequeno parâmetro de perturbação

F_1, F_2 — Amplitudes forçadas

k_1, k_2 — Rigidez linear

m_1, m_2 — Massas do sistema

ω_1, ω_2 — Frequências naturais

Ω_1, Ω_2 — Frequências forçadas

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

σ, σ_s — Parâmetros de detonação, onde $(s = 1, \dots, 3)$

$T_0 = t$ — Escala de tempo rápido

$T_1 = \epsilon t$ — Escala de tempo lento

τ, τ_1, τ_2 — Parâmetros de atraso

x_1, x_2 — Deslocamentos do sistema

$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ — Derivadas de x em relação a t

ζ_s — Coeficiente de amortecimento, onde $(s = 1, \dots, 4)$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	VIBRAÇÕES MECÂNICAS	25
2.1	Sistema com Vibração Linear	25
2.1.1	Sistema com vibração livre	27
2.1.2	Sistema amortecido com vibração livre	28
2.1.3	Sistema não amortecido excitado harmonicamente	30
2.1.4	Sistema amortecido excitado harmonicamente	35
2.2	Sistema com Dois Graus de Liberdade Não Linear	38
2.3	Técnicas de Perturbação: o Método das Múltiplas Escalas	41
2.3.1	Solução exata do sistema	43
2.3.2	A técnica de Lindstedt-Poincaré	45
2.3.3	Método das múltiplas escalas	47
2.3.3.1	Solução alternativa	49
2.3.4	Sistema com não linearidade quadrática e cúbica	51
2.4	Equações Diferenciais com Atraso	54
3	ESTABILIDADE DO SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE SUJEITO A AÇÃO DE AMORTECIMENTO VISCOZO COM PARÂMETROS DE ATRASO	57
3.1	Equações Governantes	57
3.2	Equações de Movimento com Parâmetros de Atraso	60
3.3	Técnicas de Perturbação Para Sistemas Não Lineares Com Atraso	62
3.3.1	Perturbação da solução	62
3.3.2	Casos de ressonância	67
3.4	Análise de Estabilidade	68
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	81
4.1	Equações Governantes Sem Atraso	81
4.2	Equações Governantes com Atraso	85
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	95
5.1	Conclusão	95
5.2	Trabalhos Futuros	98

REFERÊNCIAS 99

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A área da mecânica de vibrações tem recebido nos últimos anos várias contribuições de pesquisadores. Tamanha importância deve-se ao fato de que a maioria das atividades humanas envolve vibração. Por exemplo, no corpo humano, a audição deve-se a vibração dos tímpanos, a respiração deve-se a vibração dos pulmões. Além disso, muitos sistemas construídos pelos seres humanos sofrem ou produzem vibrações, tais como máquinas, estruturas, motores, turbinas, entre outros.

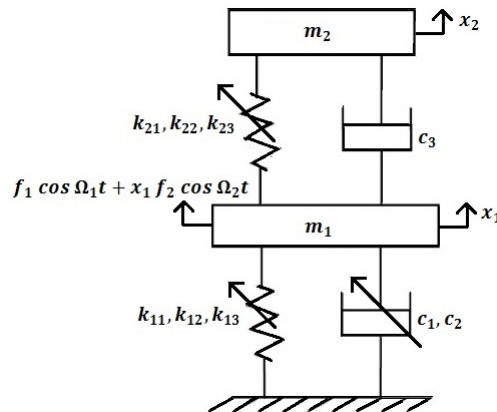
Atualmente o estudo de vibrações é de suma importância, devido às máquinas de alta velocidade e estruturas mais leves. Porém, em muitas situações as vibrações são fenômenos indesejáveis, pois comprometem o desempenho de máquinas e estruturas, por isso é necessário que sejam reduzidas ou eliminadas completamente. Um dos métodos mais comuns de controle dessas vibrações é o método de controle passivo de vibrações.

No entanto, atrasos em controladores e atuadores tornaram-se um problema sério. Esses atrasos, por menores que sejam podem deteriorar o desempenho do controle ou mesmo causar a instabilidade do sistema, porém controlando adequadamente esses atrasos é possível melhorar o desempenho do sistema.

Motivados por [Sayed, Hamed e Amer \(2011\)](#), o objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo da estabilidade de um sistema mecânico vibratório composto por dois blocos de massa m_1 e m_2 respectivamente, de acordo com a Figura 1.

No sistema da Figura 1, o bloco de massa m_1 representa o sistema principal, também conhecido na literatura como sistema primário, cujas vibrações devem ser controladas e o bloco de massa m_2 exerce o papel de absorvedor de vibrações, atuando no sistema como um controle, visando atenuar a amplitude de oscilações do sistema principal. Sistemas como o representado pela Figura (1) tem recebido nos últimos anos muita atenção, devido a grande variedade de aplicações que este dispositivo tem na atenuação de vibrações. Uma vez estabelecido o modelo do sistema, faremos um breve comentário sobre a contribuição do nosso trabalho.

Figura 1 – Sistema mecânico vibratório.



Fonte: o autor.

No sistema acima, pretendemos colocar um parâmetro de atraso na parte onde a dissipação do amortecimento contribui para a dinâmica do sistema. Um bom argumento que justifica o uso de atraso no sistema (3.8)-(3.9) é dado em (SAEED; EL-GANINI; EISSA, 2013). Neste contexto o atraso surge como parte integrante de controle ativo, devido a vários fatores: tempo de atraso em transporte, transmissão de dados on-line, medida de variáveis de estado em sistemas, etc.

O sistema, em controle passivo, funciona da seguinte forma: a energia de transferência do sistema principal para o secundário é máxima quando a frequência natural do sistema principal e a frequência natural do sistema secundário estão em uma razão de 2:1. Isto implica que quando o sistema principal é excitado próximo da frequência natural, a resposta do sistema principal oscila próximo da frequência de excitação externa. Isto produz uma outra consequência, a saber, a amplitude do sistema principal cresce linearmente com a amplitude de excitação. Entretanto, existe um valor limite de crescimento da amplitude, chamado de valor crítico. A partir deste ponto o sistema principal, passa a transferir energia para o sistema secundário, também chamado de sistema escravo. Este fenômeno é conhecido como fenômeno de saturação. O papel do tempo de atraso é de projetar controladores para evitar que esta situação crítica seja alcançada.

Outras importantes contribuições da teoria de controle podem ser encontradas em (HU; WANG, 2002). Segundo o autor, tempos de atraso podem surgir em controladores e atuadores, devido a vários fatores.

Nosso objetivo é aplicar o método de perturbação das múltiplas escalas no sistema de equações diferenciais do modelo com atraso e determinar as amplitudes de estado estacionário. E fazer uma análise de estabilidade do sistema utilizando métodos numéricos.

Capítulo 2

VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos, os principais tipos de vibrações mecânicas e algumas de suas aplicações. Faremos também uma breve introdução sobre os principais elementos de um sistema vibratório, como elementos de mola, elementos de massa, elementos de amortecimento e movimento harmônico. Mostraremos como encontrar uma solução aproximada para problemas não lineares, usando o método de perturbação das múltiplas escalas. Apresentamos também a forma de Equações Diferenciais com Atraso no tempo. O principal texto na confecção desta parte do trabalho foi [Rao \(2008\)](#). Para a parte de vibrações não lineares foi [Rao \(2000\)](#), para a parte de múltiplas escalas foi [Nayfeh \(1993\)](#) e para parte de equações com atraso foi [Hu e Wang \(2002\)](#). Foram consultados também [Balachandran e Magrab \(2011\)](#), [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), [Souza \(2014\)](#), [Felício \(2010\)](#), [C.Hibbeler \(2005\)](#), [Gray, Costanzo e Plesha \(2014\)](#), [Beer *et al.* \(2010\)](#), [Nayfeh \(2004\)](#), [Soeiro \(2008\)](#), [Tang \(2007\)](#).

2.1 Sistema com Vibração Linear

Vibração mecânica é qualquer movimento de um corpo que oscila em torno de sua posição de equilíbrio após um intervalo de tempo, cujos estudos iniciaram desde a antiguidade por volta de 4000 a.C., com a descoberta dos primeiros instrumentos musicais. Foi Pitágoras quem deu ênfase aos estudos de sons musicais com base científica. Seus experimentos foram realizados através da vibração da corda de instrumento conhecido como monocórdio.

As primeiras investigações de vibração em estruturas deram-se devido a grande quantidade de terremotos na China na antiguidade. Em 131 d.C, Zhang Heng notando a importância de medir terremotos com precisão, inventou o primeiro sismógrafo.

Considerado o fundador da ciência moderna, Galileu Galilei (1564-1642), iniciou o estudo sobre o comportamento de um pêndulo simples, o qual constatou que o período dos

movimentos era independente da amplitude das oscilações.

Porém foi Newton (1642-1727) que no final do século XVII, quem descreveu a lei da gravitação e as três leis do movimento, princípios fundamentais da mecânica, de grande importância em toda engenharia.

Muitos problemas de mecânica, incluindo os de vibrações são não lineares. Essa teoria começou a ser estudada em 1892 por Poincaré que desenvolveu o método da perturbação e Lyapunov que desenvolveu a teoria moderna de estabilidade.

Um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial - a mola ou a elasticidade, energia cinética - a massa ou a inércia e um meio de perda gradual de energia - o amortecedor. Durante o processo de vibração o sistema alterna as energias, que quando amortecido esta é dissipada a cada ciclo.

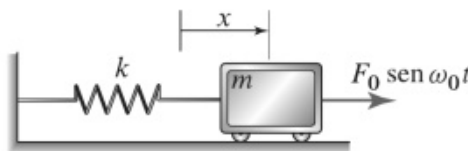
Pode-se classificar as vibrações como, livre quando nenhuma força externa está agindo sobre o sistema (Figura 2), forçada quando uma força repetitiva está agindo sobre o sistema (Figura 3). Não amortecida quando não há perda ou dissipação de energia durante a oscilação (Figuras 2 e 3), caso contrário à vibração é dita amortecida (Figuras 4 e 5). Linear quando a mola e o amortecedor comportam-se linearmente, caso contrário a vibração é não linear. Quando o valor de excitação é conhecido em cada instante dizemos que o sistema é determinístico. Caso contrário, se ao invés do valor exato da excitação, tivermos uma distribuição da probabilidade associada a esta força, dizemos que o sistema é aleatório.

Figura 2 – Representação de um sistema com vibração livre.



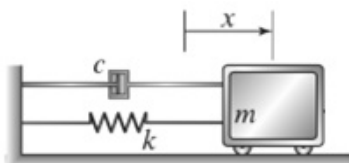
Fonte: Gray, Costanzo e Plesha (2014, p. 678).

Figura 3 – Representação de um sistema com vibração forçada.



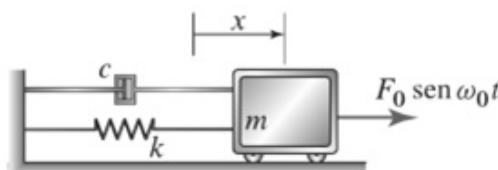
Fonte: Gray, Costanzo e Plesha (2014, p. 693).

Figura 4 – Representação de um sistema com vibração livre amortecida.



Fonte: Gray, Costanzo e Plesha (2014, p. 707), modificado pelo autor.

Figura 5 – Representação de um sistema com vibração forçada amortecida.



Fonte: Gray, Costanzo e Plesha (2014, p. 707).

As vibrações possuem um campo extenso de estudos, ao quais trabalhos inteiros têm sido dedicados. Tamanha importância deve-se ao fato de que a maioria das atividades humanas envolve vibração. Por exemplo, no corpo humano a audição deve-se a vibração dos tímpanos, a respiração deve-se a vibração dos pulmões. Muitos sistemas construídos pelos seres humanos sofrem ou produzem vibração, tais como máquinas, estruturas, motores, turbinas.

As vibrações as vezes são fenômenos indesejáveis, pois comprometem máquinas e estruturas, por isso é necessário que sejam reduzidas ou eliminadas completamente. Por exemplo, no caso de máquinas tais como ventiladores, máquinas de lavar roupa, tornos e turbinas, as vibrações podem desapertar ou soltar elementos de fixação, como porcas. No caso de estruturas, os elevadores, tráfego de aeronaves, terremotos e ventos, causam vibrações que podem provocar rachaduras e fraturas em estruturas.

Por outro lado, em alguns casos as vibrações são fenômenos desejáveis, como em aplicações industriais e de consumo. Por exemplo, misturadores de tinta, sirenes, alarmes, instrumentação com ultrassom utilizada em cirurgias oculares. A vibração melhora a eficiência de certos processos de usinagem, fundição e soldagem.

A maioria dos sistemas vibratórios exibem comportamentos complexos, assim, com o intuito de fazer uma análise mais próxima da realidade, as ferramentas matemáticas utilizadas neste processo também possuem um alto grau de sofisticação, como poderá ser visto no capítulo 3. O modelo matemático incorpora os aspectos importantes do processo real, em termos de equações diferenciais lineares e não lineares.

As posições de todas as partes do sistema são determinadas através do número de coordenadas independentes em um determinado instante. O número mínimo das coordenadas independentes requeridas para descrever o movimento do sistema, definem o número de graus de liberdade do mesmo.

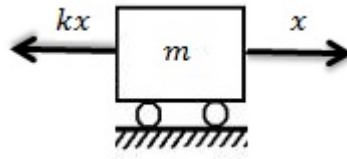
Para melhor entendimento de alguns dos conceitos acima, nas seções a seguir são feitos alguns exemplos.

2.1.1 Sistema com vibração livre

A Figura 2 representa um sistema massa-mola com um grau de liberdade, que na literatura é a representação mais simples possível de um sistema vibratório. A coordenada x especifica a posição da massa m a qualquer tempo. O sistema após sofrer uma perturbação inicial, resultará em um movimento de vibração livre, pois não há força externa aplicada a massa. A amplitude do movimento permanecerá constante ao longo do tempo, uma vez que não há dissipação de energia durante o movimento de massa.

Considere o diagrama de corpo livre da Figura 2 abaixo.

Figura 6 – Diagrama de corpo livre da Figura 2.



Fonte: o autor.

Se a massa constante m for deslocada por uma distância $x(t)$ quando uma força resultante agir sobre ela na mesma direção, pela segunda Lei do movimento de Newton, a força resultante sobre a massa é igual ao produto da massa pela aceleração, ou seja,

$$F(x) = m\ddot{x}, \quad (2.1)$$

onde $\ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ representa a segunda derivada com relação ao tempo.

Nesse diagrama de corpo livre, observa-se que a massa está apoiada em roletes sem atrito e que pode ter movimento de translação no sentido horizontal. Quando a massa é deslocada á uma distância $+x$ em relação a sua posição de equilíbrio estático, á força na mola é kx . Aplicando a eq. (2.1) à massa m , resulta na equação de movimento

$$-kx = m\ddot{x}, \quad (2.2)$$

ou de outra forma,

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.3)$$

A Lei do movimento de Newton para sistema de corpo rígido sujeito a movimento rotacional é dada por

$$M(t) = J\ddot{\theta}, \quad (2.4)$$

onde M é o movimento resultante que age sobre o corpo, e $\ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$ representa a segunda derivada com relação ao tempo e J é a inércia rotacional do corpo rígido.

2.1.2 Sistema amortecido com vibração livre

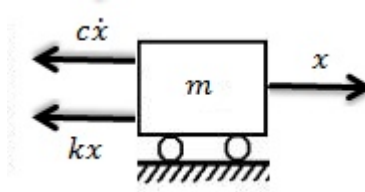
Agora exemplificaremos um sistema viscosamente amortecido com vibração livre, como o representado pela Figura 4. A força de amortecimento viscoso F é proporcional à velocidade $\dot{x}$, ou seja,

$$F = -c\dot{x}, \quad (2.5)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso e o sinal negativo indica que a força de amortecimento é oposta ao sentido da velocidade.

Para determinar a equação de movimento, considere o diagrama de corpo livre representado pela Figura 7.

Figura 7 – Diagrama de corpo livre da Figura 4.



Fonte: o autor.

Quando a massa m é deslocada a uma distância $+x$ em relação a sua posição de equilíbrio, aplicando a segunda lei do movimento de Newton, temos

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx, \quad (2.6)$$

ou de outra forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (2.7)$$

Para resolução da eq. (2.7), assuma como candidata

$$x(t) = ce^{st}, \quad (2.8)$$

onde c e s são constantes a serem determinadas a partir da condição inicial e instante inicial, respectivamente.

Substituindo a eq. (2.8) na eq. (2.7) obtemos a seguinte equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (2.9)$$

cujas raízes são

$$s_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

e

$$s_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.11)$$

Através dessas raízes obtemos duas soluções para a eq. (2.7):

$$x_1(t) = c_1 e^{s_1 t} \quad (2.12)$$

e

$$x_2(t) = c_2 e^{s_2 t}. \quad (2.13)$$

Assim, através da combinação das duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, obtemos a solução geral da eq. (2.7)

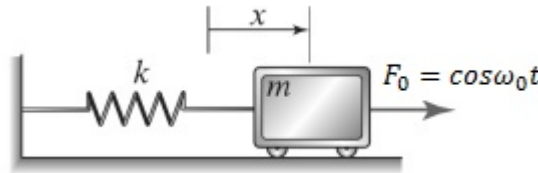
$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}, \quad (2.14)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias a serem obtidas através das condições iniciais do sistema.

2.1.3 Sistema não amortecido excitado harmonicamente

Agora exemplificaremos um sistema não amortecido, com vibração excitada harmonicamente, como o representado pela Figura 8.

Figura 8 – Sistema não amortecido excitado harmonicamente.

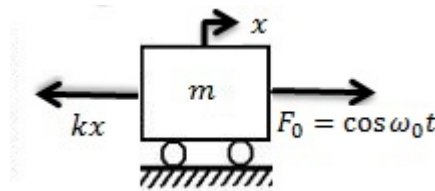


Fonte: Gray, Costanzo e Plesha (2014, p. 693), modificado pelo autor.

Sempre que a energia externa é fornecida ao sistema durante a vibração, por meio de uma força aplicada ou por uma excitação de deslocamento imposta, este sofre vibração forçada. A natureza de tal força aplicada ou da excitação de deslocamento pode ser de natureza harmônica. Sob uma excitação harmônica, a resposta do sistema também será harmônica.

Analisando o diagrama de corpo livre representado pela Figura 8,

Figura 9 – Diagrama de corpo livre.



Fonte: o autor.

Se a função forçante $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ está agindo sobre o sistema massa-mola não amortecido, como o representado na Figura 3, aplicando a segunda lei do movimento de Newton

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_0 t, \quad (2.15)$$

onde F_0 é a amplitude e ω_0 é a frequência.

Note que essa equação é não homogênea, logo sua solução geral é obtida através da soma da solução homogênea $x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$, onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, com a solução particular $x_p(t)$. Como a eq. (2.15) é excitada harmonicamente, espera-se que a sua solução também seja harmônica.

Admite-se eu a solução particular da eq. (2.15) é da forma

$$x_p(t) = X \cos \omega_0 t, \quad (2.16)$$

onde X é a amplitude.

A equação diferencial (2.15) deve ser satisfeita pela solução particular. As derivadas da solução particular (2.16) são dadas por

$$\dot{x}_p(t) = -\omega X \sin \omega_0 t \quad (2.17)$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 X \cos \omega_0 t. \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.16), (2.17) e (2.18) na eq. (2.15), obtém-se

$$X [(k - m\omega^2) \cos \omega_0 t] = F_0 \cos \omega t, \quad (2.19)$$

ou de outra forma

$$X = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad (2.20)$$

onde $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ é a deflexão da massa m sob a força F_0 , às vezes também chamada de deflexão estática, uma vez que F_0 é uma força estática. Logo, a solução geral da eq. (2.15) é

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega_0^2} \cos \omega_0 t, \quad (2.21)$$

onde C_1 e C_2 podem ser determinados pelas condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, logo

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega_0^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}, \quad (2.22)$$

substituindo na eq. (2.21), temos

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t. \quad (2.23)$$

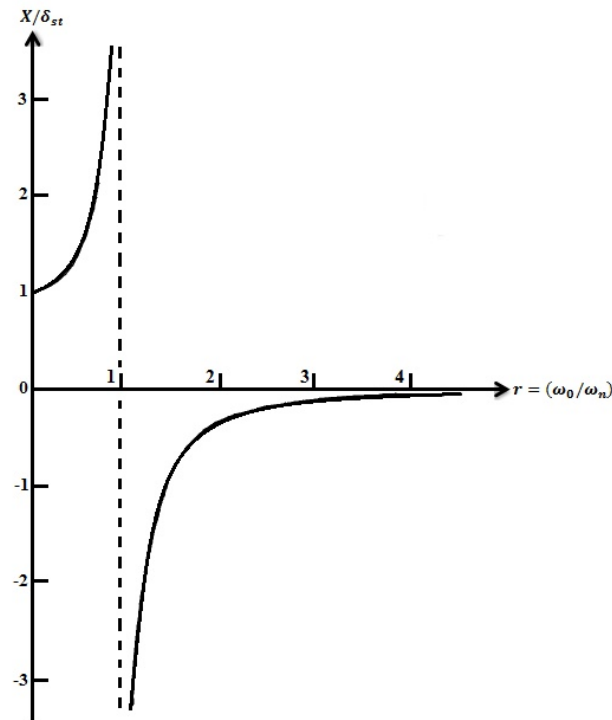
A amplitude máxima X na eq. (2.20) pode ser reescrita como

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad (2.24)$$

onde o coeficiente de amplitude $\frac{X}{\delta_{st}}$ representa a razão entre a amplitude dinâmica e a amplitude estática do movimento.

Considere a Figura 10, onde está representado a variação do coeficiente de amplitude $\frac{X}{\delta_{st}}$, com a razão de frequência $r = \frac{\omega_0}{\omega_n}$. Analisando, verificamos três tipos de resposta do sistema.

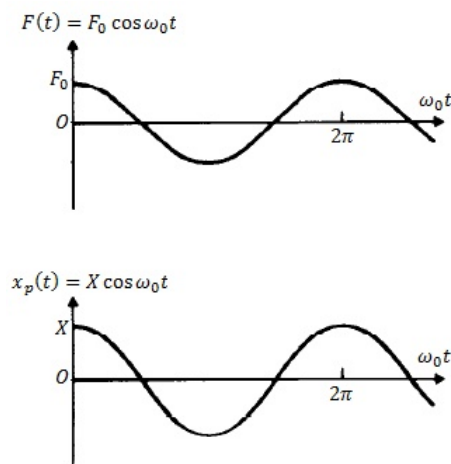
Figura 10 – Fator de amplificação de um sistema não amortecido.



Fonte: Rao (2000, p. 130).

A primeira resposta é para quando $0 < \frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$, como representado na Figura 11.

Figura 11 – Resposta harmônica quando $0 < \frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$.

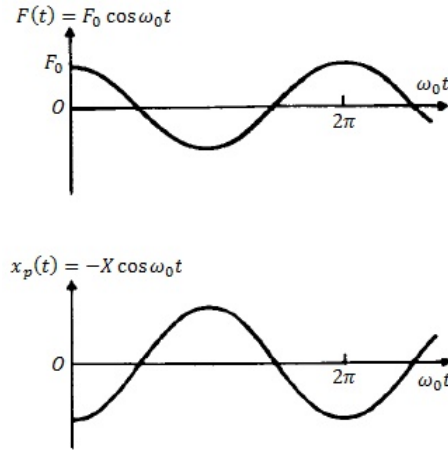


Fonte: Rao (2000, p. 131).

Analizando, verificamos que o denominador da eq. (2.24) é positivo, então a resposta de $x_p(t) = X \cos \omega_0 t$ não é alterada, ou seja, a resposta harmônica do sistema x_p está em fase com a força externa.

A segunda resposta é para quando $\omega_0 > 1$, como representado na Figura 12.

Figura 12 – Resposta harmônica quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} > 1$.



Fonte: Rao (2000, p. 132).

Analizando, verificamos que o denominador da eq. (2.24) é negativo, então a resposta agora é alterada e assume a forma $-x_p(t) = X \cos \omega_0 t$, onde a amplitude de movimento X é alterada para ser uma quantidade positiva como

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2 - 1}. \quad (2.25)$$

A resposta $x_p(t)$ está defasada em 180° em relação à força externa $F(t)$, pois elas têm sinais opostos. Além disso, a resposta do sistema à uma força harmônica de frequência muito alta é próxima de zero, uma vez que quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$.

A terceira resposta é para quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} = 1$, a eq. (2.24) torna-se infinita, isto ocorre porque a frequência forçante ω_0 é igual a frequência natural do sistema ω_n , ou seja, ocorre devido a ressonância. Para esta condição, a eq. (2.23) é reescrita como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \delta_{st} \left(\frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \right), \quad (2.26)$$

onde o último termo dessa equação assume uma forma indefinida para $\omega_0 = \omega_n$. Assim, para avaliar o limite deste termo aplica-se a regra de L'Hospital, onde

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega_n} \left(\frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \right), \quad (2.27)$$

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega_n} \left(\frac{\frac{d}{d\omega_0} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2} \right), \quad (2.28)$$

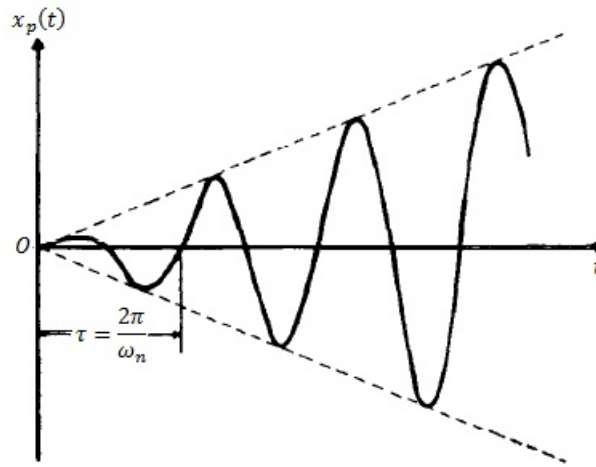
$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega_n} \left(\frac{t \sin \omega_0 t}{2 \frac{\omega_0}{\omega_n^2}} \right) = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t. \quad (2.29)$$

Assim, a resposta do sistema em ressonância passa a ser

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n t} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t, \quad (2.30)$$

onde a ressonância aumenta indefinidamente e o último termo está representado na Figura 13. Analisando verificamos que a amplitude da resposta aumenta linearmente com o tempo.

Figura 13 – Resposta quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} = 1$.

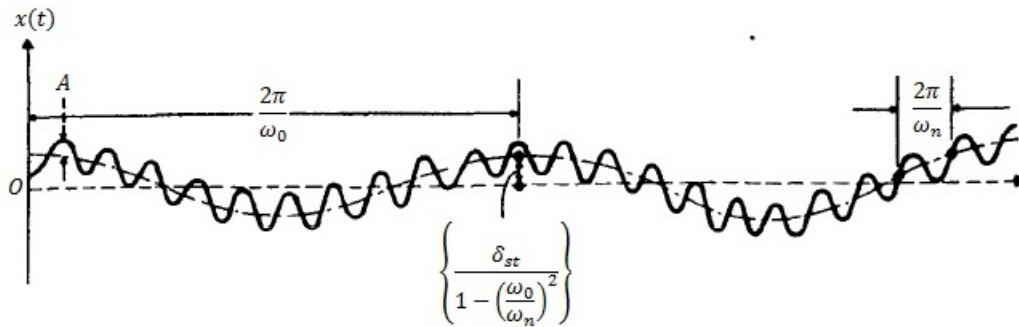


Fonte: Rao (2000, p. 133).

A resposta total do sistema, eq. (2.21) ou eq. (2.23), quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$, pode ser expressa como

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega_0 t, \quad (2.31)$$

onde a frequência forçante é menor que a frequência natural, assim como representado pela Figura 14.

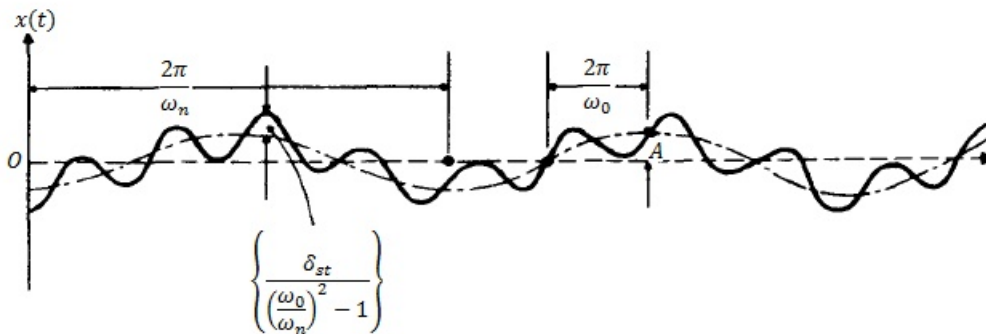
Figura 14 – Resposta total quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} < 1$.

Fonte: Rao (2000, p. 134).

E, quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} > 1$, pode ser expressa como

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega_0 t, \quad (2.32)$$

onde a frequência forçante é maior que a frequência natural, assim como representado pela Figura 15.

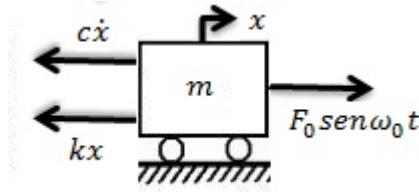
Figura 15 – Resposta total quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} > 1$.

Fonte: Rao (2000, p. 134).

2.1.4 Sistema amortecido excitado harmonicamente

Agora exemplificaremos um sistema viscosamente amortecido, com vibração excitada harmonicamente, como o representado pela Figura 5. Analisando o diagrama de corpo livre representado pela Figura 16.

Figura 16 – Diagrama de corpo livre da Figura 5.



Fonte: o autor.

Se a função forçante $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$ está agindo sobre o sistema massa-mola viscosamente amortecido, aplicando a segunda lei do movimento de Newton

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega_0 t, \quad (2.33)$$

onde F_0 é a amplitude e ω_0 é a frequência.

Note que essa equação é não homogênea, logo sua solução geral é obtida através da soma da solução homogênea $x_h(t)$ com a solução particular $x_p(t)$. Como a eq. (2.33) é excitada harmonicamente, espera-se que a sua solução também seja harmônica.

Admite-se que a solução particular da eq. (2.33) é da forma

$$x_p(t) = X \sin(\omega_0 t - \phi), \quad (2.34)$$

onde X é a amplitude e ϕ o ângulo de fase da resposta, à determinar.

A equação diferencial (2.33) deve ser satisfeita pela solução particular. As derivadas da solução particular (2.34) são dadas por

$$\dot{x}_p(t) = \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (2.35)$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega_0^2 X \sin(\omega_0 t - \phi). \quad (2.36)$$

Substituindo (2.34), (2.35) e (2.36) em (2.33), obtém-se

$$X [(k - m\omega_0^2) \sin(\omega_0 t - \phi) + c\omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi)] = F_0 \sin \omega_0 t, \quad (2.37)$$

usando as relações trigonométricas

$$\cos(\omega_0 t - \phi) = \cos \omega_0 t \cos \phi + \sin \omega_0 t \sin \phi, \quad (2.38)$$

$$\sin(\omega_0 t - \phi) = \sin \omega_0 t \cos \phi - \cos \omega_0 t \sin \phi, \quad (2.39)$$

na eq. (2.37), obtém-se

$$\begin{aligned} X [(k - m\omega_0^2) (\sin \omega_0 t \cos \phi - \cos \omega_0 t \sin \phi) + c\omega_0 (\cos \omega_0 t \cos \phi + \sin \omega_0 t \sin \phi)] \\ = F_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Igualando-se os coeficientes em seno e cosseno de ambos os lados, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} X(k - m\omega_0^2)\cos\phi + c\omega_0\sin\phi = F_0, \\ X(k - m\omega_0^2)(-\sin\phi) + c\omega_0\cos\phi = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

A solução do sistema (2.41) é

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + (c\omega_0)^2}} \quad (2.42)$$

e

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2}. \quad (2.43)$$

Portanto, a solução particular (2.33) é igual

$$X_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + (c\omega_0)^2}} \cos\left(\omega_0 t - \tan^{-1} \frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2}\right). \quad (2.44)$$

A amplitude (2.42) e a fase (2.43) podem também ser obtidas em função dos parâmetros: frequência natural ω_n e fator de amortecimento ζ . Divide-se o numerador e o denominador destas expressões por k , obtendo-se

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega_0^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{k}\right)^2}} \quad (2.45)$$

e

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\frac{c\omega_0}{k}}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}. \quad (2.46)$$

Aplicando a definição da frequência natural $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e do fator de amortecimento $\zeta = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, em (2.45) e (2.46) obtêm-se

$$a = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.47)$$

e

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2}, \quad (2.48)$$

onde $a = \frac{x}{\delta_{st}}$ é o fator de amplificação dinâmica senoidal, $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ é a deflexão sob a força estática F_0 e $r = \frac{\omega_0}{\omega_n}$ é um parâmetro de frequência adimensional ou de sintonia.

A solução homogênea na literatura é expressa como

$$x_h(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n - \phi_0)}. \quad (2.49)$$

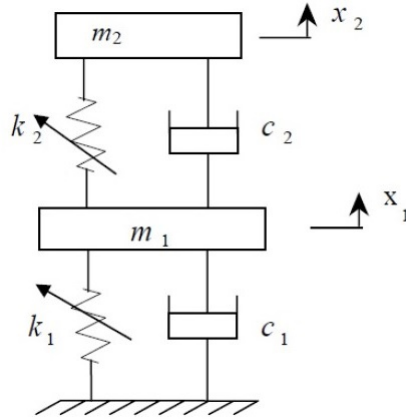
Logo, a resposta total da eq. (2.33) é dada por

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n - \phi_0)} + y \sin(\omega_0 t - \phi). \quad (2.50)$$

2.2 Sistema com Dois Graus de Liberdade Não Linear

Sistemas com dois graus de liberdade apresentam um ou dois elementos inerciais, cujo movimento é descrito por duas coordenadas independentes. Para ilustrar, considere o sistema viscosamente amortecido mostrado na Figura 17. Este sistema consiste de molas lineares, amortecedores lineares e elementos de inércia de translação.

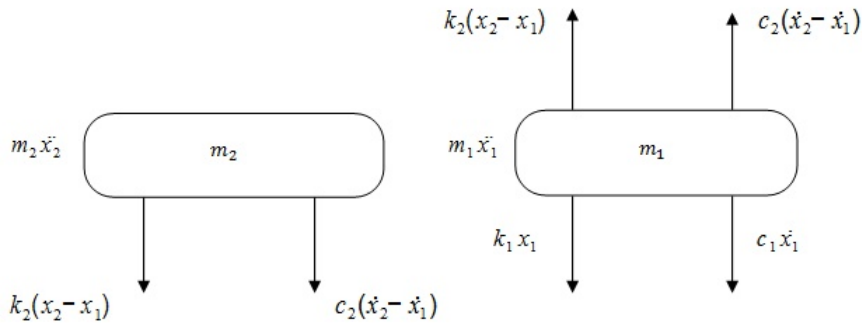
Figura 17 – Sistema massa-mola com dois graus de liberdade.



Fonte: o autor

O modelo dinâmico do sistema representado pela Figura (1) é obtido a partir do seu diagrama de corpo livre. Assim obtemos

Figura 18 – Diagrama de corpo livre.



Fonte: o autor.

onde, para os blocos m_1 e m_2 obtemos o conjunto de equações:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

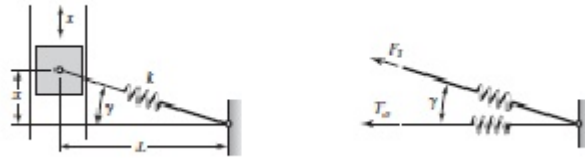
Nas equações do sistema (2.51), k_1 , k_2 representam os coeficientes de rigidez das molas e c_1 , c_2 representam os coeficientes de viscosidades dos amortecedores.

Em nosso trabalho os elementos de rigidez associados ao sistema, apresentam comportamento não linear. De acordo com [Balachandran e Magrab \(2011\)](#) o comportamento dinâmico dos elementos que compõem o sistema, como molas e amortecedores em nosso caso, estão relacionados com o tipo de força no qual o sistema está submetido. No caso de molas não lineares, a força elástica $F(x)$ associada, apresenta um comportamento não linear. Experimentalmente verifica-se que o comportamento para tais molas, para pequenas oscilações, aproxima-se de uma cúbica. Fazendo uma expansão em Taylor $F(x)$, podemos interpretar a força elástica como a representação de uma combinação de molas lineares e não lineares e neste caso a força elástica assume a seguinte forma

$$F(x) = kx + \alpha kx^3. \quad (2.52)$$

Outro motivo, responsável por surgimento de não linearidades nos elementos e rigidez do nosso sistema é devido a geometria dos mecanismos. Para melhor entendimento, considere o seguinte exemplo, cuja figura é mostrada logo abaixo.

Figura 19 – Rigidez não linear devido a geometria dos mecanismos: mola sob tensão inicial com uma extremidade restrita se movendo verticalmente.



Fonte: [Balachandran e Magrab \(2011, p. 39\)](#).

Considerando o deslocamento total, a força elástica da mola é dada por

$$F_s(x) = k\delta_0 + k(\sqrt{x^2 + L^2} - L), \quad (2.53)$$

onde k é a constante de elasticidade da mola, δ_0 é o deslocamento inicial e $\sqrt{x^2 + L^2} - L$ o deslocamento real da mola. A força que age na direção x , conforme o desenho é dada por

$$F_x(x) = \frac{kx\delta_0}{\sqrt{L^2 + x^2}} + \frac{kx(\sqrt{x^2 + L^2} - L)}{\sqrt{L^2 + x^2}}. \quad (2.54)$$

Sob certas condições, para maiores detalhes veja ([BALACHANDRAN; MAGRAB, 2011](#)), podemos fazer a expansão de Taylor da equação (2.54), obtendo uma força elástica na direção de x , da forma

$$F_x(x) = k\delta_0 + \frac{k}{2}(L - \delta_0)\left(\frac{x}{L}\right)^3. \quad (2.55)$$

A eq. (2.54) e a eq. (2.55) sugerem que o modelo matemático assume a seguinte forma

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha_1 x_1^3 - k_2(x_2 - x_1) - \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_1 \dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

De acordo ainda com [Balachandran e Magrab \(2011\)](#) existem ainda forças de excitação externas e forças paramétricas responsáveis por modelar excitações na base do suporte. Levando todos estes fatores em consideração o modelo geral que propomos estudar neste trabalho assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \alpha_1 k_1 x_1^3 + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 \\ = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 x_2 \cos(\Omega_2 t), \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (2.58)$$

Para completar nosso modelo consideraremos as forças dissipativas que são da forma, $F = R(x, \dot{x})$ onde R é uma determinada relação entre x e $\dot{x}$. De acordo com [Balachandran e Magrab \(2011\)](#) a função R , pode ser de várias formas. Se as forças consideradas, forem forças de atrito, então

$$F(\dot{x}) = \mu N \text{sgn}(\dot{x}), \quad (2.59)$$

onde μ representa o coeficiente de atrito, N representa a força norma da superfície de contato e sgn representa a função sinal e assume valor $+1$ se $\dot{x} > 0$ e assume -1 se $\dot{x} < 0$. Se o sistema de vibração está em um meio fluídico, então a força dissipativa assume a forma

$$F(x) = c_d(\dot{x})^2 N \text{sgn}(\dot{x}). \quad (2.60)$$

Em nosso trabalho consideraremos

$$R(x_1, \dot{x}_1) = c_3 \dot{x}_1 x_1^2. \quad (2.61)$$

Assim a forma geral de nosso trabalho ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \alpha_1 k_1 x_1^3 + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_3 \dot{x}_1 x_1^2 \\ = f_1 \cos(\Omega t) + f_2 x_2 \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (2.63)$$

No sistema acima, pretendemos colocar um parâmetro de atraso na parte onde a dissipação do amortecimento contribui para a dinâmica do sistema. Um bom argumento que justifica o uso de atraso no sistema (2.62) é dado em ([SAEED; EL-GANINI; EISSA, 2013](#)).

Neste contexto o atraso surge como parte integrante de controle ativo, devido a vários fatores: tempo de atraso em transporte, transmissão de dados on-line, medida de variáveis de estado em sistemas, etc.

Voltando ao nosso modelo e assumindo tempo de atraso na dissipação do sistema, o modelo de equações assume a seguinte forma

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t - \tau_1) - c_2 \dot{x}_2(t - \tau_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \alpha_1 k_1 x_1^3 + \alpha_2 k_2 (x_2 - x_1)^3 + \alpha_3 \dot{x}_1(t - \tau_1) x_1^2 = f_1 \cos(\Omega t) + f_2 x_2 \cos(\Omega t), \quad (2.64)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + \alpha_2 k_2(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2(t - \tau_2) - \dot{x}_1(t - \tau_1)) = 0. \quad (2.65)$$

2.3 Técnicas de Perturbação: o Método das Múltiplas Escalas

A maioria dos problemas físicos que envolvem modelagem de sistemas mecânicos apresentam certas características essenciais, tais como as não linearidades, que impedem soluções analíticas exatas. Os pesquisadores a fim de solucionar estes problemas, são obrigados a recorrer a aproximações, soluções numéricas, ou combinações de ambos. Entre os métodos de aproximação, estão os métodos de perturbação. Segundo [Nayfeh \(1993\)](#), de acordo com estas técnicas, a solução é representada pelos primeiros termos de uma expansão assintótica, geralmente não mais do que dois termos. As expansões podem ser efetuadas em termos de um parâmetro (pequeno ou grande) que aparece naturalmente nas equações, ou que pode ser introduzido artificialmente por conveniência. Essas expansões são chamadas parâmetros de perturbação. Alternativamente, as expansões podem ser efetuadas em termos de uma coordenada (pequena ou grande), estas são chamadas de coordenadas de perturbação.

Dentre os métodos de perturbação existentes, abordaremos especificamente o Método das Múltiplas Escalas. A ideia central deste método consiste em, partindo de uma equação de solução conhecida S_0 , obter soluções aproximadas para outro problema similar, dito perturbado, S . Essas soluções aproximadas deverão ser assintótica no parâmetro perturbativo ϵ , proporcional à diferença entre o problema original S_0 e o perturbado S , que se reduz ao problema original quando o parâmetro perturbativo ϵ tende à zero.

Considere um sistema massa-mola de um grau de liberdade com uma força de restauração $f(x^*)$, a equação de vibração livre pode ser expressa como

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + f(x^*) = 0, \quad (2.66)$$

onde f é uma função não linear de x^* e $\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}$ a aceleração do sistema. Seja $x^* = x_0^*$ uma posição de equilíbrio do sistema, então $f(x_0^*) = 0$. Assume-se que f é uma função analítica

em $x^* = x_0^*$, logo ela pode ser expandida em sua série de Taylor sob a forma

$$f(\dot{x}) = k_1(x^* - x_0^*) + k_2(x^* - x_0^*)^2 + k_3(x^* - x_0^*)^3 + \dots, \quad (2.67)$$

onde $k_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f^*}{dx^{*n}}(x_0^*)$.

Substituindo a eq. (2.67) na eq. (2.66) obtém-se

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + k_1(x^* - x_0^*) + k_2(x^* - x_0^*)^2 + k_3(x^* - x_0^*)^3 + \dots = 0, \quad (2.68)$$

que descreve o movimento do sistema na vizinhança da posição de equilíbrio.

Seja $x^* - x_0^* = s^*$, assim a eq. (2.68) assume a forma

$$\frac{d^2 s^*}{dt^{*2}} + k_1 s^* + k_2 s^{*2} + k_3 s^{*3} + \dots = 0. \quad (2.69)$$

Daremos continuidade com um caso especial da eq. (2.69), a Equação de Duffing

$$\frac{d^2 s^*}{dt^{*2}} + k_1 s^* + k_3 s^{*3} = 0, \quad (2.70)$$

onde $k_1 > 0$ e k_3 pode ter valor positivo ou negativo.

Antes de resolvermos o problema, escreveremos a eq. (2.70), em sua forma adimensional. Então, escolhendo um comprimento característico S^* e um tempo característico T^* e podemos assumir que

$$t = \frac{t^*}{T^*} \quad e \quad s = \frac{s^*}{S^*}. \quad (2.71)$$

Derivando através da regra da cadeia, tem-se

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt^*} = \frac{1}{T^*} \frac{d}{dt} \quad e \quad \frac{d}{ds^*} = \frac{d}{ds} \frac{d}{ds^*} = \frac{1}{S^*} \frac{d}{ds}, \quad (2.72)$$

derivando novamente, tem-se

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} = \frac{1}{T^{*2}} \frac{d^2}{dt^2} \quad e \quad \frac{d^2}{ds^{*2}} = \frac{1}{S^{*2}} \frac{d^2}{ds^2}. \quad (2.73)$$

Assim a eq. (2.70) assume a forma

$$\ddot{s} + k_1 T^{*2} s + k_3 T^{*2} S^{*2} s^3 = 0. \quad (2.74)$$

É conveniente considerar $k_1 T^{*2} = 1$ e $k_3 T^{*2} S^{*2} = \epsilon$. Assim, a eq. (2.74) pode ser reescrita como

$$\ddot{s} + s + \epsilon s^3 = 0, \quad (2.75)$$

onde ϵ é uma grandeza adimensional.

A solução s do problema é uma função da variável independente t e do parâmetro ϵ , assim podemos escrever $s = s(t; \epsilon)$.

2.3.1 Solução exata do sistema

Agora vamos integrar a eq. (2.75), fazendo a mudança de variável $\dot{s} = \dot{p}$ e mudando a variável independente de t para s . Para este fim, temos

$$\ddot{s} = \dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dt} = p \frac{dp}{ds}. \quad (2.76)$$

Assim eq. (2.75) é reescrita como

$$p \frac{dp}{ds} + s + \epsilon s^3 = 0, \quad (2.77)$$

separando as variáveis,

$$p dp = -(s + \epsilon s^3) ds. \quad (2.78)$$

Integrando a eq. (2.78) temos

$$\frac{1}{2} p^2 = h - \left(\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{4} \epsilon s^4 \right) = h - F(s), \quad (2.79)$$

onde h é uma constante de integração, proporcional a energia total do sistema. Desde que $p = \dot{s}$, $\frac{1}{2} p^2$ é proporcional a energia cinética do sistema e $s + \epsilon s^3$ proporcional a força de restauração

$$F(s) = \int (s + \epsilon s^3) ds = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{4} \epsilon s^4. \quad (2.80)$$

Agora, integrando a eq. (2.79) usando as condições iniciais

$$s(0) = x_0, \quad \dot{s}(0) = \dot{x}_0, \quad (2.81)$$

obtemos

$$\frac{1}{2} \dot{x}_0^2 = h - \left(\frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} \epsilon x_0^4 \right), \quad (2.82)$$

assim

$$h = \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} \epsilon x_0^4. \quad (2.83)$$

Como $p = \dot{s}$, segue da eq. (2.79) que

$$\dot{s} = \pm \left(2h - s^2 - \frac{1}{2} \epsilon s^4 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.84)$$

separando as variáveis

$$dt = \pm \frac{ds}{\left(2h - s^2 - \frac{1}{2} \epsilon s^4 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.85)$$

integrando

$$\int_0^t dt = \pm \int_{x_0}^s \frac{ds}{\left(2h - s^2 - \frac{1}{2}\epsilon s^4\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.86)$$

então

$$t = \pm \int_{x_0}^s \frac{ds}{\left(2h - s^2 - \frac{1}{2}\epsilon s^4\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.87)$$

Substituindo $s = \pm x_0$ e $p = \dot{s}_0 = 0$ na eq. (2.83), obtemos

$$h = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{4}\epsilon x_0^4, \quad (2.88)$$

assim

$$2h - s^2 - \frac{1}{2}\epsilon s^4 = x_0^2 + \frac{1}{2}\epsilon x_0^4 - s^2 - \frac{1}{2}\epsilon s^4 = (x_0^2 - s^2) \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon x_0^2 + \frac{1}{2}\epsilon s^2\right). \quad (2.89)$$

Então, a eq. (2.87) é reescrita como

$$t = \pm \int_{x_0}^s \frac{ds}{(x_0^2 - s^2) \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon x_0^2 + \frac{1}{2}\epsilon s^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.90)$$

que pode ser colocada em uma forma elíptica, introduzindo a transformação

$$s = -x_0 \cos \theta, \quad (2.91)$$

$$ds = x_0 \sin \theta d\theta. \quad (2.92)$$

Além disso, $s = \pm x_0$ corresponde a $\theta_0 = 0$ e π . Assim, a eq. (2.90) se torna

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon x_0^2 + \frac{1}{2}\epsilon x_0^2 \cos^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.93)$$

ou

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad (2.94)$$

onde

$$m = \frac{\epsilon x_0^2}{2(1 + \epsilon x_0^2)}. \quad (2.95)$$

Segundo [Nayfeh \(1993\)](#), uma vez que a trajetória fechada é simétrica em relação ao eixo s , o tempo necessário para o ponto se deslocar de $s = -x_0$ para $s = X = 0$ é metade do período T . No entanto segundo ele, $s = -x_0$ corresponde a $\theta = 0$ e $s = x_0$ corresponde a $\theta = \pi$. Assim, segue da eq.(2.94) que

$$T = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (2.96)$$

Uma vez que o integral da eq. (2.96) ao longo do intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$ é a mesma que ao longo do intervalo $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$, a eq. (2.96) pode ser reescrita como

$$T = \pm \frac{4}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (2.97)$$

A integral (2.97) é chamada um integral elíptica completa. Nayfeh (1993) verificou que o período é uma função de ϵx_0^2 , e, portanto, uma não linearidade. Verificou também que, uma vez que a frequência angular para $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ω é uma função de não linearidade. Segundo ele isto sugere que qualquer expansão uniforme deve levar em conta o fato de que a frequência angular é uma função de não linearidade.

Nayfeh (1993) afirmou que quando ϵ é pequeno, m também é pequeno. E que, uma aproximação T_a para T pode ser obtida através da expansão integrando na eq. (2.97). O resultado é

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{4}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{1}{2} m \sin^2 \theta + \dots \right) d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8} m\pi + \dots \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \left[1 + \frac{\epsilon x_0^2}{8(1 + \epsilon x_0^2)} + \dots \right] \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon x_0^2 + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{8} \epsilon x_0^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.98)$$

assim

$$T_a = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \epsilon x_0^2 + \dots \right). \quad (2.99)$$

Afirmou também que a expansão de dois termos para o período está perto do valor exato. Que o erro é de apenas 1.3% para valores de ϵx_0^2 .

2.3.2 A técnica de Lindstedt-Poincaré

Devido à dependência da frequência não linear, de forma explicita exibe-se a frequência ω do sistema na equação diferencial. Para isto, introduz-se a transformação

$$\tau = \omega t, \quad (2.100)$$

onde ω é uma constante dependente de ϵ . Assim, é necessário mudar a variável independente de t para τ . Em seguida, as derivadas de tempo em termos de t e τ são

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \omega \frac{d}{d\tau}, \quad (2.101)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega \frac{d^2}{dt d\tau} = \omega \frac{d\tau}{dt} \frac{d^2}{d\tau^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}. \quad (2.102)$$

Assim, a eq. (2.75) é reescrita como

$$\omega^2 s'' + s + \epsilon u^3 = 0, \quad (2.103)$$

onde a frequência real do sistema agora aparece de forma explícita. Até agora, tanto s como ω são desconhecidos. Procuram-se, soluções aproximadas para ambos na forma de séries de potência em termos de ϵ . Isto é, considera-se que

$$s = s_0(\tau) + \epsilon s_1(\tau) + \dots, \quad (2.104)$$

$$\omega = 1 + \epsilon \omega_1 + \dots, \quad (2.105)$$

onde o primeiro termo na expansão de ω é a frequência linear, cujas correções são determinadas no decorrer da análise, exigindo que a expansão de s seja uniforme para todos τ .

Substituindo as equações (2.104) e (2.105) na eq. (2.103), obtém-se

$$(1 + \epsilon \omega_1)^2 (s_0'' + \epsilon s_1'') + s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon (s_0 + \epsilon s_1)^3 = 0, \quad (2.106)$$

assumindo que ϵ é pequeno, após a expansão obtém-se

$$s_0'' + s_0 + \epsilon (s_1'' + s_1 + s_0^3 + 2\omega_1 s_0'') = 0. \quad (2.107)$$

Igualando cada um dos coeficientes de ϵ^0 e ϵ à zero tem-se respectivamente,

$$s_0'' + s_0 = 0, \quad (2.108)$$

$$s_1'' + s_1 = -s_0^3 - 2\omega_1 s_0''. \quad (2.109)$$

A solução geral da eq. (2.108) pode ser expressa como

$$s_0 = a \cos(\tau + \phi), \quad (2.110)$$

onde a e ϕ são constantes a serem determinadas.

Substituindo a eq. (2.110) na eq. (2.109), obtém-se

$$s_1'' + s_1 = -a^3 \cos^3(\tau + \phi) + 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi), \quad (2.111)$$

ou de outra forma usando identidade trigonométrica.

$$s_1'' + s_1 = (2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3) \cos(\tau + \phi) - \frac{1}{4}a^3 \cos(3\tau + 3\phi). \quad (2.112)$$

A solução particular da eq. (2.112) é expressa como

$$s_1 = \frac{1}{2}(2\omega_1 a - \frac{1}{4}a^3) \tau \sin(\tau + \phi) + \frac{1}{32}a^3 \cos(3\tau + 3\phi). \quad (2.113)$$

Esta solução particular contém um termo secular, o que torna a expansão não uniforme. Assim fazendo o coeficiente do termo secular igual a zero, obtemos

$$2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0. \quad (2.114)$$

Então, a eq. (2.113) é reescrita como

$$s_1 = \frac{1}{32}a^3 \cos(3\tau + 3\phi). \quad (2.115)$$

Desconsiderando o caso trivial $a = 0$ que corresponde a equação nula, a eq. (2.114) é satisfeita se

$$\omega_1 = \frac{3}{8}a^2. \quad (2.116)$$

Substituindo as equações (2.110) - (2.115) na eq. (2.104) obtém-se

$$s = a \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{32}\epsilon a^3 \cos(3\tau + 3\phi) \quad (2.117)$$

e substituindo a eq. (2.116) na eq. (2.105) obtém-se

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2. \quad (2.118)$$

Substituindo $\tau = \omega t$ a eq. (2.117) pode ser reescrita como

$$s = a \cos\left(\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2\right)t + \phi\right) + \frac{1}{32}\epsilon a^3 \cos\left(3\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2\right)t + 3\phi\right). \quad (2.119)$$

A eq. (2.119) é uniforme de primeira ordem, uma vez que termos seculares não aparecem. Observa-se também que o segundo termo a direita na eq. (2.119) é pequeno quando comparado ao primeiro.

2.3.3 Método das múltiplas escalas

Reescrevendo a eq. (2.119) de outra forma, têm-se

$$s = a \cos\left(t + \phi + \frac{3}{8}\epsilon t a^2\right) + \frac{1}{32}\epsilon a^3 \cos\left(3t + 3\phi + \frac{9}{8}\epsilon t a^2\right) + \dots, \quad (2.120)$$

observa-se que a dependência entre s em t e ϵ não é disjunta, pois s depende da combinação ϵt , bem como de t e ϵ . É possível assim, no lugar de $s = s(t; \epsilon)$, escrever $s = \hat{s}(t, \epsilon t; \epsilon)$. Realizando a expansão da eq. (2.120) para ordem superior, é possível mostrar que s , depende das combinações $\epsilon t, \epsilon^2 t, \epsilon^3 t, \dots$. Procuraremos soluções aproximadas da seguinte forma

$$s(t; \epsilon) = \hat{s}(T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, \epsilon), \quad (2.121)$$

Com $T_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ definidos como

$$T_0 = t \quad T_1 = \epsilon t \quad T_2 = \epsilon^2 t \quad T_3 = \epsilon^3 t, \dots, \quad (2.122)$$

onde os T_n podem ser interpretados como escalas de tempo, com relação ϵ .

Usando a regra da cadeia temos,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 \dots \quad (2.123)$$

e a segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \\ &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.124)$$

Portanto a eq.(2.121) assume a seguinte forma

$$D_0^2 s + 2\epsilon D_0 D_1 s + \epsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) s = 0. \quad (2.125)$$

Procuramos uma solução aproximada uniforme para a eq. (2.125) da forma

$$s = s_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon s_1(T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (2.126)$$

Substituindo a eq. (2.126) na eq. (2.125) têm-se

$$D_0^2 s_0 + \epsilon D_0^2 s_1 + 2\epsilon D_0 D_1 s_0 + s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon s_0^3 = 0. \quad (2.127)$$

Igualando cada um dos coeficientes de ϵ^0 e ϵ à zero, obtém-se

$$D_0^2 s_0 + s_0 = 0 \quad (2.128)$$

e

$$D_0^2 s_1 + s_1 = -2\epsilon D_0 D_1 s_0 - s_0^3. \quad (2.129)$$

A solução geral da eq. (2.128) pode ser expressa sob a forma

$$s_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + \phi(T_1, T_2, \dots)), \quad (2.130)$$

onde a e ϕ são funções de $T_1, T_2, \dots$.

Agora substituindo a eq. (2.130) na eq. (2.129), obtemos

$$\begin{aligned} D_0^2 s_1 + s_1 &= -2D_0 D_1 (a \cos(T_0 + \phi) - a^3 \cos^3(T_0 + \phi)) \\ &= 2D_1 a \sin(T_0 + \phi) + 2a D_1 \phi \cos(T_0 + \phi) \\ &\quad - \frac{3}{4} a^3 \cos(T_0 + \phi) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\phi), \end{aligned} \quad (2.131)$$

colocando $\cos(T_0 + \phi)$ em evidência temos

$$D_0^2 s_1 + s_1 = 2D_1 a \sin(T_0 + \phi) + \left(2a D_1 \phi - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos(T_0 + \phi) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\phi). \quad (2.132)$$

Para uma expansão uniforme, a equação não pode ter termos seculares. Na eq. (2.132) os termos $\sin(T_0 + \phi)$ e $\cos(T_0 + \phi)$ produzem os termos seculares na em s , portanto é preciso eliminá-los. Isto é realizado definindo cada um de seus coeficientes igual a zero, ou seja,

$$D_1 a = 0, \quad (2.133)$$

$$2aD_1\phi - \frac{3}{4}a^3 = 0. \quad (2.134)$$

Assim, a solução particular da eq. (2.132) torna-se

$$s_1 = \frac{1}{32}a^3 \cos(3T_0 + 3\phi). \quad (2.135)$$

A solução da eq. (2.133) é $a = a(T_2, \dots)$, ou seja, a não depende T_1 e neste caso, a eq. (2.134) pode ser reescrita sob a forma

$$D_1\phi = \frac{3}{8}a^2, \quad (2.136)$$

cujas solução é expressa como

$$\phi = \frac{3}{8}a^2 T_1 + \phi_0(T_2, \dots). \quad (2.137)$$

Substituindo s_0 dado na eq. (2.130) e de s_1 dado na eq. (2.135) na eq. (2.126), obtemos

$$s = a \cos(T_0 + \phi) + \frac{1}{32}\epsilon a^3 \cos(3T_0 + 3\phi) \quad (2.138)$$

Substituindo a eq. (2.137) na eq. (2.138), obtemos

$$\begin{aligned} s = & a(T_2, \dots) \cos\left(T_0 + \frac{3}{8}T_1 a^2(T_2, \dots) + \phi_0(T_2, \dots)\right) \\ & + \frac{1}{32}\epsilon a^3(T_2, \dots) \cos\left(3T_0 + \frac{9}{8}T_1 a^2(T_2, \dots) + 3\phi_0(T_2, \dots)\right). \end{aligned} \quad (2.139)$$

2.3.3.1 Solução alternativa

Nesta subsecção faremos uma representação alternativa das soluções das equações de perturbação. A solução da eq. (2.128) será representada na forma de um complexo, ao invés da forma real como na eq. (2.130). Para este fim, seja

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \quad (2.140)$$

Substituindo na eq. (2.130), têm-se

$$s_0 = \frac{1}{2}ae^{i\phi}e^{iT_0} + \frac{1}{2}ae^{-i\phi}e^{-iT_0}, \quad (2.141)$$

ou de outra forma

$$s_0 = Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0}, \quad (2.142)$$

onde $\bar{A}$ é o complexo conjugado de A e

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\phi}, \quad (2.143)$$

considerada uma função de T_1 , para a expansão de primeira ordem.

Substituindo a eq. (2.142) na eq. (2.129), obtém-se

$$D_0^2 s_1 + s_1 = -2iD_1 A e^{iT_0} + 2iD_1 \bar{A} e^{-iT_0} - (A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0})^3. \quad (2.144)$$

Expandindo o termo cúbico e reunindo os coeficientes dos harmônicos, obtém-se

$$D_0^2 s_1 + s_1 = -(2iD_1 A + 3A^2 \bar{A}) e^{iT_0} + (2iD_1 \bar{A} - 3\bar{A}^2 A) e^{-iT_0} - A^3 e^{3iT_0} - \bar{A}^3 e^{-3iT_0}. \quad (2.145)$$

Da eq. (2.145) temos que os termos proporcionais à e^{iT_0} e e^{-iT_0} produzem termos seculares na solução particular de s_1 . Para obter uma expansão uniforme os coeficientes de e^{iT_0} e e^{-iT_0} devem desaparecer. Para este fim, seja

$$2iD_1 A + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (2.146)$$

e

$$2iD_1 \bar{A} - 3\bar{A}^2 A = 0. \quad (2.147)$$

Comparando a eq. (2.146) e eq. (2.147), observamos que uma é conjugada da outra. Logo se uma é satisfeita, a outra também será. Para analisar a eq. (2.146), pode-se substituir A por sua forma polar na eq. (2.143). O resultado é

$$2i \left(\frac{1}{2} D_1 a e^{i\phi} + \frac{1}{2} a i D_1 \phi e^{i\phi} \right) + 3 \frac{a^2}{4} e^{2i\phi} \frac{a}{2} e^{-i\phi} = 0, \quad (2.148)$$

ou de outra forma

$$iD_1 a e^{i\phi} - aD_1 \phi e^{i\phi} + \frac{3}{8} a^3 e^{i\phi} = 0, \quad (2.149)$$

ou ainda de outra forma

$$iD_1 a - aD_1 \phi + \frac{3}{8} a^3 = 0, \quad (2.150)$$

lembrando que um número complexo é nulo se e somente se sua parte real e imaginária se anulam, da eq. (2.150) temos

$$D_1 a = 0 \quad (2.151)$$

e

$$aD_1 \phi - \frac{3}{8} a^3 = 0, \quad (2.152)$$

obtendo a mesma expansão que aparece na eq. (2.133) e na eq. (2.134).

2.3.4 Sistema com não linearidade quadrática e cúbica

Agora, considere uma partícula de massa m com oscilações livres, sob uma aceleração gravitacional g , com uma mola não linear, cuja equação do movimento é descrita como

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + f(x^*) = mg, \quad (2.153)$$

onde $f(x^*)$ é a força de restauração da mola. Assumindo que $f(x^*)$ é uma função cúbica de x^* , isto é

$$f(x^*) = k_1 x^* + k_3 x^{*3}, \quad (2.154)$$

onde $k_1 > 0$. Substituindo a eq. (2.154) na eq. (2.153), obtém-se

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + k_1 x^* + k_3 x^{*3} = mg. \quad (2.155)$$

O termo de equilíbrio é dado pela equação

$$k_1 x_r^* + k_3 x_r^{*3} = mg. \quad (2.156)$$

O intuito é investigar pequenas oscilações sobre uma das posições de equilíbrio. Para este fim, na eq. (2.155), deixa-se que

$$x^* = \dot{x}_r^* + s^* \quad (2.157)$$

e assim obtém-se

$$m \frac{d^2 s^*}{dt^{*2}} + k_1 (x_r^* + s^*) + k_3 (x_r^* + s^*)^3 = mg. \quad (2.158)$$

Substituindo a eq. (2.156) na eq. (2.158), obtém-se e assim obtém-se

$$m \frac{d^2 s^*}{dt^{*2}} + k_1 (x_r^* + s^*) + k_3 (x_r^* + s^*)^3 = k_r x_r^* + k_r x_r^{*3}, \quad (2.159)$$

expandindo o termo cúbico, têm-se

$$m \frac{d^2 s^*}{dt^{*2}} + (k_1 + 3k_3 x_r^{*2}) s^* + 3k_3 x_r^* s^{*2} + k_3 s^{*3} = 0. \quad (2.160)$$

Introduz-se agora as seguintes quantidades adimensionais

$$s = \frac{s^*}{x_r^*} \quad \text{e} \quad t = \frac{\omega}{t^*}, \quad (2.161)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 3k_3 x_r^{*2}}{m}} \quad (2.162)$$

é a frequência natural linear, que se supõe ser real. Em seguida, a eq. (2.160) torna-se

$$\ddot{s} + s + 3\alpha s^2 + \alpha s^3 = 0, \quad (2.163)$$

onde $\alpha = \frac{k_3 x_r^*{}^2}{m\omega^2}$. Segue-se assumindo que $\alpha = O(1)$. Comparando com a equação de Duffing, a eq. (2.163) contém um termo quadrático e um termo cúbico.

Para aplicar o Método das Múltiplas Escalas, considera-se a eq. (2.163), em uma forma mais geral, isto é

$$\ddot{s} + s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 = 0, \quad (2.164)$$

onde α_2 e α_3 são constantes.

Utilizando o método de múltiplas escalas, determina-se uma expansão de terceira ordem. Precisa-se assim das três escalas $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$ e $T_2 = \epsilon^2 t$. Em seguida, as derivadas temporais tornam-se

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 \dots \quad (2.165)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \\ &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.166)$$

Usando a eq. (2.166), a eq. (2.164) é transformada em

$$D_0^2 s + 2\epsilon D_0 D_1 s + \epsilon^2 (2D_0 D_2 s + D_1^2 s) + s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 = 0. \quad (2.167)$$

A solução aproximada procurada para a eq. (2.167) é expressa como

$$s = \epsilon s_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 s_2(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^3 s_3(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (2.168)$$

Substituindo a eq. (2.168) na eq. (2.167) e igualando cada um dos coeficientes de ϵ , obtém-se

$$D_0^2 s_1 + s_1 = 0, \quad (2.169)$$

$$D_0^2 s_2 + s_2 = -2D_0 D_1 s_1 - \alpha_2 s_1^2, \quad (2.170)$$

$$D_0^2 s_3 + s_3 = -D_1^2 s_1 - 2D_0 D_2 s_1 - 2D_0 D_1 s_2 - 2\alpha_2 s_1 s_2 - \alpha_3 s_1^3. \quad (2.171)$$

A solução da eq. (2.169) pode ser expressa como

$$s_1 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}, \quad (2.172)$$

substituindo na eq. (2.170), obtém-se

$$D_0^2 s_2 + s_2 = -2iD_1 A e^{iT_0} + 2iD_1 \bar{A} e^{-iT_0} - \alpha_2 (A^2 e^{2iT_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2iT_0}). \quad (2.173)$$

Eliminando os termos seculares de s_2 faz-se

$$D_1 A = 0 \quad \text{ou} \quad A = A(T_2). \quad (2.174)$$

Em seguida, a solução de da eq. (2.173) pode ser obtida através do princípio de superposição, cujo resultado é

$$s_2 = \frac{1}{3} \alpha_2 A^2 e^{2iT_0} + \frac{1}{3} \alpha_2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0} - 2\alpha_2 A\bar{A}. \quad (2.175)$$

Substituindo as equações (2.172), (2.174) e (2.175) na eq. (2.171), obtém-se

$$\begin{aligned} D_0^2 s_3 + s_3 &= -2iA'e^{iT_0} + 2i\bar{A}'e^{-iT_0} \\ &- 2\alpha_2 (Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0}) \left(\frac{1}{3} \alpha_2 A^2 e^{2iT_0} + \frac{1}{3} \alpha_2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0} - 2\alpha_2 A\bar{A} \right) \\ &- \alpha_3 (Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0})^3, \end{aligned} \quad (2.176)$$

onde a derivada é em relação a T_2 . Para chegar na eq. (2.177), foi usada a eq. (2.174) para que $D_1 s_1 = D_1 s_2 = 0$. Usando o teorema binomial, a eq. (2.177) é reescrita como

$$D_0^2 s_3 + s_3 = \left(-2iA' + \frac{10}{3} \alpha_2^2 A^2 \bar{A} - 3\alpha_3 A^2 \bar{A} \right) e^{iT_0} - \left(\frac{2}{3} \alpha_2^2 + \alpha_3 \right) A^3 e^{3iT_0} + cc. \quad (2.177)$$

Eliminando os termos seculares de s_3 é necessário que

$$-2iA' + \left(\frac{10}{3} \alpha_2^2 - 3\alpha_3 \right) A^2 \bar{A} = 0. \quad (2.178)$$

Expressando A na forma polar

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\phi}, \quad (2.179)$$

onde a e ϕ são reais, a eq. (2.178) passa a ser expressa como

$$-ia'e^{i\phi} + a\phi'e^{i\phi} + \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 e^{i\phi} = 0, \quad (2.180)$$

ou de outra forma

$$-ia' + a\phi' + \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 = 0. \quad (2.181)$$

Separando a parte real da parte imaginária a eq. (2.181) torna-se

$$a' = 0, \quad (2.182)$$

$$a\phi' = \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2 \right) a^3. \quad (2.183)$$

Na eq. (2.182), $a = a_0 = \text{constante}$. Na eq. (2.183),

$$\phi = \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2 \right) a_0^2 T_2 + \phi_0, \quad (2.184)$$

onde ϕ_0 é uma constante e a_0 é assumido como sendo diferente de zero.

Substituindo a eq. (2.179) nas equações (2.172) e (2.175), lembrando que $T_0 = t$, obtém-se

$$s_1 = a \cos(t + \phi), \quad (2.185)$$

$$s_2 = \frac{1}{6}\alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\phi) - \frac{1}{2}\alpha_2 a^2. \quad (2.186)$$

Assim, a eq. (2.168) é reescrita como

$$s = \epsilon a \cos(t + \phi) + \frac{1}{6}\epsilon^2 a^2 \alpha_2 (\cos(2t + 2\phi) - 3) + \dots. \quad (2.187)$$

Substituindo a eq. (2.184) na eq. (2.187) e usando $a = a_0$ e $T_2 = \epsilon^2 t$, a eq. (2.187) torna-se

$$s = \epsilon a_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{6}\epsilon^2 a_0^2 \alpha_2 (\cos(2\omega t + 2\phi_0) - 3) + \dots, \quad (2.188)$$

onde

$$\omega = 1 \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2 \right) \epsilon^2 a_0^2 + \dots. \quad (2.189)$$

$$(2.190)$$

2.4 Equações Diferenciais com Atraso

De acordo com (HU; WANG, 2002), os atrasos inevitáveis em controladores e atuadores podem deteriorar o desempenho do controle ou mesmo causar a instabilidade do sistema. Porém, o controle adequado desses atrasos pode melhorar o desempenho de sistemas mecânicos.

A maioria dos sistemas mecânicos com atrasos de tempo controlados podem ser modelados através dos princípios da mecânica e da teoria de controle, descritos por um conjunto de equações diferenciais ordinárias com atrasos de tempo. O atraso de tempo implica que a alteração de um estado do sistema depende da história anterior do mesmo. O espaço de solução de um conjunto de equações diferenciais com atraso é de dimensões infinitas.

Uma tarefa importante na modelagem experimental de sistemas mecânicos atrasados é determinar os atrasos de tempo. Em comparação com os coeficientes de inércia, rigidez e

amortecimento, bem como os ganhos de realimentação, os atrasos de tempo deve ser considerados como os parâmetros especiais do sistema na modelagem experimental.

As equações diferenciais atrasadas podem ser descritas sob a forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_j)), \quad x \in R^n, \quad (2.191)$$

onde $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_l$ representam os atrasos de tempo.

Atualmente vários matemáticos vêm estudando a existência de solução, a propriedade de oscilação e a estabilidade para sistemas mecânicos atrasados, principalmente no quadro de equações diferenciais funcionais.

Para entender o problema de valor inicial em equações diferenciais com atraso, consideremos um sistema linear com um grau de liberdade com atrasos de tempo iguais na retroalimentação de estado, dada pela eq. (2.192) abaixo

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ux(t - \tau) + u\dot{x}(t - \tau) + f(t), & t > t_0, \\ x(t) = \psi, \quad \dot{x}(t) = \dot{\psi}, & t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases} \quad (2.192)$$

O estado inicial do sistema deve ser determinado por uma função contínua $\psi(t)$, e a sua derivada contínua $\dot{\psi}(t)$ no intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$, a fim de determinar o estado do sistema quando $t > t_0$. Porque τ_l é assumido como sendo o intervalo de tempo mais longo na eq. (2.191), o problema de valor inicial de eq. (2.191) deve ser declarado como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_j)), & y \in R^n, \quad t > t_0, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [t_0 - \tau_j, t_0]. \end{cases} \quad (2.193)$$

onde $\psi(t) \in C \equiv C([t_0 - \tau_j, t_0], R^n)$ e C representa o espaço de Banach de funções de mapeamento contínuo $[t_0 - \tau_j, t_0]$, em R^n . Para cada função inicial $\psi \in C$ é equipado com a norma

$$\|\psi\|_C = \sup \|\psi(s)\|, \quad s \in [t_0 - \tau_j, t_0], \quad (2.194)$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma arbitrária em R^n . O espaço de estado inicial da eq. (2.193) é infinito dimensional. Esta é uma das características mais importantes de equações diferenciais de atraso.

As equações diferenciais com atraso podem ser estudadas de forma semelhante às equações diferenciais ordinárias em muitos aspectos, e também alguns resultados são semelhantes aos de equações diferenciais ordinárias. No entanto, as equações diferenciais com atraso são realmente diferentes das equações diferenciais ordinárias.

A característica mais notável de uma equação diferencial com atraso é a dimensão infinita no espaço de estado e espaço de solução. O espaço de estado de uma equação diferencial com atraso é um espaço de Banach de dimensão infinita, ao invés do espaço euclidiano como para equações diferenciais ordinárias. O estado de um sistema dinâmico, com um

atraso de tempo τ só pode ser determinado se o seu estado inicial é dado como um vetor de função $\phi(t)$ no espaço de Banach $C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$, em vez de um vetor de estado constante de dimensão finita no espaço euclidiano. O espaço de solução de uma equação diferencial com atraso é sempre infinito-dimensional, enquanto o espaço de solução de uma equação diferencial ordinária é de dimensão finita. Este fato pode ser entendido do seguinte modo: a função característica de uma equação diferencial linear com atraso inclui, pelo menos, um termo exponencial devido ao atraso de tempo, e, portanto, podem ter um número infinito de raízes características, enquanto uma equação diferencial de ordem n tem apenas n raízes características. Esta diferença é a causa essencial que pode dar origem a uma grande diferença entre estes dois tipos de equações diferenciais.

Embora os atrasos em aplicações sejam frequentemente curtos, eles devem ser desprezados ou simplificados com um grande cuidado.

Capítulo 3

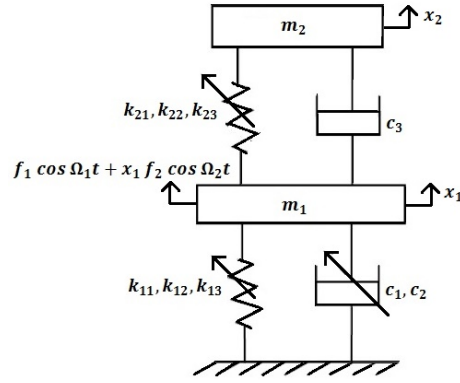
ESTABILIDADE DO SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE SUJEITO A AÇÃO DE AMORTECIMENTO VISCOSO COM PARÂMETROS DE ATRASO

Neste capítulo apresentamos o modelo de um sistema mecânico não linear de dois graus de liberdade, que será usado nos estudos de caso. Serão apresentadas as equações do movimento sem atraso, as equações do movimento com dois atrasos distintos na dissipação de ambos os amortecimentos e a equação de movimento com atrasos constantes na dissipação de amortecimento linear. Através do método de perturbação das múltiplas escalas, serão apresentadas as equações de resposta de frequência do estado estacionário para o modelo, juntamente com os possíveis casos de ressonância que serão analisados. O principal texto na confecção desta parte do trabalho foi [Nayfeh \(1993\)](#). Foram consultados também [Balachandran e Magrab \(2011\)](#), [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), [Neto \(2008\)](#), [Felício \(2010\)](#), [Figueiredo \(2000\)](#), [C.Hibbeler \(2005\)](#), [Beer *et al.* \(2010\)](#), [Nayfeh \(2004\)](#), [Oliveira \(2008\)](#), [Tang \(2007\)](#).

3.1 Equações Governantes

Motivados por [Sayed, Hamed e Amer \(2011\)](#), em nosso trabalho, propomos estudar a estabilidade de um sistema não linear sujeito a ação de amortecimento viscoso com parâmetros de atraso. Nosso sistema será um modelo de oscilador com dois graus de liberdade, representado na Figura 20 abaixo.

Figura 20 – Diagrama esquemático do modelo com absorvedor.



Fonte: o autor.

Analisando o sistema é possível identificar as forças que controlam seu comportamento:

1. As força de inércia devido à aceleração sofrida pelas massas do sistema principal e do absorvedor m_1 e m_2 , respectivamente:

$$m_1 \ddot{x}_1, \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2. \quad (3.2)$$

2. As forças de amortecimento devido à velocidade do sistema principal e absorvedor:

$$c_1 \dot{x}_1, \quad (3.3)$$

$$c_2 \dot{x}_2 x_1^2, \quad (3.4)$$

$$c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (3.5)$$

3. As forças elásticas lineares e não lineares das molas principal e do absorvedor:

$$k_{11} x_1, k_{12} x_1^2, k_{13} x_1^3, k_{21} (x_2 - x_1), k_{22} (x_2 - x_1)^2, k_{23} (x_2 - x_1)^3. \quad (3.6)$$

4. A força externa do sistema principal

$$f_1 \cos \Omega_1 t + x_1 f_2 \cos \Omega_2 t. \quad (3.7)$$

Através do equilíbrio das força, 2º lei de Newton, as equações de movimento governantes do sistema, podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon \alpha_1 x_1^2 - \varepsilon \alpha_2 x_1^3 - \varepsilon \zeta_1 \dot{x}_1 - \varepsilon \zeta_2 \dot{x}_1 x_1^2 - \varepsilon \zeta_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ & + \varepsilon \alpha_3 x_2 - \varepsilon \alpha_4 (x_1 - x_2)^2 - \varepsilon \alpha_5 (x_1 - x_2)^3 \\ & + \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon x_1 F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_2^2 (x_2 - x_1) - \varepsilon \beta_1 (x_2 - x_1)^2 - \varepsilon \beta_2 (x_2 - x_1)^3 - \varepsilon \zeta_4 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \quad (3.9)$$

onde ϵ é um pequeno parâmetro de perturbação e

$$\omega_1^2 = \frac{k_{11} + k_{21}}{m_1}, \alpha_1 = \frac{k_{12}}{\epsilon m_1}, \alpha_2 = \frac{k_{13}}{\epsilon m_1}, \zeta_1 = \frac{c_1}{\epsilon m_1}, \zeta_2 = \frac{c_2}{\epsilon m_1}, \zeta_3 = \frac{c_3}{\epsilon m_1}, \alpha_3 = \frac{k_{21}}{\epsilon m_1},$$

$$\alpha_4 = \frac{k_{22}}{\epsilon m_1}, \alpha_5 = \frac{k_{23}}{\epsilon m_1}, F_j = \frac{f_j}{\epsilon m_1}, \omega_2^2 = \frac{k_{21}}{\epsilon m_2}, \zeta_4 = \frac{c_3}{\epsilon m_2}, \beta_1 = \frac{k_{22}}{\epsilon m_2}, \beta_2 = \frac{k_{23}}{\epsilon m_2}.$$

Fazendo a modelagem através das equações de estado, podemos transformar as equações (3.8) e (3.9) em um sistema de primeira ordem e estas assumirão a forma:

$$\dot{X} = F(t, X(t)), \quad X \in \mathbb{R}^4,$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix},$$

representam respectivamente, o deslocamento e as forças.

Discretizando, em relação a X temos que,

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_1, & x_{12} &= \dot{x}_1, \\ \dot{x}_{11} &= \dot{x}_1 = x_{12}, & \ddot{x}_{11} &= \ddot{x}_1 = \dot{x}_{12}, \\ x_{21} &= x_2, & x_{22} &= \dot{x}_2, \\ \dot{x}_{21} &= \dot{x}_2 = x_{22}, & \ddot{x}_{21} &= \ddot{x}_2 = \dot{x}_{22}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de X nas equações (3.8) e (3.9), obtemos o sistema de primeira ordem na forma:

$$\dot{x}_{11} = x_{12}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} &= -\omega_1^2 x_{11} - \epsilon \alpha_1 x_{11}^2 - \epsilon \alpha_2 x_{11}^3 - \epsilon \zeta_1 x_{12} - \epsilon \zeta_2 x_{12} x_{11}^2 \\ &\quad - \epsilon \zeta_3 (x_{12} - x_{22}) + \epsilon \alpha_3 x_{21} - \epsilon \alpha_4 (x_{11} - x_{21})^2 \\ &\quad - \epsilon \alpha_5 (x_{11} - x_{21})^3 + \epsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \epsilon x_{11} F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{22} &= -\omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) - \epsilon \beta_1 (x_{21} - x_{11})^2 - \epsilon \beta_2 (x_{21} - x_{11})^3 \\ &\quad - \epsilon \zeta_4 (x_{22} - x_{12}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Usando que $\dot{X} = F(X)$, obtemos as funções,

$$f_{11} = x_{12}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} f_{12} = & -\omega_1^2 x_{11} - \varepsilon \alpha_1 x_{11}^2 - \varepsilon \alpha_2 x_{11}^3 - \varepsilon \zeta_1 x_{12} - \varepsilon \zeta_2 x_{12} x_{11}^2 \\ & - \varepsilon \zeta_3 (x_{12} - x_{22}) + \varepsilon \alpha_3 x_{21} - \varepsilon \alpha_4 (x_{11} - x_{21})^2 \\ & - \varepsilon \alpha_5 (x_{11} - x_{21})^3 + \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon x_{11} F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$f_{21} = x_{22}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} f_{22} = & -\omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) - \varepsilon \beta_1 (x_{21} - x_{11})^2 - \varepsilon \beta_2 (x_{21} - x_{11})^3 \\ & - \varepsilon \zeta_4 (x_{22} - x_{12}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2 Equações de Movimento com Parâmetros de Atraso

Para chegarmos ao nosso objetivo, primeiramente faremos a introdução dos parâmetros de atraso nas viscosidades.

$$\dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_1(t - \tau_1), \quad \tau_1 > 0, \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2(t - \tau_2), \quad \tau_2 > 0. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.18) e (3.19) nas equações (3.8) e (3.9) obtemos as equações de movimento com parâmetros de atraso

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon \alpha_1 x_1^2 - \varepsilon \alpha_2 x_1^3 - \varepsilon \zeta_1 \dot{x}_1(t - \tau_1) - \varepsilon \zeta_2 \dot{x}_1(t - \tau_1) x_1^2 \\ & - \varepsilon \zeta_3 (\dot{x}_1(t - \tau_1) - \dot{x}_2(t - \tau_2)) + \varepsilon \alpha_3 x_2 - \varepsilon \alpha_4 (x_1 - x_2)^2 \\ & - \varepsilon \alpha_5 (x_1 - x_2)^3 + \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon x_1 F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & -\omega_2^2 (x_2 - x_1) - \varepsilon \beta (x_2 - x_1)^2 - \varepsilon \beta_2 (x_2 - x_1)^3 \\ & - \varepsilon \zeta_4 (\dot{x}_2(t - \tau_2) - \dot{x}_1(t - \tau_1)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fazendo a modelagem através das equações de estado, podemos transformar as equações (3.20) e (3.21) em um sistema de primeira ordem e estas assumirão a forma:

$$\dot{X} = F(t, X_t), \quad x_t \in C[-\tau, 0],$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix},$$

representam respectivamente, o deslocamento e as forças na mola i . O conjunto $C[-\tau, 0]$ representa o espaço das funções definidas no intervalo $[-\tau, 0]$.

Discretizando, em relação a X temos que,

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_1, & x_{12} &= \dot{x}_1, \\ \dot{x}_{11} &= \dot{x}_1 = x_{12}, & \ddot{x}_{11} &= \ddot{x}_1 = \dot{x}_{12}, \\ x_{21} &= x_2, & x_{22} &= \dot{x}_2, \\ \dot{x}_{21} &= \dot{x}_2 = x_{22}, & \ddot{x}_{21} &= \ddot{x}_2 = \dot{x}_{22}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de X nas equações com parâmetros de atraso (3.20) - (3.21), obtemos o sistema de primeira ordem na forma:

$$\dot{x}_{11} = x_{12}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} &= -\omega_1^2 x_{11} - \varepsilon \alpha_1 x_{11}^2 - \varepsilon \alpha_2 x_{11}^3 - \varepsilon \zeta_1 x_{12}(t - \tau_1) - \varepsilon \zeta_2 x_{12}(t - \tau_1) x_{11}^2 \\ &\quad - \varepsilon \zeta_3 (x_{12}(t - \tau_1) - x_{22}(t - \tau_2)) + \varepsilon \alpha_3 x_{21} - \varepsilon \alpha_4 (x_{11} - x_{21})^2 \\ &\quad - \varepsilon \alpha_5 (x_{11} - x_{21})^3 + \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon x_{11} F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{22} &= -\omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) - \varepsilon \beta_1 (x_{21} - x_{11})^2 - \varepsilon \beta_2 (x_{21} - x_{11})^3 \\ &\quad - \varepsilon \zeta_4 (x_{22}(t - \tau_2) - x_{12}(t - \tau_1)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando que $\dot{X} = F(X_t)$, obtemos as funções.

$$f_{11} = x_{12}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} f_{12} &= -\omega_1^2 x_{11} - \varepsilon \alpha_1 x_{11}^2 - \varepsilon \alpha_2 x_{11}^3 - \varepsilon \zeta_1 x_{12}(t - \tau_1) - \varepsilon \zeta_2 x_{12}(t - \tau_1) x_{11}^2 \\ &\quad - \varepsilon \zeta_3 (x_{12}(t - \tau_1) - x_{22}(t - \tau_2)) + \varepsilon \alpha_3 x_{21} - \varepsilon \alpha_4 (x_{11} - x_{21})^2 \\ &\quad - \varepsilon \alpha_5 (x_{11} - x_{21})^3 + \varepsilon F_1 \cos \Omega_1 t + \varepsilon x_{11} F_2 \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$f_{21} = x_{22}, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} f_{22} &= -\omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) - \varepsilon \beta_1 (x_{21} - x_{11})^2 - \varepsilon \beta_2 (x_{21} - x_{11})^3 \\ &\quad - \varepsilon \zeta_4 (x_{22}(t - \tau_2) - x_{12}(t - \tau_1)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3 Técnicas de Perturbação Para Sistemas Não Lineares Com Atraso

Usando um absorvedor de massa não-linear com atraso conectado ao sistema principal de mola não linear e amortecedores não lineares com atraso, o modelo de um oscilador de dois graus liberdade que é mostrado na Figura 20, também pode ser escrito na forma de sistemas de equações diferenciais não-lineares com atraso constante:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \epsilon \alpha_1 x_1^2 + \epsilon \alpha_2 x_1^3 + \epsilon \zeta_1 \dot{x}_1 + \epsilon \zeta_2 \dot{x}_1 x_1^2 + \epsilon \zeta_3 (\dot{x}_1(t - \tau) - \dot{x}_2(t - \tau)) - \epsilon \alpha_3 x_2 \\ + \epsilon \alpha_4 (x_1 - x_2)^2 + \epsilon \alpha_5 (x_1 - x_2)^3 = \epsilon F_1 \cos(\Omega_1 t) + \epsilon x_1 F_2 \cos(\Omega_2 t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + \epsilon \beta_1 (x_2 - x_1)^2 + \epsilon \beta_2 (x_2 - x_1)^3 + \epsilon \zeta_4 (\dot{x}_2(t - \tau) - \dot{x}_1(t - \tau)) = 0. \quad (3.31)$$

Agora iremos determinar uma expansão uniforme de segunda ordem para as equações (3.30) e (3.31) aplicando o método das Múltiplas Escalas. Precisaremos de duas escalas, uma escala de tempo rápido $T_0 = t$ devido a ocorrência de alterações nas frequências ω_j e Ω_j , e uma escala de tempo lento $T_1 = \epsilon t$ devido as modulações nas amplitude e fases oriundas das não linearidades e ressonância paramétricas.

3.3.1 Perturbação da solução

Aplicando o método da Múltiplas Escalas, uma solução uniforme das equações (3.30) e (3.31) é procurada na forma como Nayfeh (1993):

$$x_1(t; \epsilon) = x_{10}(T_0, T_1) + \epsilon x_{11}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2), \quad (3.32)$$

$$x_2(t; \epsilon) = x_{20}(T_0, T_1) + \epsilon x_{21}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2), \quad (3.33)$$

onde $T_0 = t$ é a escala de tempo rápido, e $T_1 = \epsilon t$ é a escala de tempo lento. A primeira e a segunda derivada de $x(t; \epsilon) = x(T_0, T_1)$ com relação a t são dadas por:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1, \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 D_1^2. \quad (3.35)$$

onde D_k são os operadores diferenciais, $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}$. Substituindo a solução aproximada (3.32) e (3.33) nas equações (3.30) e (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{10} + 2\epsilon D_0 D_1 x_{10} + \epsilon D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{10} + \epsilon \omega_1^2 x_{11} + \epsilon \alpha_1 x_{10}^2 + \epsilon \alpha_2 x_{10}^3 + \epsilon \zeta_1 D_0 x_{10} \\ + \epsilon \zeta_2 (D_0 x_{10}) x_{10}^2 + \epsilon \zeta_3 (D_0 x_{10} - D_0 x_{20}) - \epsilon \alpha_3 x_{20} + \epsilon \alpha_4 (x_{10} - x_{20})^2 \\ + \epsilon \alpha_5 (x_{10} - x_{20})^3 = \epsilon F_1 \cos(\Omega_1 T_0) + \epsilon x_{10} F_2 \cos(\Omega_2 T_0), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{20} + 2\epsilon D_0 D_1 x_{20} + \epsilon D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 (x_{20} - x_{10}) + \epsilon \omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) + \epsilon \beta_1 (x_{20} - x_{10})^2 \\ + \epsilon \beta_2 (x_{20} - x_{10})^3 + \epsilon \zeta_4 (D_0 x_{20} - D_0 x_{10}) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

e igualando os coeficientes de mesma potência de ϵ , em ambos os lados, temos:

- para ordem ϵ^0 :

$$(D_0^2 + \omega_1^2)x_{10} = 0, \quad (3.38)$$

$$(D_0^2 + \omega_2^2)x_{20} = \omega_2^2 x_{10}, \quad (3.39)$$

- para ordem ϵ^1 :

$$\begin{aligned} (D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} &= F_1 \cos(\Omega_1 T_0) + x_{10} F_2 \cos(\Omega_2 T_0) - 2D_0 D_1 x_{10} - \alpha_1 x_{10}^2 - \alpha_2 x_{10}^3 \\ &- \zeta_1(D_0 x_{10}) - \zeta_2(D_0 x_{10})x_{10}^2 - \zeta_3(D_0 x_{10} - D_0 x_{20})(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \\ &+ \alpha_3 x_{20} - \alpha_4(x_{10} - x_{20})^2 - \alpha_5(x_{10} - x_{20})^3, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + \omega_2^2)x_{21} &= \omega_2^2 x_{11} - 2D_0 D_1 x_{20} - \beta_1(x_{20} - x_{10})^2 - \beta_2(x_{20} - x_{10})^3 \\ &- \zeta_4(D_0 x_{20} - D_0 x_{10})(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considerando a solução geral da eq. (3.38) como

$$x_{10} = a_1(T_1) \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)), \quad (3.42)$$

ela pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} x_{10} &= A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + \bar{A}_1 e^{(-i\omega_1 T_0)}, \\ x_{10} &= A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde $A_1 = \frac{a_1(T_1)}{2} e^{(i\mu_1(T_1))}$ é uma função desconhecida em T_1 , que pode ser determinada eliminando os termos seculares na próxima aproximação, e cc o complexo conjugado dos termos anteriores. Substituindo a eq. (3.42) na eq. (3.39) obtemos

$$(D_0^2 + \omega_2^2)x_{20} = \omega_2^2 a_1(T_1) \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)). \quad (3.44)$$

A solução geral da eq.(3.44) pode ser expressa como

$$x_{20} = a_2(T_1) \cos(\omega_2 T_0 + \mu_2(T_1)) + \delta_1 \omega_2^2 a_1(T_1) \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)). \quad (3.45)$$

Substituindo na eq. (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} -a_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 T_0 + \mu_2(T_1)) - \delta_1 \omega_2^2 \omega_1^2 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) + a_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 T_0 + \mu_2(T_1)) \\ + \delta_1 \omega_2^4 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) &= \omega_2^2 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) \\ -\delta_1 \omega_2^2 \omega_1^2 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) + \delta_1 \omega_2^4 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) &= \omega_2^2 a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)) \\ -\delta_1 \omega_1^2 + \delta_1 \omega_2^2 &= 1 \\ \delta_1 &= \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Então,

$$x_{20} = a_2(T_1) \cos(\omega_2 T_0 + \mu_2(T_1)) + \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} a_1(T_1) \cos(\omega_1 T_0 + \mu_1(T_1)), \quad (3.47)$$

que pode ser expressa como

$$x_{20} = A_2(T_1) e^{(i\omega_2 T_0)} + \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} A_1(T_1) e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.48)$$

ou de outra forma

$$x_{20} = A_2(T_1) e^{(i\omega_2 T_0)} + \Delta_1 A_1(T_1) e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.49)$$

onde $\Delta_1 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$ e $A_2 = \frac{a_2(T_1)}{2} e^{(i\mu_2(T_1))}$ é uma função desconhecida em T_1 , que pode ser determinada eliminando os termos seculares na próxima aproximação, e cc o complexo conjugado dos termos anteriores.

Para resolver as equações (3.40) e (3.41) primeiro vamos substituir as equações (3.43) e (3.49) e desenvolver o lado direito como a soma de um número complexo com o seu conjugado.

$$\begin{aligned} F_1 \cos(\Omega_1 T_0) &= \frac{F_1}{2} \left(e^{(i\Omega_1 T_0)} + e^{(-i\Omega_1 T_0)} \right) \\ &= \frac{F_1}{2} e^{(i\Omega_1 T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} x_{10} F_2 \cos(\Omega_2 T_0) &= \left(A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + \bar{A}_1 e^{(-i\omega_1 T_0)} \right) \left(\frac{F_2}{2} e^{(i\Omega_2 T_0)} + \frac{F_2}{2} e^{(-i\Omega_2 T_0)} \right) \\ &= \frac{A_1 F_2}{2} e^{(i(\Omega_2 + \omega_1) T_0)} + \frac{\bar{A}_1 F_2}{2} \exp(i(\Omega_2 - \omega_1) T_0) + cc, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} D_0 x_{10} &= i\omega_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \bar{A}_1 e^{(-i\omega_1 T_0)} \\ &= i\omega_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} D_0 D_1 x_{10} &= D_1 (i\omega_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \bar{A}_1 e^{(-i\omega_1 T_0)}) \\ &= i\omega_1 (D_1 A_1) e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} x_{10}^2 &= A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} + 2A_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_1^2 e^{(-2i\omega_1 T_0)} \\ &= A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} + A_1 \bar{A}_1 + cc, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} x_{10}^3 &= A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + 3A_1 \bar{A}_1^2 e^{(-i\omega_1 T_0)} + \bar{A}_1^3 e^{(-3i\omega_1 T_0)} \\ &= A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$(D_0 x_{10}) x_{10}^2 = (i\omega_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc)(A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} + 2A_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_1^2 e^{(-2i\omega_1 T_0)}) \quad (3.56)$$

$$= i\omega_1 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 2i\omega_1 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + i\omega_1 A_1 \bar{A}_1^2 e^{(-i\omega_1 T_0)} + cc \quad (3.57)$$

$$= i\omega_1 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + i\omega_1 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.58)$$

$$D_0 x_{20} = i\omega_2 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + i\omega_1 \Delta_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.59)$$

$$D_0 D_1 x_{20} = i\omega_2 (D_1 A_2) e^{(i\omega_2 T_0)} + i\omega_1 \Delta_1 (D_1 A_1) e^{(i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.60)$$

$$D_0 x_{10} - D_0 x_{20} = i\omega_1 \Delta_2 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_2 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + cc, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} (x_{10} - x_{20})^2 &= (\Delta_2 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + cc)^2 \\ &= \Delta_2^2 A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} - 2\Delta_2 A_1 A_2 e^{(i(\omega_1 + \omega_2) T_0)} + A_2^2 e^{(2i\omega_2 T_0)} \\ &+ \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 - \Delta_2 A_1 \bar{A}_2 e^{(i(\omega_1 - \omega_2) T_0)} + A_2 \bar{A}_2 + cc, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} (x_{10} - x_{20})^3 &= \left((\Delta_2 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc) - (A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + cc) \right)^3 \\ &= (\Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3\Delta_2^2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc) \\ &- 3(\Delta_2^2 A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} + \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 + cc)(A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + cc) \\ &+ 3(\Delta_2 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} + cc)(A_2^2 e^{(2i\omega_2 T_0)} + A_2 \bar{A}_2 + cc) \\ &- (A_2^3 e^{(3i\omega_2 T_0)} + 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + cc) \\ &= (\Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3\Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)}) - (A_2^3 e^{(3i\omega_2 T_0)} + 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)}) \\ &- 3\Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{(i(2\omega_1 + \omega_2) T_0)} - 3\Delta_2^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{(i(2\omega_1 - \omega_2) T_0)} \\ &- 3\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} - 3\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_2 e^{(-i\omega_2 T_0)} \\ &+ 3\Delta_2 A_1 A_2^2 e^{(i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0)} + 3\Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_1 T_0)} \\ &+ 3\Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{(i(2\omega_2 - \omega_1) T_0)} + 3\Delta_2 \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(-i\omega_1 T_0)} + cc \\ &= (\Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3\Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)}) - (A_2^3 e^{(3i\omega_2 T_0)} + 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)}) \\ &- 3\Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{(i(2\omega_1 + \omega_2) T_0)} - 3\Delta_2^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{(i(2\omega_1 - \omega_2) T_0)} \\ &- 6\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + 3\Delta_2 A_1 A_2^2 e^{(i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0)} \\ &+ 6\Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_1 T_0)} + 3\Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{(i(2\omega_2 - \omega_1) T_0)} + cc, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde $\Delta_2 = 1 - \Delta_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$. Assim

$$\begin{aligned}
 (D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = & \frac{F_1}{2}e^{i(\Omega_1 T_0)} + \frac{A_1 F_2}{2}e^{i(\Omega_2 + \omega_1)T_0} + \frac{\bar{A}_1 F_2}{2}e^{i(\Omega_2 - \omega_1)T_0} \\
 & - 2i\omega_1(D_1 A_1)e^{i\omega_1 T_0} - \alpha_1(A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1 \bar{A}_1) \\
 & - \alpha_2(A_1^3 e^{3i\omega_1 T_0} + 3A_1^2 \bar{A}_1 e^{i\omega_1 T_0}) - i\omega_1 \zeta_1 A_1 e^{i\omega_1 T_0} \\
 & - i\omega_1 \zeta_2 A_1^3 e^{3i\omega_1 T_0} - i\omega_1 \zeta_2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{i\omega_1 T_0} - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau)e^{i\omega_1(T_0 - \tau)} \\
 & + i\omega_2 \zeta_3 A_2 (T_1 - \epsilon\tau)e^{i\omega_2(T_0 - \tau)} + \alpha_3(A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \Delta_1 A_1 e^{i\omega_1 T_0}) \\
 & - \alpha_4(\Delta_2^2 A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} - 2\Delta_2 A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + A_2^2 e^{2i\omega_2 T_0}) \\
 & - \alpha_4(\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 - \Delta_2 A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + A_2 \bar{A}_2) \\
 & - \alpha_5(\Delta_2^3 A_1^3 e^{3i\omega_1 T_0} + 3\Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{i\omega_1 T_0} - A_2^3 e^{3i\omega_2 T_0} - 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{i\omega_2 T_0}) \\
 & + 3\alpha_5 \Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} + 3\alpha_5 \Delta_2^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0} \\
 & + 6\alpha_5 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{i\omega_2 T_0} - 3\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2^2 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} \\
 & - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{i\omega_1 T_0} - 3\alpha_5 \Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\omega_2 - \omega_1)T_0} + cc, \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D_0^2 + \omega_2^2)x_{21} = & \omega_2^2 x_{11} - 2i\omega_2(D_1 A_2)e^{i\omega_2 T_0} - 2i\omega_1 \Delta_1(D_1 A_1)e^{i\omega_1 T_0} \\
 & - \beta_1(\Delta_2^2 A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} - 2\Delta_2 A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + A_2^2 e^{2i\omega_2 T_0}) \\
 & - \beta_1(\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 - \Delta_2 A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + A_2 \bar{A}_2) \\
 & + \beta_2(\Delta_2^3 A_1^3 e^{3i\omega_1 T_0} + 3\Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{i\omega_1 T_0} - A_2^3 e^{3i\omega_2 T_0} - 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{i\omega_2 T_0}) \\
 & + \beta_2(-3\Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} - 3\Delta_2^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0}) \\
 & - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \beta_2(3\Delta_2 A_1 A_2^2 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} + 6\Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{i\omega_1 T_0}) \\
 & + 3\beta_2 \Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\omega_2 - \omega_1)T_0} + i\omega_1 \zeta_4 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau)e^{i\omega_1(T_0 - \tau)} \\
 & - i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon\tau)e^{i\omega_2(T_0 - \tau)} + cc. \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

As soluções particulares das equações (3.64) e (3.65) depois de eliminar os termos seculares são dadas por

$$\begin{aligned}
 x_{11} = & U_1 e^{i(\Omega_1 T_0)} + U_2 e^{i(\Omega_2 + \omega_1)T_0} + U_3 e^{i(\Omega_2 - \omega_1)T_0} + H_1 e^{2i\omega_1 T_0} \\
 & + H_2 e^{3i\omega_1 T_0} + H_3 e^{i\omega_2 T_0} + H_4 e^{2i\omega_2 T_0} + H_5 e^{3i\omega_2 T_0} \\
 & + H_6 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + H_7 e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + H_8 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} \\
 & + H_9 e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0} + H_{10} e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} + H_{11} e^{i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0} + H_{12} + cc, \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{21} = & U_4 e^{i(\Omega_1 T_0)} + U_5 e^{i(\Omega_2 + \omega_1)T_0} + U_6 e^{i(\Omega_2 - \omega_1)T_0} + H_{13} e^{i\omega_1 T_0} \\
 & + H_{14} e^{2i\omega_1 T_0} + H_{15} e^{3i\omega_1 T_0} + H_{16} e^{2i\omega_2 T_0} + H_{17} e^{3i\omega_2 T_0} \\
 & + H_{18} e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + H_{19} e^{i(\omega_1 - \omega_2)T_0} + H_{20} e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} \\
 & + H_{21} e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0} + H_{22} e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} + H_{23} e^{i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0} + H_{24} + cc. \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

onde U_i , $i = 1$ to 6, H_i , $i = 1$ to 24, são funções complexas em T_1 .

Para eliminar os termos seculares, é necessário que

$$\begin{aligned} -2i\omega_1(D_1 A_1)e^{(i\omega_1 T_0)} - 3\alpha_2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \zeta_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \zeta_2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} \\ - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_1 (T_0 - \tau))} + \alpha_3 \Delta_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - 3\alpha_5 \Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} \\ - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_1 T_0)} = 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} -2i\omega_2(D_1 A_2)e^{(i\omega_2 T_0)} + H_3 e^{(i\omega_2 T_0)} - 3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)} - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} \\ - i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_2 (T_0 - \tau))} = 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

isto é

$$\begin{aligned} -2i\omega_1(D_1 A_1) - 3\alpha_2 A_1^2 \bar{A}_1 - i\omega_1 \zeta_1 A_1 - i\omega_1 \zeta_2 A_1^2 \bar{A}_1 - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(-i\omega_1 \tau)} \\ + \alpha_3 \Delta_1 A_1 - 3\alpha_5 \Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$-2i\omega_2(D_1 A_2) + H_3 - 3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 - i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(-i\omega_2 \tau)} = 0 \quad (3.71)$$

A solução geral de x_1 e x_2 até à aproximação de primeira ordem é dada por

$$x_1 = x_{10} + \epsilon x_{11} + \dots, \quad x_2 = x_{20} + \epsilon x_{21} + \dots. \quad (3.72)$$

3.3.2 Casos de ressonância

Na eq. (3.49) temos o caso de ressonância $\omega_1 \approx \omega_2$. Na eq. (3.66), temos os seguintes casos de ressonância

$$\begin{aligned} \Omega_1 \approx \omega_1, \quad \Omega_2 + \omega_1 \approx \omega_1, \quad \Omega_2 - \omega_1 \approx \omega_1, \quad 2\omega_1 \approx \omega_1, \quad 3\omega_1 \approx \omega_1, \quad \omega_2 \approx \omega_1, \quad 2\omega_2 \approx \omega_1, \quad 3\omega_2 \approx \omega_1 \\ \omega_1 + \omega_2 \approx \omega_1, \quad \omega_1 - \omega_2 \approx \omega_1, \quad 2\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_1, \quad 2\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_1, \quad \omega_1 + 2\omega_2 \approx \omega_1, \quad \omega_1 - 2\omega_2 \approx \omega_1, \end{aligned}$$

assim

$$\Omega_1 \approx \omega_1, \quad \Omega_2 \approx 0, \quad \Omega_2 \approx 2\omega_1, \quad \omega_1 \approx 0, \quad \omega_2 \approx \omega_1, \quad 2\omega_2 \approx \omega_1, \quad 3\omega_2 \approx \omega_1, \quad \omega_2 \approx 0$$

e na eq. (3.67) temos

$$\begin{aligned} \Omega_1 \approx \omega_2, \quad \Omega_2 + \omega_1 \approx \omega_2, \quad \Omega_2 - \omega_1 \approx \omega_2, \quad \omega_1 \approx \omega_2, \quad 2\omega_1 \approx \omega_2, \quad 3\omega_1 \approx \omega_2, \quad 2\omega_2 \approx \omega_2, \quad 3\omega_2 \approx \omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2 \approx \omega_2, \quad \omega_1 - \omega_2 \approx \omega_2, \quad 2\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_2, \quad 2\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_2, \quad \omega_1 + 2\omega_2 \approx \omega_2, \quad \omega_1 - 2\omega_2 \approx \omega_2, \end{aligned}$$

isto é

$$\Omega_1 \approx \omega_2, \quad \Omega_2 \approx \omega_2 - \omega_1, \quad \Omega_2 \approx \omega_2 + \omega_1, \quad \omega_1 \approx \omega_2, \quad 2\omega_1 \approx \omega_2$$

$$3\omega_1 \approx \omega_2, \quad \omega_2 \approx 0, \quad \omega_1 \approx 0, \quad \omega_1 \approx 2\omega_2, \quad \omega_1 \approx 3\omega_2.$$

Assim, das equações (3.43, 3.49, 3.66, 3.67) todos os casos de ressonância possíveis são:

- 1) **Ressonância trivial:** $\Omega_j \approx \omega_j \approx 0$, $j = 1, 2$
- 2) **Ressonância primária:** $\Omega_1 \approx \omega_1$, $\Omega_1 \approx \omega_2$
- 3) **Ressonância sub-harmônica:** $\Omega_2 \approx 2\omega_1$
- 4) **Ressonância interna:** $\omega_1 \approx n\omega_2$, $\omega_2 \approx n\omega_1$, $n = 1, 2, 3$
- 5) **Ressonância combinada:** $\Omega_2 \approx \pm\omega_2 \mp \omega_1$, $\Omega_2 \approx \pm\omega_1 \pm \omega_2$
- 6) **Ressonância simultânea:** Qualquer combinação dos casos de ressonância acima é considerado como ressonância simultânea.

3.4 Análise de Estabilidade

A estabilidade do sistema é investigada em um dos piores casos de ressonância, que é a primária simultânea, paramétrica principal e ressonância interna onde $\Omega_1 \approx \omega_1$, $\Omega_2 \approx 2\omega_1$ e $\omega_2 \approx 3\omega_1$. Utilizando os parâmetros de sintonia σ_1 , σ_2 e σ_3 tal que:

$$\Omega_1 = \omega_1 + \epsilon\sigma_1, \quad \Omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_2 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 3\omega_1 + \epsilon\sigma_3 \quad (3.73)$$

um conjunto de quatro equações é obtida, que pode ser usada para determinar a amplitude e fase das soluções de estado estacionário. Substituindo a eq. (3.73) nas equações (3.64) e (3.65) obtemos

$$\begin{aligned}
 (D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = & \frac{F_1}{2}E^{(i\sigma_1 T_1)}e^{(i\omega_1 T_0)} + \frac{A_1 F_2}{2}e^{(i\sigma_2 T_1)}e^{(3i\omega_1 T_0)} + \frac{\bar{A}_1 F_2}{2}e^{(i\sigma_2 T_1)}e^{(i\omega_1 T_0)} \\
 & - 2i\omega_1(D_1 A_1)e^{(i\omega_1 T_0)} - \alpha_1(A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} + A_1 \bar{A}_1) \\
 & - \alpha_2(A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} + 3A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)}) - i\omega_1 \zeta_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} \\
 & - i\omega_1 \zeta_2 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \zeta_2 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_1 (T_0 - \tau))} \\
 & + i(3\omega_1 + \epsilon\sigma_3)\zeta_3 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\sigma_3 (T_1 - \epsilon\tau))} e^{(3i\omega_1 (T_0 - \tau))} \\
 & + \alpha_3 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(3i\omega_1 T_0)} + \alpha_3 \Delta_1 A_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - \alpha_4 \Delta_2^2 A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} \\
 & + 2\alpha_4 \Delta_2 A_1 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(4i\omega_1 T_0)} - \alpha_4 A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(6i\omega_1 T_0)} \\
 & - \alpha_4 (\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 - \Delta_2 A_1 \bar{A}_2 e^{(-i\sigma_3 T_1)} e^{(-2i\omega_1 T_0)} + A_2 \bar{A}_2) - \alpha_5 (\Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} \\
 & + 3\Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)}) + \alpha_5 (A_2^3 e^{(3i\sigma_3 T_1)} e^{(9i\omega_1 T_0)} + 3A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(3i\omega_1 T_0)}) \\
 & + \alpha_5 (3\Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(5i\omega_1 T_0)} + 3\Delta_2^2 \bar{A}_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(i\omega_1 T_0)}) \\
 & + 6\alpha_5 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(3i\omega_1 T_0)} - 3\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(7i\omega_1 T_0)} \\
 & - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_1 T_0)} - 3\alpha_5 \Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(5i\omega_1 T_0)} + cc, \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_0^2 + \omega_2^2)x_{21} = & \omega_2^2 x_{11} - 2i\omega_2(D_1 A_2)e^{(i\omega_2 T_0)} - 2i\omega_1 \Delta_1(D_1 A_1)e^{(i\omega_1 T_0)} \\
& - \beta_1(\Delta_2^2 A_1^2 e^{(2i\omega_1 T_0)} - 2\Delta_2 A_1 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(4i\omega_1 T_0)} + A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(6i\omega_1 T_0)}) \\
& - \beta_1(\Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 - \Delta_2 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(2i\omega_1 T_0)} + A_2 \bar{A}_2) + \beta_2 \Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} \\
& + 3\beta_2 \Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 e^{(i\omega_1 T_0)} - \beta_2 A_2^3 e^{(3i\sigma_3 T_1)} e^{(9i\omega_1 T_0)} - 3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)} \\
& + \beta_2(-3\Delta_2^2 A_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(5i\omega_1 T_0)} - 3\Delta_2^2 \bar{A}_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} e^{(i\omega_1 T_0)}) \\
& - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + 3\beta_2 \Delta_2 A_1 A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(7i\omega_1 T_0)} \\
& + 6\beta_2 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_1 T_0)} + 3\beta_2 \Delta_2 \bar{A}_1 A_2^2 e^{(2i\sigma_3 T_1)} e^{(5i\omega_1 T_0)} \\
& + i\omega_1 \zeta_4 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_1 (T_0 - \tau))} - i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_2 (T_0 - \tau))} + c.c. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

e eliminando os termos seculares leva às condições de solução como

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{2} e^{(i\sigma_1 T_1)} + \frac{\bar{A}_1 F_2}{2} e^{(i\sigma_2 T_1)} - 2i\omega_1(D_1 A_1) - 3\alpha_2 A_1^2 \bar{A}_1 - i\omega_1 \zeta_1 A_1 \\
- i\omega_1 \zeta_2 A_1^2 \bar{A}_1 - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(-i\omega_1 \tau)} + \alpha_3 \Delta_1 A_1 \\
- 3\alpha_5 \Delta_2^3 A_1^2 \bar{A}_1 + 3\alpha_5 \Delta_2^2 \bar{A}_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)} - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 = 0, \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2i\omega_2(D_1 A_2) + \beta_2 \Delta_2^3 A_1^3 e^{(-i\sigma_1 T_1)} - 3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 \\
- i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(-i\omega_2 \tau)} + \text{os termos seculares de } \omega_2^2 x_{11} = 0. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular os termos secular de x_{21} presentes em $\omega_2^2 x_{11}$ que são os coeficientes das exponenciais $\exp(i\omega_2 T_0)$ e $\exp(3i\omega_1 T_0) = e^{(i(\omega_2 T_0 - \sigma_3 T_1))}$ para o caso de ressonância estudado. Temos

$$\begin{aligned}
(D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = i\omega_2 \zeta_3 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{(i\omega_2 (T_0 - \tau))} + \alpha_3 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)} + 3\alpha_5 A_2^2 \bar{A}_2 e^{(i\omega_2 T_0)} \\
+ 6\alpha_5 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 e^{(i\omega_2 T_0)}. \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Reescrevendo de forma simplificada

$$(D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = Ae^{(i\omega_2 T_0)}, \quad (3.79)$$

tomando a solução particular $x_p = \delta_2 Ae^{(i\omega_2 T_0)}$ e substituindo na eq. (3.79) obtemos

$$\begin{aligned}
-\omega_2^2 \delta_2 Ae^{(i\omega_2 T_0)} + \omega_1^2 \delta_2 Ae^{(i\omega_2 T_0)} &= Ae^{(i\omega_2 T_0)} \\
\delta_2 &= \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (3.80)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\omega_2^2 x_p = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} [i\omega_2 \zeta_3 e^{(-i\omega_2 \tau)} A_2 (T_1 - \epsilon\tau) + \alpha_3 A_2 + 3\alpha_5 A_2^2 \bar{A}_2 + 6\alpha_5 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2] e^{(i\omega_2 T_0)} \quad (3.81)$$

e também

$$(D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = -\alpha_2 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} - i\omega_1 \zeta_2 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)} - \alpha_5 \Delta_2^3 A_1^3 e^{(3i\omega_1 T_0)},$$

de forma simplificada

$$(D_0^2 + \omega_1^2)x_{11} = Ae^{(3i\omega_1 T_0)} = Ae^{(-i\sigma_3 T_1)} e^{(i\omega_2 T_0)}, \quad (3.82)$$

substituindo a solução particular $x_p = \delta_3 Ae^{(3i\omega_1 T_0)}$ na eq. (3.82) teremos

$$\begin{aligned} -9\omega_1^2 \delta_3 Ae^{(3i\omega_1 T_0)} + \omega_1^2 \delta_3 Ae^{(3i\omega_1 T_0)} &= Ae^{(3i\omega_1 T_0)} \\ \delta_3 &= -\frac{1}{8\omega_1^2}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Logo

$$\omega_2^2 x_p = \omega_2^2 \frac{i\omega_1 \zeta_2 + \alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3}{8\omega_1^2} A_1^3 (-i\sigma_3 T_1) e^{(i\omega_2 T_0)}. \quad (3.84)$$

Reorganizando os termos secular das equações (3.76) e (3.77) usando os termos das equações (3.82)-(3.84) obtemos

$$\begin{aligned} 2i\omega_1(D_1 A_1) &= [-i\omega_1 \zeta_1 + \alpha_3 \Delta_1] A_1 - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 e^{(-i\omega_1 \tau)} A_1 (T_1 - \epsilon \tau) \\ &\quad - [i\omega_1 \zeta_2 + 3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3] A_1^2 \bar{A}_1 - 6\alpha_5 \Delta_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 \\ &\quad + \frac{F_1}{2} e^{(i\sigma_1 T_1)} + \frac{\bar{A}_1 F_2}{2} e^{(i\sigma_2 T_1)} + 3\alpha_5 \Delta_2^2 \bar{A}_1^2 A_2 e^{(i\sigma_3 T_1)}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_2(D_1 A_2) &= -i\omega_2 \zeta_4 A_2 (T_1 - \epsilon \tau) e^{(-i\omega_2 \tau)} + [\omega_2^2 \Delta_3 + \beta_2 \Delta_2^3] A_1^3 e^{(-i\sigma_3 T_1)} \\ &\quad + \omega_2^2 \Delta_4 A_2 - i\Delta_1 \omega_2 \zeta_3 e^{(-i\omega_2 \tau)} A_2 (T_1 - \epsilon \tau) \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$-3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 - 6\beta_2 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 A_2, \quad (3.87)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \Delta_2 = 1 - \Delta_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad \Delta_3 = \frac{i\omega_1 \zeta_2 + \alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3}{8\omega_1^2} e \\ \Delta_4 &= \frac{\alpha_3 + 6\alpha_5 \Delta_2^2 A_1 \bar{A}_1 + 3\alpha_5 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Expressamos a função complexa A_n na forma polar como

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\mu_n(T_1)} (n = 1, 2), \quad (3.89)$$

onde a_n e μ_n são reais. Substituindo a eq. (3.89) nas equações (3.86) e (3.87) e resolvendo as derivadas envolvidas,

$$\begin{aligned} i\omega_1 (a_1' \exp(i\mu_1) + i\mu_1' a_1 \exp(i\mu_1)) &= [-i\omega_1 \zeta_1 + \alpha_3 \Delta_1] \frac{1}{2} a_1 \exp(i\mu_1) \\ &\quad - i\omega_1 \zeta_3 \Delta_2 \frac{1}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \exp(i(\mu_1 (T_1 - \epsilon \tau) - \omega_1 \tau)) \\ &\quad - i\omega_1 \zeta_2 \frac{a_1^3}{8} \exp(i\mu_1) - [3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3] \frac{a_1^3}{8} \exp(i\mu_1) \\ &\quad - \frac{6}{8} \alpha_5 \Delta_2 \exp(i\mu_1) + \frac{F_1}{2} \exp(i\sigma_1 T_1) \\ &\quad + \frac{\bar{F}_2}{4} a_1 \exp(i(\sigma_2 T_1 - \mu_1)) \\ &\quad + \frac{3}{8} \alpha_5 \Delta_2^2 a_1^2 a_2 \exp(i(\mu_2 - 2\mu_1 + \sigma_3 T_1)), \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned}
i\omega_2 (a'_2 \exp(i\mu_2) + i\mu'_2 a_2 \exp(i\mu_2)) = & -i\frac{1}{2}\omega_2 \zeta_4 a_2 (T_1 - \epsilon\tau) \exp(i(\mu_2(T_1 - \epsilon t) - \omega_2\tau)) \\
& + \frac{i\omega_2^2 \omega_1 \zeta_2}{8\omega_1^2} \frac{a_1^3}{8} \exp(i(3\mu_1 - \sigma_3 T_1)) \\
& + [\frac{\omega_2^2 \alpha_2 + \omega_2^2 \alpha_5 \Delta_2^3}{8\omega_1^2} + \beta_2 \Delta_2^3] \frac{a_1^3}{8} \exp(i(3\mu_1 - \sigma_3 T_1)) \\
& - \Delta_1 [\alpha_3 + \frac{6}{4}\alpha_5 \Delta_2^2 a_1^2 + \frac{3}{4}\alpha_5 a_2^2] \frac{a_2}{2} \exp(i\mu_2) \\
& - i\frac{1}{2}\Delta_1 \omega_2 \zeta_3 a_2 (T_1 - \epsilon\tau) \exp(i(\mu_2(T_1 - \epsilon t) - \omega_2\tau)) \\
& - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \exp(i\mu_2) - \frac{6\beta_2 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \exp(i\mu_2) \quad (3.91)
\end{aligned}$$

e separando a parte real da parte imaginária, obtemos as duas equações abaixo

$$\begin{aligned}
-\omega_1 a'_1 \sin \mu_1 - \omega_1 \mu'_1 a_1 \cos \mu_1 = & \frac{\omega_1 \zeta_1}{2} a_1 \sin \mu_1 + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \cos \mu_1 \\
& + \frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon\tau) \sin(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \omega_1\tau) \\
& + \frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \sin \mu_1 - \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \cos \mu_1 \\
& - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \cos \mu_1 + \frac{F_1}{2} \cos \sigma_1 T_1 \\
& + \frac{F_2}{4} a_1 \cos(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \cos(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_2) \quad (3.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 a'_1 \cos \mu_1 - \omega_1 \mu'_1 a_1 \sin \mu_1 = & -\frac{\omega_1 \zeta_1}{2} \cos \mu_1 a_1 + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \sin \mu_1 \\
& - \frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon\tau) \cos(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \omega_1\tau) \\
& - \frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \cos \mu_1 - \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \sin \mu_1 \\
& - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \sin \mu_1 + \frac{F_1}{2} \sin \sigma_1 T_1 \\
& + \frac{F_2}{4} a_1 \sin(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \sin(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_2) \quad (3.93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_2 a_2' \sin \mu_2 - \omega_2 \mu_2' a_2 \cos \mu_2 &= \frac{\omega_2 \zeta_4}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \\
&\quad - \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad + \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad - \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \cos \mu_2 \\
&\quad + \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \\
&\quad - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \cos \mu_2 - \frac{3\beta_2 \Delta_2^2}{4} a_1^2 a_2 \cos \mu_2 \tag{3.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 a_2' \cos \mu_2 - \omega_2 \mu_2' a_2 \sin \mu_2 &= -\frac{\omega_2 \zeta_4}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \\
&\quad + \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad + \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \\
&\quad - \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \sin \mu_2 \\
&\quad - \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \\
&\quad - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \sin \mu_2 - \frac{3\beta_2 \Delta_2^2}{4} a_1^2 a_2 \sin \mu_2 \tag{3.95}
\end{aligned}$$

Somando, a eq. (3.92) multiplicada por $-\sin \mu_1$ com a eq. (3.93) multiplicada por $\cos \mu_1$ e a eq. (3.92) multiplicada por $\cos \mu_1$ com a eq. (3.93) multiplicada por $\sin \mu_1$, obtemos a equação diferencial em a_1 e μ_1 . Analogamente, a eq. (3.94) multiplicada por $-\sin \mu_2$ com a eq. (3.95) multiplicada por $\cos \mu_2$ e a eq. (3.94) multiplicada por $\cos \mu_2$ com a eq. (3.95) multiplicada por $\sin \mu_2$, obtemos a equação diferencial em a_2 e μ_2 ,

$$\begin{aligned}
\omega_1 a'_1 = & -\frac{\omega_1 \zeta_1}{2} a_1 \sin^2 \mu_1 - \frac{\omega_1 \zeta_1}{2} a_1 \cos^2 \mu_1 \\
& -\frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \cos \mu_1 \sin \mu_1 + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1 \\
& -\frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_1 (T_1 - \epsilon \tau) - \omega_1 \tau) \sin \mu_1 \\
& -\frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_1 (T_1 - \epsilon \tau) - \omega_1 \tau) \cos \mu_1 \\
& -\frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \sin^2 \mu_1 - \frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \cos^2 \mu_1 \\
& + \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \sin \mu_1 \cos \mu_1 - \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \sin \mu_1 \cos \mu_1 \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \cos \mu_1 \sin \mu_1 - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \cos \mu_1 \sin \mu_1 \\
& -\frac{F_1}{2} \cos(\sigma_1 T_1) \sin \mu_1 + \frac{F_1}{2} \sin(\sigma_1 T_1) \cos \mu_1 \\
& -\frac{F_2}{4} a_1 \cos(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \sin \mu_1 + \frac{F_2}{4} a_1 \sin(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \cos \mu_1 \\
& -\frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \cos(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_1) \sin \mu_1 \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \sin(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_1) \cos \mu_1
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_1 \mu'_1 a_1 = & \frac{\omega_1 \zeta_1}{2} a_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1 - \frac{\omega_1 \zeta_1}{2} a_1 \sin \mu_1 \cos \mu_1 \\
& + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \cos^2 \mu_1 + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2} a_1 \sin^2 \mu_1 \\
& + \frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_1 (T_1 - \epsilon \tau) - \omega_1 \tau) \cos \mu_1 \\
& - \frac{\omega_1 \zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_1 (T_1 - \epsilon \tau) - \omega_1 \tau) \sin \mu_1 \\
& + \frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \sin \mu_1 \cos \mu_1 - \frac{\omega_1 \zeta_2}{8} a_1^3 \sin \mu_1 \cos \mu_1 \\
& - \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \cos^2 \mu_1 - \frac{(3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3)}{8} a_1^3 \sin^2 \mu_1 \\
& - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \cos^2 \mu_1 - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4} a_1 a_2^2 \sin^2 \mu_1 \\
& + \frac{F_1}{2} \cos(\sigma_1 T_1) \cos \mu_1 + \frac{F_1}{2} \sin(\sigma_1 T_1) \sin \mu_1 \\
& + \frac{F_2}{4} a_1 \cos(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \cos \mu_1 + \frac{F_2}{4} a_1 \sin(\sigma_2 T_1 - \mu_1) \sin \mu_1 \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \cos(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_1) \cos \mu_1 \\
& + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8} a_1^2 a_2 \sin(\sigma_3 T_1 - 2\mu_1 + \mu_1) \sin \mu_1
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_2 a'_2 = & - \frac{\omega_2 \zeta_4}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \sin \mu_2 \\
 & - \frac{\omega_2 \zeta_4}{4} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \cos \mu_2 \\
 & + \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 + \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \cos \mu_2 \\
 & - \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 + \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \cos \mu_2 \\
 & - \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \cos(3\mu_1 \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \cos \mu_2 \\
 & + \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \cos \mu_2 \sin \mu_2 \\
 & - \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \sin \mu_2 \cos \mu_2 \\
 & - \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \sin \mu_2 \\
 & - \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \cos \mu_2 \\
 & + \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \cos \mu_2 \sin \mu_2 - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \sin \mu_2 \cos \mu_2 \\
 & + \frac{3\beta_2 \Delta_2}{4} a_1^2 a_2 \cos \mu_2 \sin \mu_2 - \frac{3\beta_2 \Delta_2^2}{4} a_1^2 a_2 \sin \mu_2 \cos \mu_2, \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega_2 \mu'_2 a_2 = & \frac{\omega_2 \zeta_4}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \cos \mu_2 \\
 & - \frac{\omega_2 \zeta_4}{4} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \sin \mu_2 \\
 & - \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \cos \mu_2 + \frac{\omega_2^2 \zeta_2}{64 \omega_1} \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 \\
 & + \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} a_1^3 \cos(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \cos \mu_2 \\
 & + \frac{\omega_2^2 (\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 \\
 & + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \cos(3\mu_1 \sigma_1 T_1) \cos \mu_2 + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8} a_1^3 \sin(3\mu_1 - \sigma_3 T_1) \sin \mu_2 \\
 & - \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \cos^2 \mu_2 - \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{4} a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8} a_2^2 \right) a_2 \sin^2 \mu_2 \\
 & + \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \cos \mu_2 \\
 & - \frac{\Delta_1 \omega_2 \zeta_3}{2} a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2 (T_1 - \epsilon t) - \omega_2 \tau) \sin \mu_2 \\
 & - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \cos^2 \mu_2 - \frac{3\beta_2}{8} a_2^3 \sin^2 \mu_2 \\
 & - \frac{3\beta_2 \Delta_2}{4} a_1^2 a_2 \cos^2 \mu_2 - \frac{3\beta_2 \Delta_2^2}{4} a_1^2 a_2 \sin^2 \mu_2. \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

Usando as relações trigonométricas nas equações (3.96) e (3.97), (3.98) e (3.99) e divi-

dindo o lado direito por ω_1 e ω_2 respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} a_1' &= -\frac{\zeta_1}{2}a_1 - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2}a_1(T_1 - \epsilon\tau) \cos(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1\tau) \\ &\quad - \frac{\zeta_2}{8}a_1^3 + \frac{F_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 + \frac{F_2}{4\omega_1}a_1 \sin \gamma_2 - \frac{3\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1}a_1^2a_2 \sin \gamma_3, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \mu_1' a_1 &= -\frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1}a_1 - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2}a_1(T_1 - \epsilon\tau) \sin(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1\tau) \\ &\quad + \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right) a_1^3 + \frac{3\alpha_5\Delta_2}{4\omega_1}a_1a_2^2 - \frac{F_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \\ &\quad - \frac{F_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 - \frac{3\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1}a_1^2a_2 \cos \gamma_3, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} a_2' &= -\frac{\zeta_4}{2}a_2(T_1 - \epsilon\tau) \cos(\mu_2(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2\tau) + \frac{\omega_2\zeta_2}{64\omega_1}a_1^3 \cos \gamma_3 \\ &\quad - \frac{\omega_2(\alpha_2 + \alpha_5\Delta_2^3)}{64\omega_1^2}a_1^3 \sin \gamma_3 - \frac{\beta_2\Delta_2^3}{8\omega_2}a_1^3 \sin \gamma_3 \\ &\quad - \frac{\Delta_1\omega_2\zeta_3}{2}a_2(T_1 - \epsilon\tau) \cos(\mu_2(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2\tau), \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \mu_2' a_2 &= \frac{\zeta_4}{2}a_2(T_1 - \epsilon\tau) \sin(\omega_2\tau) - \frac{\omega_2\zeta_2}{64\omega_1}a_1^3 \sin \gamma_3 - \frac{\omega_2(\alpha_2 + \alpha_5\Delta_2^3)}{64\omega_1^2}a_1^3 \cos \gamma_3 \\ &\quad - \frac{\beta_2\Delta_2^3}{8\omega_2}a_1^3 \cos \gamma_3 + \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{2\omega_2} + \frac{3\alpha_5\Delta_2^2}{4\omega_2}a_1^2 + \frac{3\alpha_5}{8\omega_2}a_2^2 \right) a_2 \\ &\quad + \frac{\Delta_1\zeta_3}{2}a_2(T_1 - \epsilon\tau) \sin(\omega_2\tau) + \frac{3\beta_2}{8\omega_2}a_2^3 + \frac{3\beta_2\Delta_2^2}{4\omega_2}a_1^2a_2, \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \mu_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 T_1 - 2\mu_1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 = \sigma_3 T_1 - 3\mu_1 + \mu_2. \quad (3.104)$$

Reorganizando os termos teremos

$$\begin{aligned} a_1' &= \frac{F_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 + \left[\frac{F_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 - \frac{\zeta_1}{2} \right] a_1 \\ &\quad - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2}a_1(T_1 - \epsilon\tau) \cos(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1\tau) \\ &\quad + \left[\frac{3\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1} \sin \gamma_3 \right] a_1^2a_2 - \frac{\zeta_2}{8}a_1^3, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \mu_1' a_1 &= -\frac{F_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 - \left[\frac{F_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} \right] a_1 \\ &\quad - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2}a_1(T_1 - \epsilon\tau) \sin(\mu_1(T_1 - \epsilon\tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1\tau) \\ &\quad + \left[\frac{3\alpha_5\Delta_2}{4\omega_1} \right] a_1a_2^2 - \left[\frac{3\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1} \cos \gamma_3 \right] a_1^2a_2 + 3 \left[\frac{\alpha_2 + \alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right] a_1^3, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$a_2' = - \left[\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right] a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2 \tau) \quad (3.107)$$

$$- \left[\Delta_5 \sin \gamma_3 - \frac{\omega_2 \zeta_2}{64 \omega_1} \cos \gamma_3 \right] a_1^3,$$

$$\mu_2' a_2 = \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2 \omega_2} a_2 - \left[\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right] a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2 \tau) \quad (3.108)$$

$$+ \left[\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2) \Delta_2^2}{4 \omega_2} \right] a_1^2 a_2 + \left[\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2)}{8 \omega_2} \right] a_2^3 - \left[\Delta_5 \cos \gamma_3 + \frac{\omega_2 \zeta_2}{64 \omega_1} \sin \gamma_3 \right] a_1^3,$$

onde

$$\Delta_5 = \left[\frac{\omega_2(\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3)}{64 \omega_1^2} + \frac{\beta_2 \Delta_2^3}{8 \omega_2} \right].$$

Para a solução de estado estacionário $\dot{a}_n = \dot{\gamma}_n = 0$. Então, a partir da eq. (3.104) temos

$$\dot{\mu}_1 = \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} = \sigma, \quad \dot{\mu}_2 = 3\sigma - \sigma_3. \quad (3.109)$$

Em seguida, segue-se a partir das equações (3.105) à (3.109) que as soluções de estado estacionário são dadas por

$$\frac{F_1}{2 \omega_1} \sin \gamma_1 + \left[\frac{F_2}{4 \omega_1} \sin \gamma_2 - \frac{\zeta_1}{2} \right] a_1 - \frac{\zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_1(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1 \tau) \quad (3.110)$$

$$+ \left[\frac{3 \alpha_5 \Delta_2^2}{8 \omega_1} \sin \gamma_3 \right] a_1^2 a_2 - \frac{\zeta_2}{8} a_1^3 = 0,$$

$$\sigma a_1 + \frac{F_1}{2 \omega_1} \cos \gamma_1 + \left[\frac{F_2}{4 \omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2 \omega_1} \right] a_1 + \frac{\zeta_3 \Delta_2}{2} a_1 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_1(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_1(T_1) - \omega_1 \tau) \quad (3.111)$$

$$- \left[\frac{3 \alpha_5 \Delta_2}{4 \omega_1} \right] a_1 a_2^2 + \left[\frac{3 \alpha_5 \Delta_2^2}{8 \omega_1} \cos \gamma_3 \right] a_1^2 a_2 - 3 \left[\frac{\alpha_2 + \alpha_5 \Delta_2^3}{8 \omega_1} \right] a_1^3 = 0,$$

$$- \left[\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right] a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \cos(\mu_2(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2 \tau) \quad (3.112)$$

$$- \left[\Delta_5 \sin \gamma_3 - \frac{\omega_2 \zeta_2}{64 \omega_1} \cos \gamma_3 \right] a_1^3 = 0,$$

$$(3\sigma - \sigma_3) a_2 - \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2 \omega_2} a_2 + \left[\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right] a_2 (T_1 - \epsilon \tau) \sin(\mu_2(T_1 - \epsilon \tau) - \mu_2(T_1) - \omega_2 \tau) \quad (3.113)$$

$$- \left[\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2) \Delta_2^2}{4 \omega_2} \right] a_1^2 a_2 - \left[\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2)}{8 \omega_2} \right] a_2^3 + \left[\Delta_5 \cos \gamma_3 + \frac{\omega_2 \zeta_2}{64 \omega_1} \sin \gamma_3 \right] a_1^3 = 0,$$

resolvendo as equações algébricas, temos duas possibilidades de pontos fixos para cada caso.

O controle é desativado ($a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$), eliminando os parâmetros correspondentes

ao controle.

$$\frac{F_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 + \left[\frac{F_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 - \frac{\zeta_1}{2} \right] a_1 - \frac{\zeta_2}{8} a_1^3 = 0, \quad (3.114)$$

$$\sigma a_1 + \frac{F_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 + \frac{F_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 a_1 - 3 \frac{\alpha_2}{8\omega_1} a_1^3 = 0, \quad (3.115)$$

somando os quadrados das partes trigonométricas das eq. (3.114) e (3.115)

$$\frac{F_1^2}{4\omega_1^2} \sin^2 \gamma_1 + a_1^2 \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} \sin^2 \gamma_2 + \frac{2F_1 F_2}{8\omega_1^2} a_1 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \frac{\zeta_1^2}{4} a_1 + \frac{\zeta_1 \zeta_2}{8} a_1^4 + \frac{\zeta_2^2}{64} a_1^6, \quad (3.116)$$

$$\frac{F_1^2}{4\omega_1^2} \cos^2 \gamma_1 + a_1^2 \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} \cos^2 \gamma_2 + \frac{2F_1 F_2}{8\omega_1^2} a_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = \frac{9\alpha_2^2}{64\omega_1^2} a_1^6 - \frac{6\sigma\alpha_2}{8\omega_1} a_1^4 + \sigma^2 a_1^2. \quad (3.117)$$

A resposta de frequência da equação pode ser obtida na forma

$$\begin{aligned} \frac{9\alpha_2^2}{64\omega_1^2} a_1^6 + \frac{\zeta_2^2}{64} a_1^6 - \frac{3\sigma\alpha_2}{4\omega_1} a_1^4 + \frac{\zeta_1 \zeta_2}{8} a_1^4 + \left(\sigma^2 + \frac{\zeta_1^2}{4} \right) a_1^2 - \frac{F_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} a_1^2 \\ - \frac{F_1 F_2}{4\omega_1^2} a_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.118)$$

O controle é ativado ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$). Somando os quadrados das partes trigonométricas da eq. (3.110) com a eq. (3.111) e a partes trigonométricas da eq. (3.112) com a eq. (3.113) as duas equações resultantes são obtidas

$$\begin{aligned} \frac{F_1^2}{4\omega_1^2} + \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} a_1^2 + \left(\frac{3\alpha_5 \Delta_2^2}{8\omega_1} \right)^2 a_1^4 a_2^2 + \frac{F_1 F_2}{4\omega_1^2} a_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{3F_1 \alpha_5 \Delta_2^2}{8\omega_1^2} a_1^2 a_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_3) \\ + \frac{3F_2 \alpha_5 \Delta_2^2}{16\omega_1^2} a_1^3 a_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_3) = \left[\left(\frac{\zeta_1}{2} + \frac{\zeta_3 \Delta_2}{2} \cos(\Omega_1 \tau) \right) a_1 + \frac{\zeta_2}{8} a_1^3 \right]^2 \\ + \left[\left(\sigma + \frac{\alpha_3 \Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3 \Delta_2}{2} \sin(\Omega_1 \tau) \right) a_1 - \frac{3\alpha_5 \Delta_2}{4\omega_1} a_1 a_2^2 - \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5 \Delta_2^3}{8\omega_1} \right) a_1^3 \right]^2 \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\omega_2 \zeta_2}{64\omega_1} \right)^2 + \Delta_5^2 \right] a_1^6 = \left(\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right)^2 \cos^2(3\Omega_1 \tau) a_2^2 \\ + \left[- \left(\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2)}{8\omega_2} \right) a_2^3 + \left((3\sigma - \sigma_3) - \left(\frac{\alpha_3 \Delta_1}{2\omega_2} \right) \right) a_2 \right. \\ \left. - \left(\frac{3(\alpha_5 \Delta_1 + \beta_2) \Delta_2^2}{4\omega_2} \right) a_1^2 a_2 - \left(\frac{\zeta_3 \Delta_1}{2} + \frac{\zeta_4}{2} \right) a_2 \sin 3\Omega_1 \tau \right]^2 \end{aligned} \quad (3.120)$$

Desenvolvendo os quadrados e organizando os termos obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\zeta_2^2}{64} + \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right)^2 \right] a_1^6 \\
 & + \left[\left(\zeta_1 + \zeta_3\Delta_2 \cos(\Omega_1\tau) \right) \frac{\zeta_2}{8} - \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right) \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{4\omega_1} \right) \right] a_1^4 \\
 & + \left[\left(\frac{\zeta_1}{2} + \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \cos(\Omega_1\tau) \right)^2 + \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right)^2 \right] a_1^2 \\
 & + \left[\left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right) \frac{3\alpha_5\Delta_2}{2\omega_1} - \left(\frac{9\alpha_5^2\Delta_2^4}{64\omega_1^2} \right) \right] a_1^4 a_2^2 \\
 & - \left[\left(\frac{3\alpha_5\Delta_2}{4\omega_1} \right) \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right) \right] a_1^2 a_2^2 \\
 & - \left(\frac{3F_1\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1^2} \right) a_1^2 a_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_3) \\
 & - \left(\frac{3F_2\alpha_5\Delta_2^2}{16\omega_1^2} \right) a_1^3 a_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_3) \\
 & - \frac{F_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} a_1^2 - \frac{F_1 F_2}{4\omega_1^2} a_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 0
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)}{8\omega_2} \right)^2 a_2^6 \\
 & - \left[\left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)}{8\omega_2} \right) \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right) \right] a_2^4 \\
 & + \left[\left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right)^2 \cos^2(3\Omega_1\tau) + \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right)^2 \right] a_2^2 \\
 & + \left[\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2}{4\omega_2} \right]^2 a_2^4 a_1^2 \\
 & + \left[\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2^2}{2\omega_2} \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right) \right] a_2^2 a_1^2 \\
 & - \left[\left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2}{4\omega_2} \right)^2 \Delta_2^2 \right] a_1^4 a_2^2 \\
 & - \left[\left(\frac{\omega_2\zeta_2}{64\omega_1} \right)^2 + \Delta_5^2 \right] a_1^6 = 0
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

ou de outra forma,

$$\begin{aligned}
 & \Delta_6 a_1^6 + \Delta_7 a_1^4 + \Delta_8 a_1^2 + \Delta_9 a_1^4 a_2^2 + \Delta_{10} a_1^2 a_2^4 + \Delta_{11} a_1^2 a_2^2 + \Delta_{12} a_1^2 a_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_3) \\
 & + \Delta_{13} a_1^3 a_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_3) - \frac{F_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{F_2^2}{16\omega_1^2} a_1^2 - \frac{F_1 F_2}{4\omega_1^2} a_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 0
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\Delta_{14} a_2^6 + \Delta_{15} a_2^4 + \Delta_{16} a_2^2 + \Delta_{17} a_2^4 a_1^2 + \Delta_{18} a_2^2 a_1^2 + \Delta_{19} a_1^4 a_2^2 \Delta_{20} a_1^6 = 0 \tag{3.124}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_6 &= \frac{\zeta_2^2}{64} + \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right)^2, \\
\Delta_7 &= \left[\left(\zeta_1 + \zeta_3\Delta_2 \cos(\Omega_1\tau) \right) \frac{\zeta_2}{8} - \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right) \left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{4\omega_1} \right) \right], \\
\Delta_8 &= \left[\left(\frac{\zeta_1}{2} + \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \cos(\Omega_1\tau) \right)^2 + \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right)^2 \right], \\
\Delta_9 &= \left[\left(\frac{3\alpha_2 + 3\alpha_5\Delta_2^3}{8\omega_1} \right) \frac{3\alpha_5\Delta_2}{2\omega_1} - \left(\frac{9\alpha_5^2\Delta_2^4}{64\omega_1^2} \right) \right] \\
\Delta_{10} &= \left(\frac{3\alpha_5\Delta_2}{4\omega_1} \right)^2, \quad \Delta_{11} = - \left[\left(\frac{3\alpha_5\Delta_2}{4\omega_1} \right) \left(\sigma + \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_1} - \frac{\zeta_3\Delta_2}{2} \sin(\Omega_1\tau) \right) \right], \\
\Delta_{12} &= - \left(\frac{3F_1\alpha_5\Delta_2^2}{8\omega_1^2} \right), \quad \Delta_{13} = - \left(\frac{3F_2\alpha_5\Delta_2^2}{16\omega_1^2} \right), \quad \Delta_{14} = \left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)}{8\omega_2} \right)^2 \\
\Delta_{15} &= - \left[\left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)}{8\omega_2} \right) \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right) \right], \\
\Delta_{16} &= \left[\left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right)^2 \cos^2(3\Omega_1\tau) + \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right)^2 \right], \\
\Delta_{17} &= \left[\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2}{4\omega_2} \right]^2, \\
\Delta_{18} &= \left[\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2^2}{2\omega_2} \left(3\sigma - \sigma_3 - \frac{\alpha_3\Delta_1}{2\omega_2} - \left(\frac{\zeta_3\Delta_1 + \zeta_4}{2} \right) \sin(3\Omega_1\tau) \right) \right], \\
\Delta_{19} &= \left[\left(\frac{3(\alpha_5\Delta_1 + \beta_2)\Delta_2}{4\omega_2} \right)^2 \Delta_2^2 \right], \quad \Delta_{20} = - \left[\left(\frac{\omega_2\zeta_2}{64\omega_1} \right)^2 + \Delta_5^2 \right].
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos dos estudos de caso, cujos experimentos foram realizados no software MATLAB. Foram consultados para a confecção do texto desta parte do trabalho [Bellen e Zennaro \(2003\)](#), [Burden e Faires \(2011\)](#), [Chapra \(2012\)](#), [Chau \(2002\)](#), [Felício \(2010\)](#), [Gilat \(2006\)](#), [Hatch \(2001\)](#), [Hu e Wang \(2002\)](#), [Palis \(1989\)](#), [Polo \(2013\)](#), [Shampine e Thompson \(2015\)](#).

4.1 Equações Governantes Sem Atraso

Para estudar o comportamento do sistema, cujas equações governantes não possuem atraso, usamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem, cujo algoritmo fora implementado no software MATLAB. Runge-Kutta é um método que utiliza apenas a informação a partir do último passo calculado. Para as equações sem atraso consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{y} = f(t, y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f$$

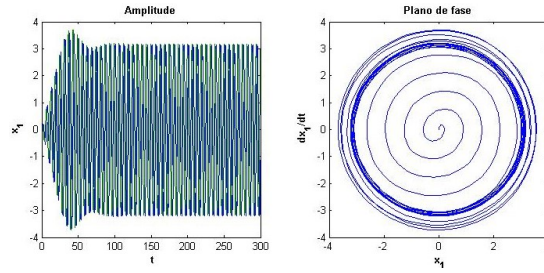
com

$$y(t_0) = y_0.$$

Em primeiro lugar, desativamos o absorvedor e aplicamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem para as equações (3.10) e (3.11), analisando três casos de possível ressonância, cujo resultados são apresentados nas figuras 21-23.

A Figura 21 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal em ressonância primária, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de ω_1 , com $F_1 = 0.6, F_2 = 0.3, \alpha_1 = 0.03, \alpha_2 = 0.04, \zeta_1 = 0.05, \zeta_2 = 0.04$. Nesta figura verificamos que a amplitude de estado estacionário é cerca de cinco vezes a amplitude da força de excitação F_1 , o sistema principal fica estável.

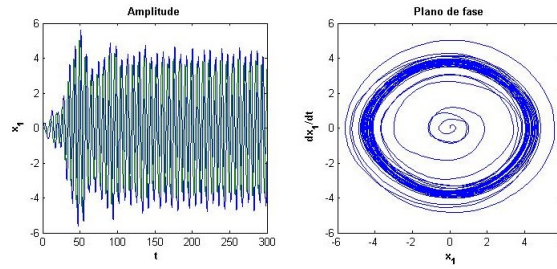
Figura 21 – Comportamento do sistema em ressonância primária.



Fonte: o autor.

A Figura 22 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal em ressonância paramétrica principal onde $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e Ω_2 longe de ω_1 , com $F_1 = 0.6, F_2 = 0.9, \alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.03, \zeta_1 = 0.04, \zeta_2 = 0.01$. Nesta figura verificamos que a amplitude de estado estacionário é de cerca de sete vezes a força de excitação F_1 , o sistema principal apresenta uma tendência crescente para movimento caótico.

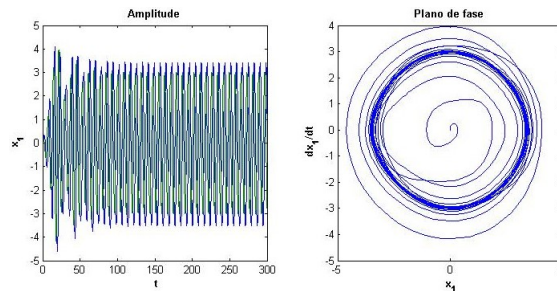
Figura 22 – Comportamento do sistema em ressonância paramétrica principal.



Fonte: o autor.

A Figura 23 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal em ressonância simultânea, primária e paramétrica principal, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\Omega_2 \cong 2\omega_1$, com $F_1 = 0.7, F_2 = 0.9, \alpha_1 = 0.06, \alpha_2 = 0.07, \zeta_1 = 0.05, \zeta_2 = 0.02$. Nesta figura verificamos que a amplitude de estado estacionário é cerca de cinco vezes a força de excitação F_1 , o sistema principal apresenta uma tendência crescente para movimento caótico.

Figura 23 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e paramétrica principal.

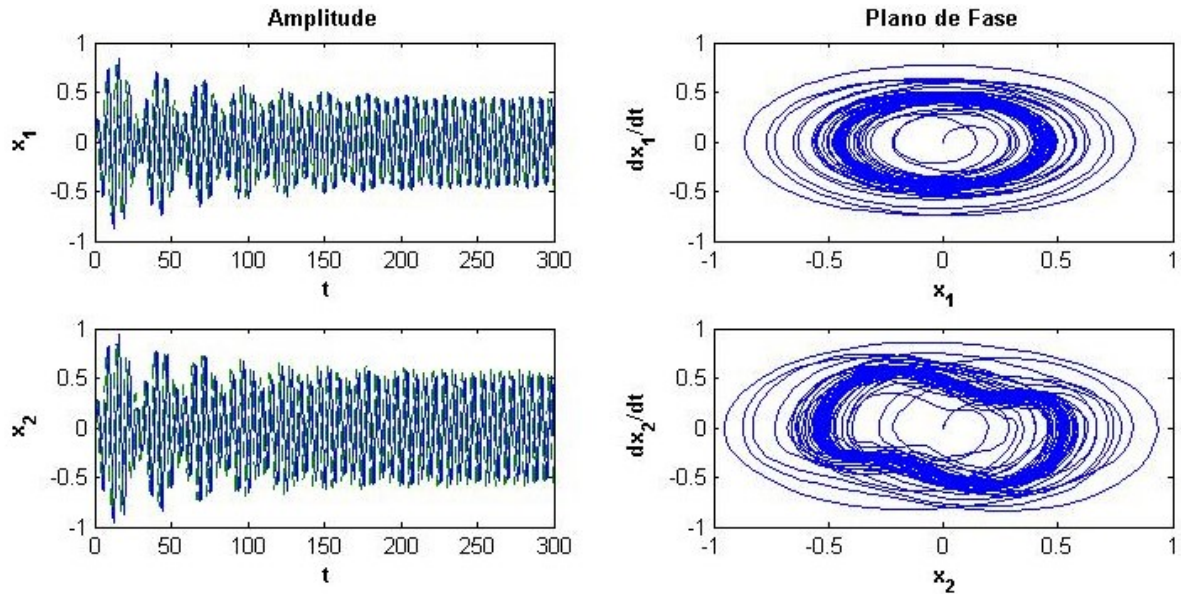


Fonte: o autor.

Agora, ativamos o absorvedor e aplicamos o método de Runge-Kutta quarta ordem para as equações (3.10)-(3.13), analisando três casos possíveis de ressonância e verificando a eficácia do absorvedor E_a (a razão entre amplitude de estado estacionário do sistema sem absorvedor e a amplitude de estado estacionário do sistema com absorvedor), cujo resultados são apresentados nas figuras 24-26.

A Figura 24 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema com absorvedor em ressonância simultânea, primária e interna, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$, com $F_1 = 0.4, F_2 = 0.9, \alpha_1 = 0.08, \alpha_2 = 0.04, \alpha_3 = 0.05, \alpha_4 = 0.02, \alpha_5 = 0.03, \beta_1 = 0.04, \beta_2 = 0.03, \zeta_1 = 0.05, \zeta_2 = 0.03, \zeta_3 = 0.04, \zeta_4 = 0.02$. Verificamos que a eficácia do absorvedor E_a é cerca de seis, com soluções estáveis, ocorrendo uma redução à 17% da amplitude máxima mostrada na Figura 21. Além disso, as oscilações do sistema e absorvedor têm multi-ciclos limite e caótico, respectivamente.

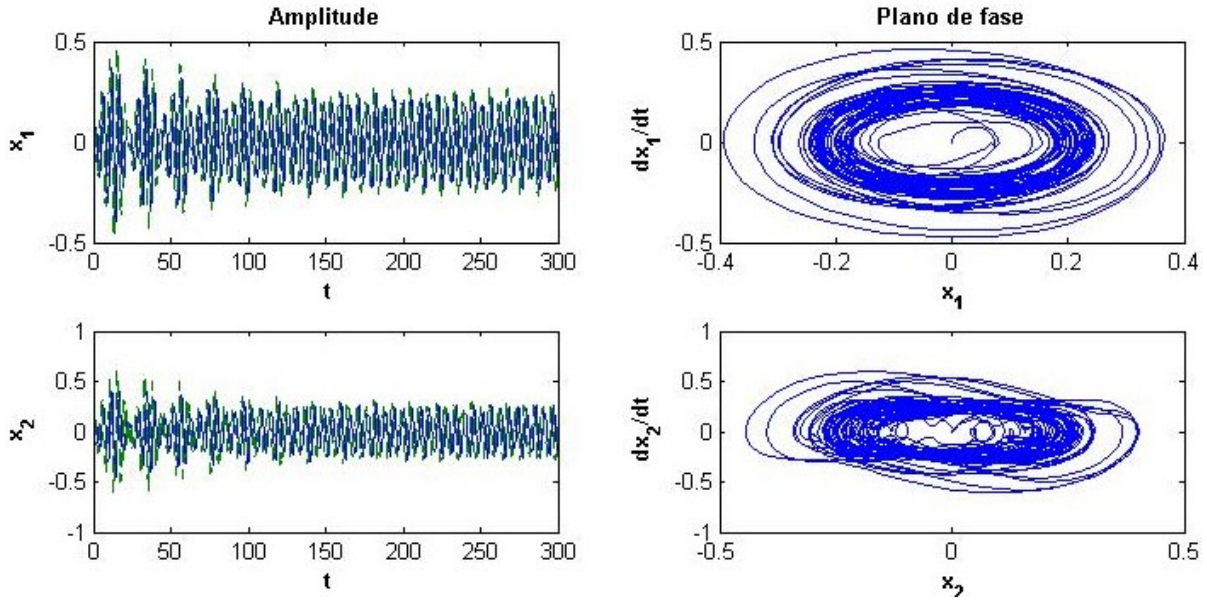
Figura 24 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e interna.



Fonte: o autor.

A Figura 25 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal com absorvedor em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna, onde $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$, com $F_1 = 0.07, F_2 = 0.2, \alpha_1 = 0.03, \alpha_2 = 0.02, \alpha_3 = 0.05, \alpha_4 = 0.07, \alpha_5 = 0.06, \beta_1 = 0.07, \beta_2 = 0.05, \zeta_1 = 0.06, \zeta_2 = 0.08, \zeta_3 = 0.05, \zeta_4 = 0.06$. Verificamos que a eficácia do absorvedor (E_a) é cerca de treze, ocorrendo uma redução à 8% da amplitude máxima mostrada na Figura 22. Além disso, as oscilações do sistema e absorver têm multi-ciclos limite e caos dinâmico crescente, respectivamente.

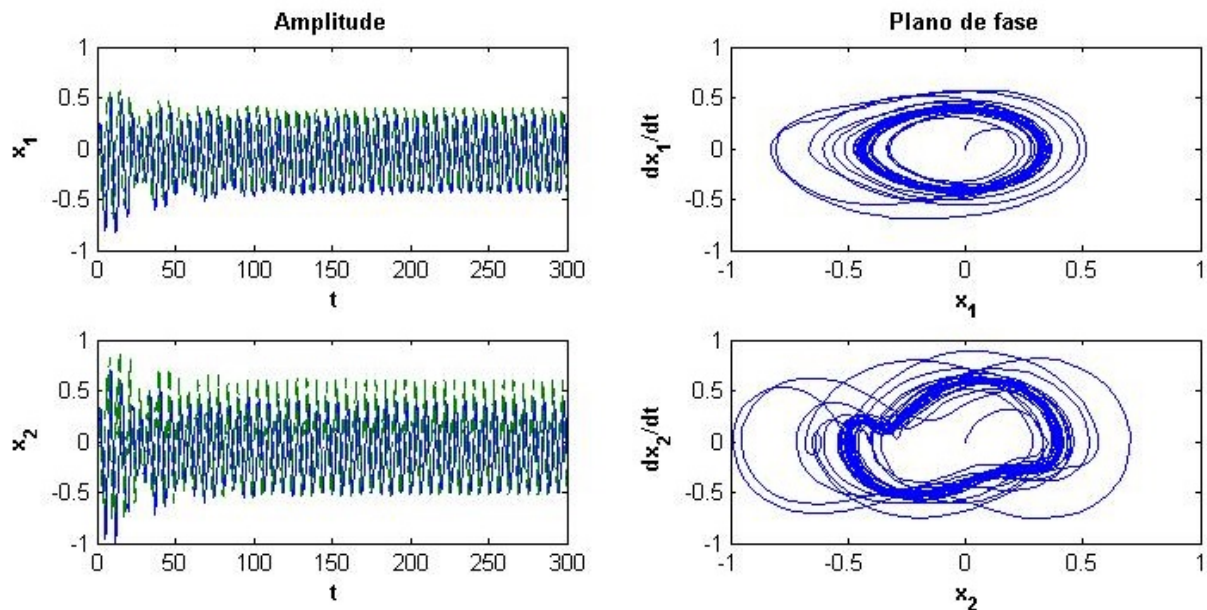
Figura 25 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna.



Fonte: o autor.

A Figura 26 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal com absorvedor em ressonância simultânea com $\Omega_1 \cong \omega_1$, $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$, com $F_1 = 0.2, F_2 = 0.3, \alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.3, \alpha_3 = 0.2, \alpha_4 = 0.3, \alpha_5 = 0.05, \beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \zeta_1 = 0.03, \zeta_2 = 0.1, \zeta_3 = 0.2, \zeta_4 = 0.1$. A eficácia do absorvedor (E_a) é cerca de nove, ocorrendo uma redução à 11% da amplitude máxima mostrada na Figura 23. Também, as oscilações do sistema e absorver têm multi-ciclos limite e caos dinâmico crescente, respectivamente.

Figura 26 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea.



Fonte: o autor.

4.2 Equações Governantes com Atraso

Para estudar o comportamento do sistema com atraso, usamos uma função nativa do software MATLAB conhecida como *dde23*. O algoritmo desta função é um método adaptativo do método de Runge-Kutta, que emprega simultaneamente fórmulas de segunda e terceira ordem para resolver equações diferenciais ordinárias com atraso.

Em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com atraso, a equação diferencial de primeira ordem do sistema assume a forma,

$$\dot{y} = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k)), \quad t_0 \leq t \leq t_f$$

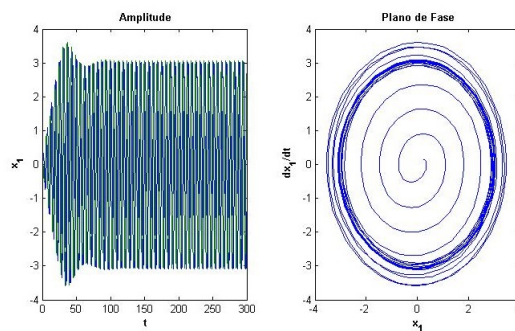
com função inicial

$$y(t) = g(t), \quad t \leq t_0.$$

Em primeiro lugar, desativamos o absorvedor e aplicamos a função *dde23* para as equações (3.22) e (3.23), analisando três casos possíveis de ressonância, com os mesmos parâmetros usados nas análises anteriores sem atraso, com $\tau_1 = 0.1$ e funções iniciais (história): $a_1 \cos(\omega_1 t + \mu_1)$, $-a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1)$, onde $a_1 = 0.28$ e $\mu_1 = -0.5t - 0.5$.

A figura 27 mostra a amplitude de estado estacionário e plano de fase do sistema principal em ressonância primária, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de ω_1 . Nesta figura, verificamos que a amplitude de estado estacionário é cerca de cinco vezes a força de excitação F_1 , o sistema principal fica estável, bem como a análise sem atraso mostrado na Figura 21.

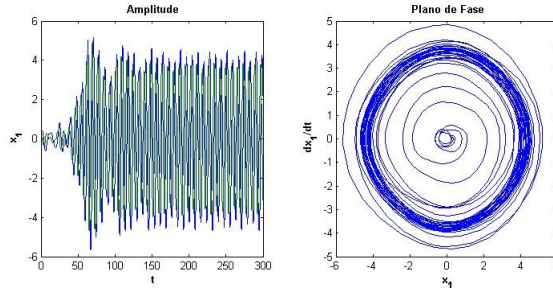
Figura 27 – Comportamento do sistema em ressonância primária.



Fonte: o autor.

A Figura 28 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal em ressonância paramétrica principal, onde $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e Ω_1 longe de ω_1 . Nesta figura, verificamos que a amplitude de estado estacionário é de cerca de sete vezes a força de excitação F_1 , e após atingir aproximadamente cinco e meio, o sistema principal apresenta uma tendência crescente para movimento caótico, bem como a análise sem atraso mostrado Figura 22.

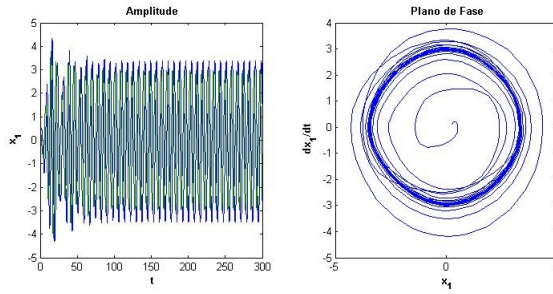
Figura 28 – Comportamento do sistema em ressonância paramétrica principal.



Fonte: o autor.

A Figura 29 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal em ressonância simultânea, primária e paramétrica principal, $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\Omega_2 \cong 2\omega_1$. Nesta figura verificamos que o estado de amplitude de estado estacionário é de cerca de cinco vezes a força de excitação F_1 , o sistema principal apresenta uma tendência crescente para movimento caótico. Houve um pequeno aumento em comparação ao valor da amplitude máxima analisado na Figura 23.

Figura 29 – Comportamento do sistema ressonância simultânea, primária e paramétrica principal.

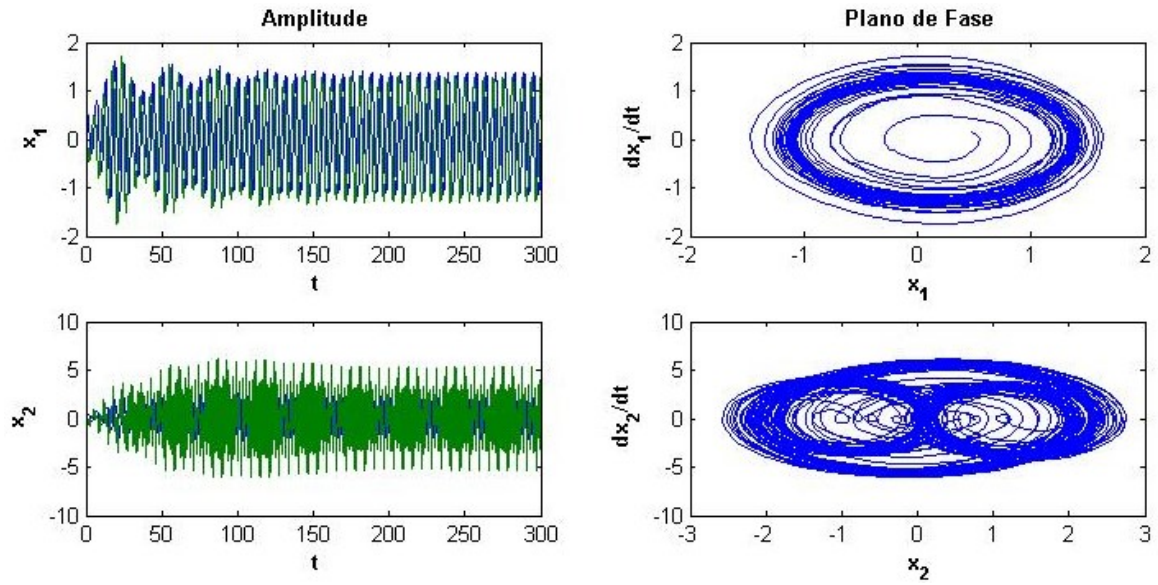


Fonte: o autor.

Agora, ativamos o absorvedor e aplicamos a função *dde23* para as equações (3.22) a (3.25), analisando os mesmos três casos possíveis de ressonância e verificando a eficácia do absorvedor E_a , para os mesmos parâmetros usados nas análises anteriores sem atraso, com $\tau_1 = 0.1$ e $\tau_2 = 0.2$ e funções iniciais (história): $a_1 \cos(\omega_1 t + \mu_1)$, $-a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1)$, $a_2 \cos(\omega_2 t + \mu_2) + \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} a_1 \cos(\omega_1 t + \mu_1)$, $-a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \mu_2) - \omega_1 \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) a_1 \sin(\omega_1 t + \mu_1)$, onde $a_1 = 0.5$, $\mu_1 = -0.3t + 6$, $a_2 = 0.00004$, $\mu_2 = -t - 1320$.

A Figura 30 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal com absorvedor em ressonância simultânea, primária e interna, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$. A eficácia do absorvedor (E_a) é cerca de 3, ocorrendo uma redução à 30% da amplitude máxima mostrada na Figura 27. Além disso, as oscilações do sistema e absorvedor têm multi-ciclos limite e caótico, respectivamente. Houve uma redução na eficácia do absorvedor em comparação com a eficácia analisada no sistema sem atraso na Figura 24.

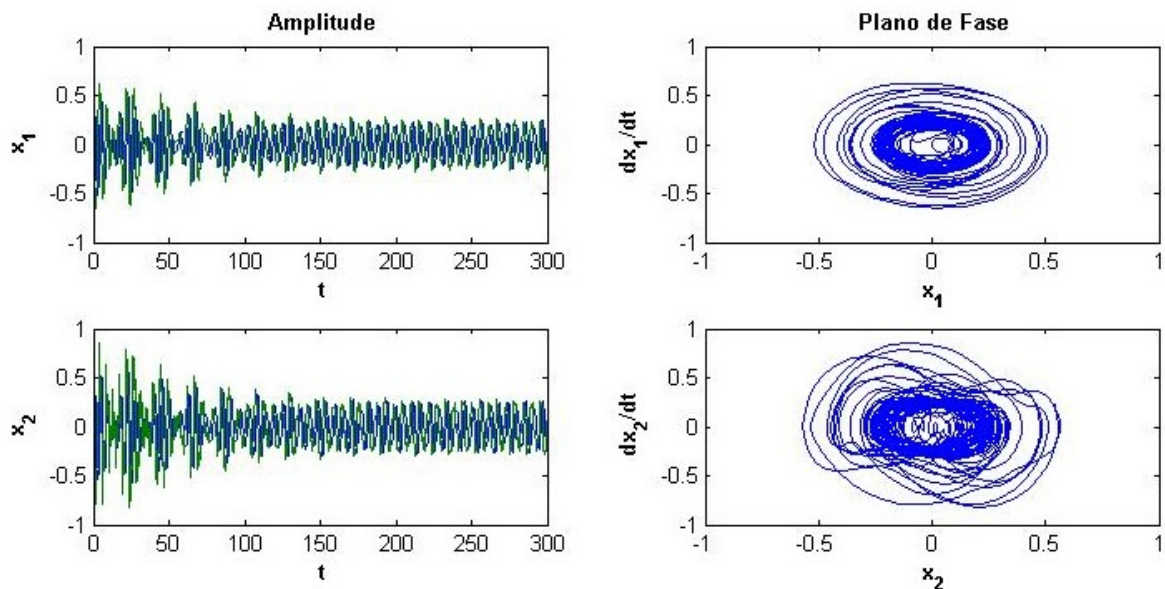
Figura 30 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, primária e interna.



Fonte: o autor.

A Figura 31 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal com absorvedor em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna, onde $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$. A eficácia do absorvedor (E_a) é cerca de vinte, ocorrendo uma redução à 5% da amplitude máxima mostrada na Figura 28. Além disso, as oscilações do sistema e absorvedor têm multi-ciclos limite e caos dinâmico crescente, respectivamente. Houve um aumento na eficácia do absorvedor em comparação com a eficácia analisada no sistema sem atraso na Figura 25.

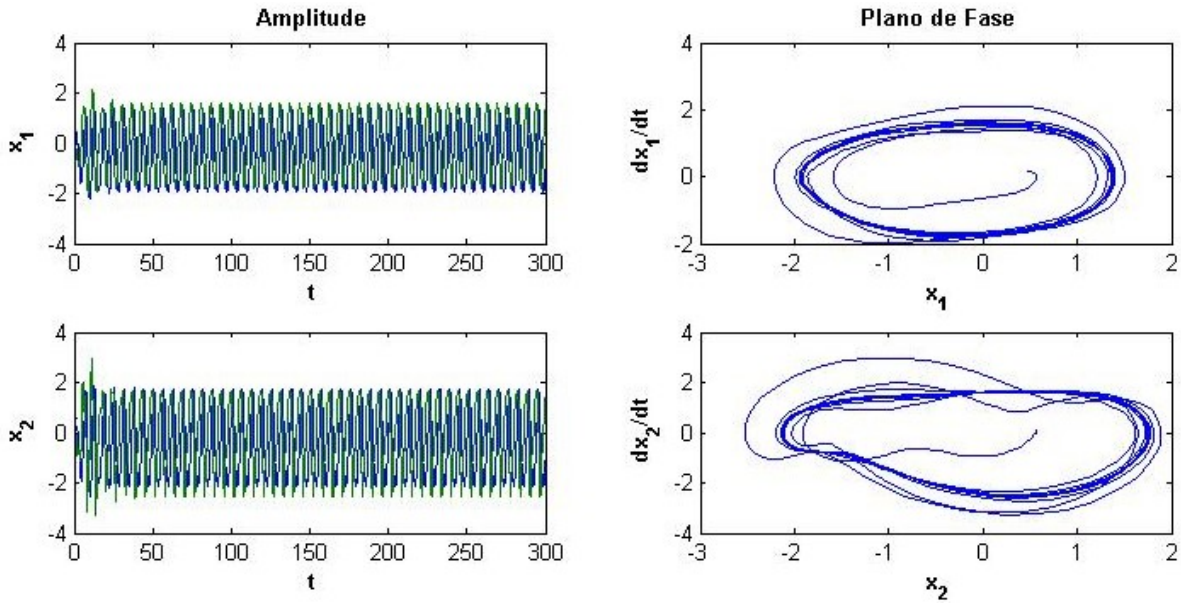
Figura 31 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea, paramétrica principal e interna.



Fonte: o autor.

A Figura 32 mostra a amplitude de estado estacionário e o plano de fase do sistema principal com absorvedor em ressonância simultânea, onde $\Omega_1 \cong \omega_1$, $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$. A eficácia do absorver (E_a) é cerca de 3, ocorrendo uma redução à 30% da amplitude máxima mostrada na Figura 29. Também, as oscilações do sistema e absorvedor têm multi-ciclos limite e caótico, respectivamente. Houve uma redução na eficácia do absorvedor em comparação com a eficácia analisada no sistema sem atraso na Figura 26.

Figura 32 – Comportamento do sistema em ressonância simultânea.

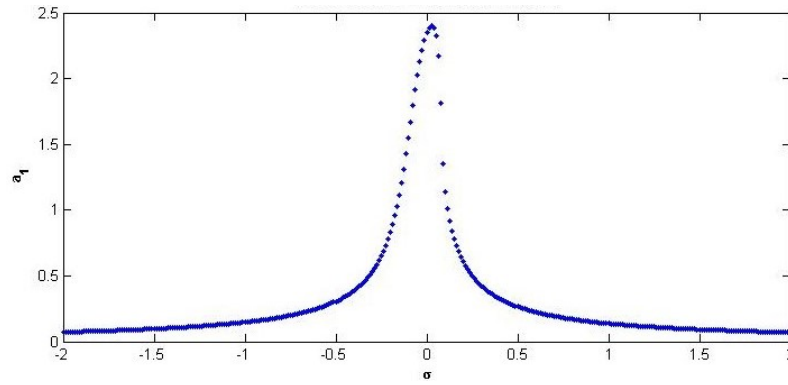


Fonte: o autor.

A seguir a análise analítica é representada graficamente usando métodos numéricos. As curvas de resposta de frequência, eq. (3.118) e as curvas (3.123)-(3.124) são equações algébricas não lineares acopladas. Assim resolvemos os sistemas de equações (3.114)-(3.115) e (3.110)-(3.113) usando o método de Newton Raphson, determinando a amplitude de estado estacionário do sistema em função do parâmetro de detonação σ , quando o controle está desativado ($a_1 \neq 0, a_2 = 0$) e quando o controle está ativado ($a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$), respectivamente.

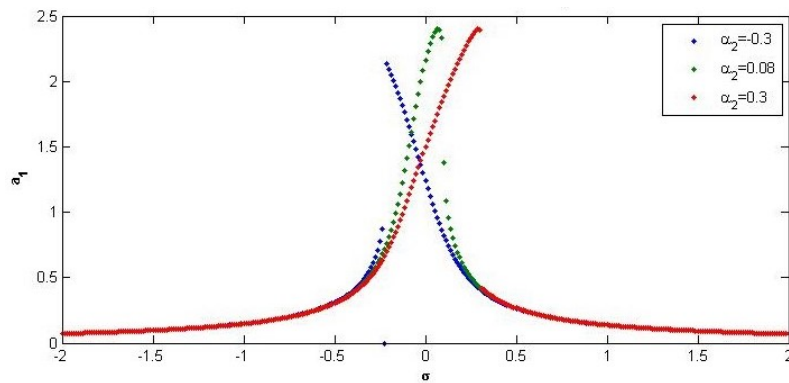
A seguir apresentaremos as curvas de resposta de frequência, sistema de equações (3.114) e (3.115), no caso em que o controle está desativado ($a_1 \neq 0, a_2 = 0$).

A Figura 33 representa os efeitos do parâmetro de detonação σ na amplitude de estado estacionário do sistema. Nesta Figura, a amplitude de resposta está em função do parâmetro σ , cujo gráfico é parte de uma curva contínua, que aparentemente tende a dobrar para a direita, apresentando assim um efeito de endurecimento.

Figura 33 – Efeitos do parâmetro de detonação σ .

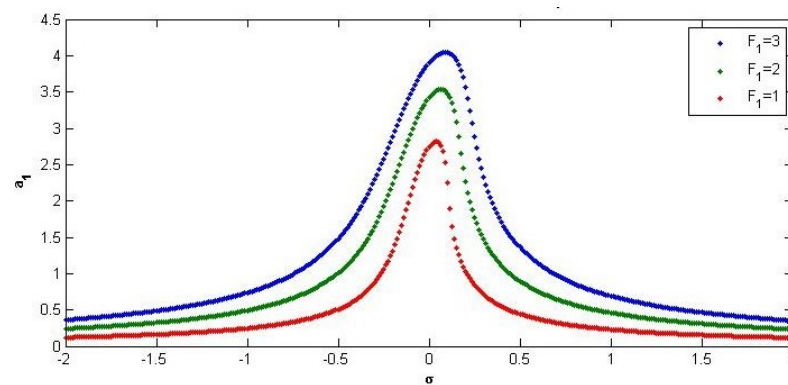
Fonte: o autor.

A Figura 34 representa os efeitos de rigidez da mola não linear α_2 , verificamos que a amplitude em estado estacionário é alterada.

Figura 34 – Efeitos de rigidez da mola não linear α_2 .

Fonte: o autor.

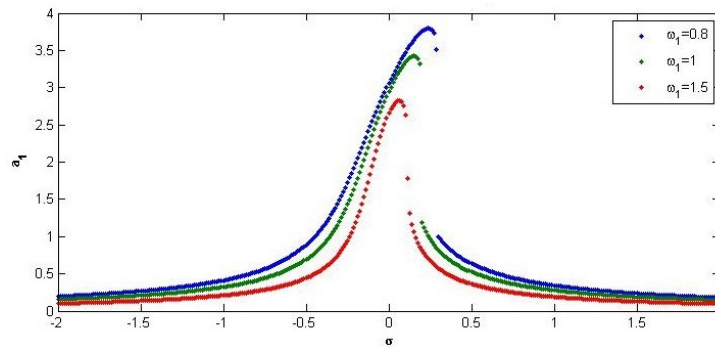
A Figura 35 representa os efeitos da amplitude de excitação F_1 , verificamos que a amplitude estacionária aumenta com o valor da força de excitação externa F_1 .

Figura 35 – Efeitos da amplitude de excitação F_1 .

Fonte: o autor.

A Figura 36 representa os efeitos da frequência natural ω_1 , verificamos que com o aumento da frequência natural as curvas de resposta de frequência apresentam concavidade a direita, indicando a existência de duas ou três soluções positivas.

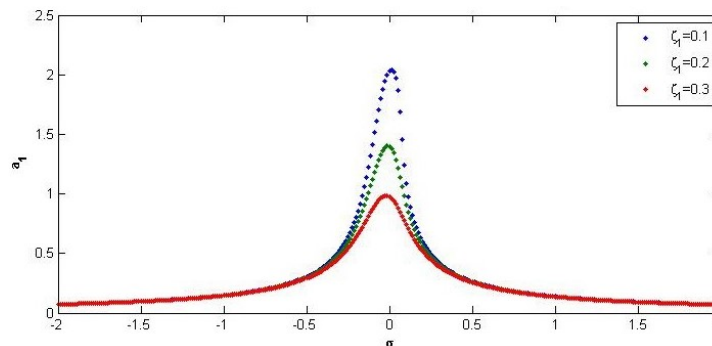
Figura 36 – Efeitos da frequência natural ω_1 .



Fonte: o autor.

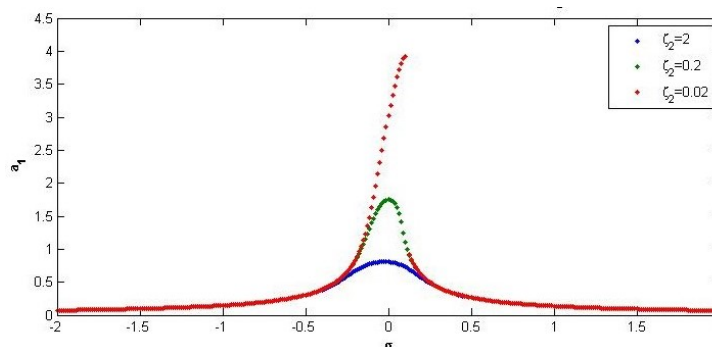
As Figuras 37 e 38 representam os efeitos dos amortecedores lineares ζ_1 e ζ_2 , verificamos que a resposta de amplitude em função do amortecimento linear é crescente e decrescente, respectivamente.

Figura 37 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_1 .



Fonte: o autor.

Figura 38 – Efeitos do coeficiente de amortecimento não linear ζ_2 .

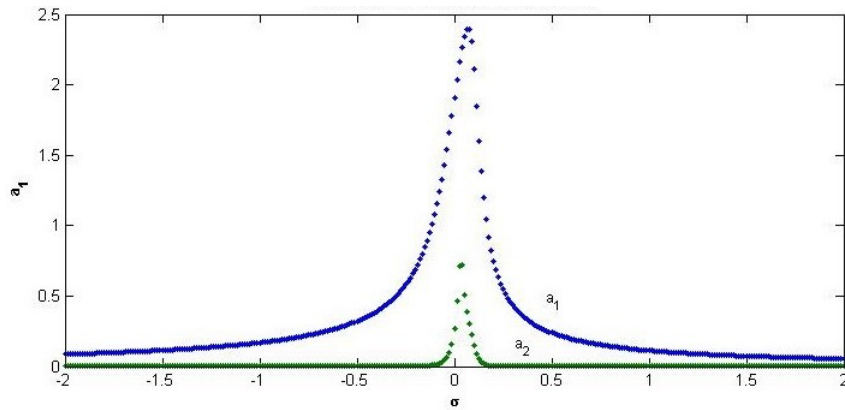


Fonte: o autor.

A seguir apresentaremos as curvas de resposta de frequência, sistema de equações (3.110)-(3.113) para o caso prático, que é quando o controle está ativado ($a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$).

Na Figura 39 estão representados os efeitos da amplitude em função do parâmetro de detonação σ . Verificamos que houve uma redução na amplitude, indicando assim a eficácia do absorvedor no estado estacionário.

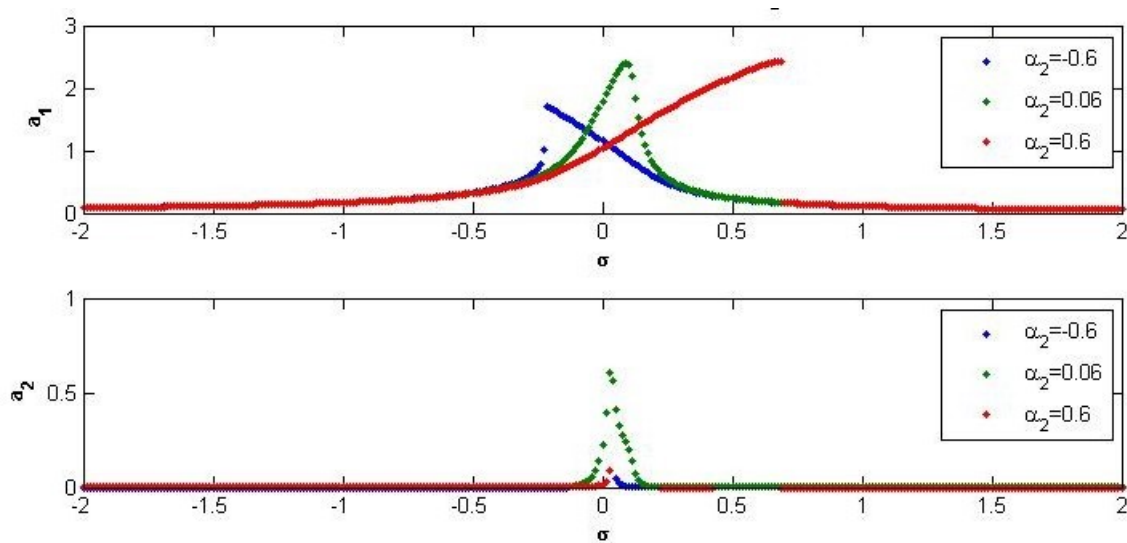
Figura 39 – Efeitos do parâmetro de detonação σ .



Fonte: o autor.

Na Figura 40 estão representados os efeitos de rigidez da mola não linear α_2 , verificamos que quando α_2 é negativo, tende a apresentar mais de uma solução estacionária para o parâmetro σ negativo. E para α_2 positivo apresenta mais de uma solução estacionária para o parâmetro σ positivo.

Figura 40 – Efeitos de rigidez da mola não linear α_2 .

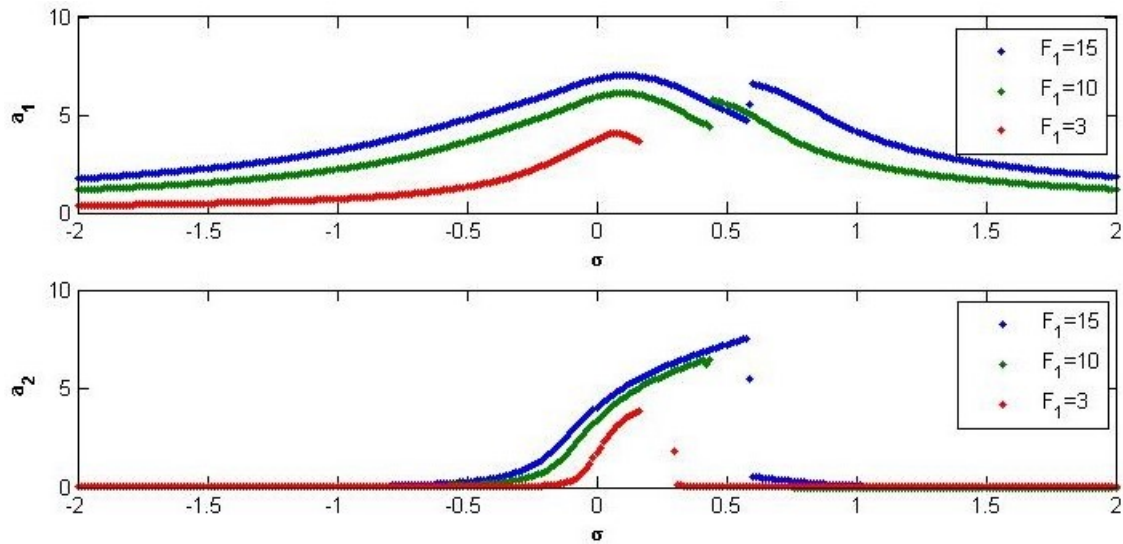


Fonte: o autor.

Na Figura 41 estão representados os efeitos de amplitude de excitação F_1 , verifica-

mos que a relação da solução estacionária com a amplitude da força externa é a mesma para sistema com controle ativado e desativado, com um ganho na redução proporcional na amplitude, como podemos observar na relação proporcional entre a frequência externa e amplitude estacionária, Figuras 41 e 35.

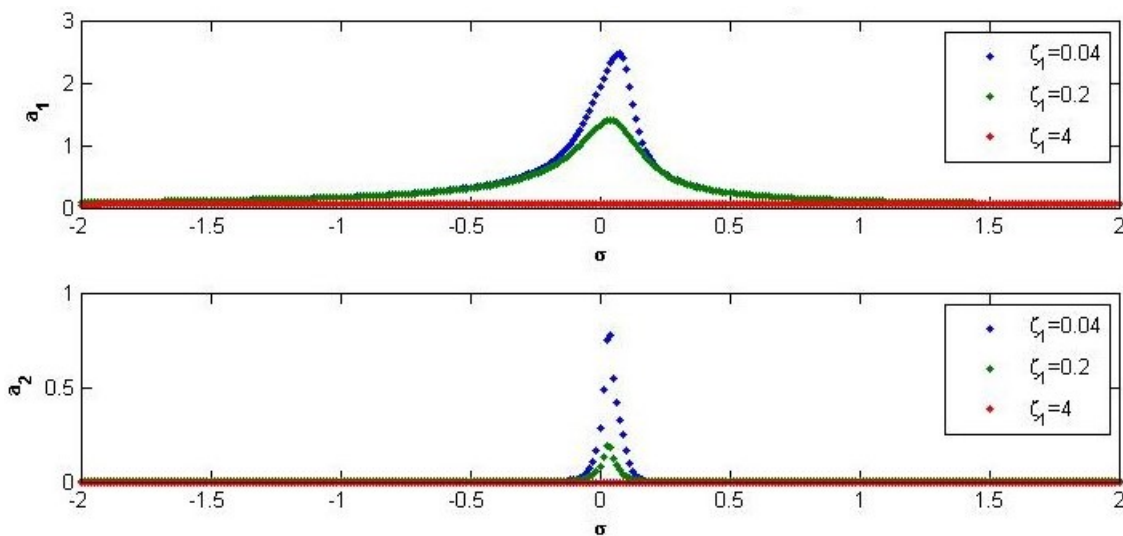
Figura 41 – Efeitos da amplitude de excitação F_1 .



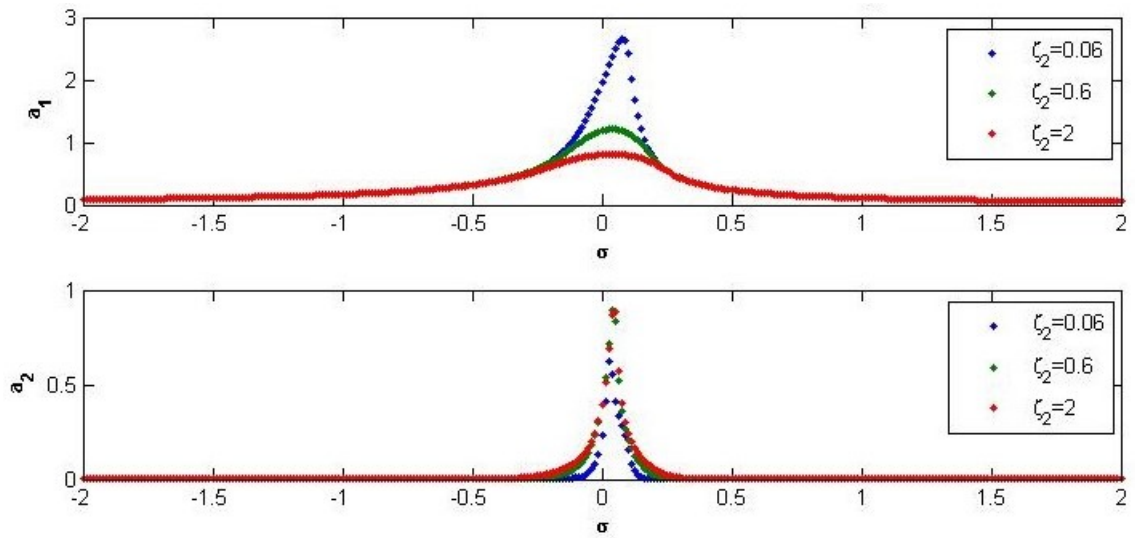
Fonte: o autor.

Nas Figuras 42 e 43 estão representados os efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_1 e não linear ζ_2 respectivamente. Verificamos que a amplitude de estado estacionário é uma relação crescente com o parâmetro de amortecimento linear e não linear. O parâmetro linear tem um ganho melhor que o não linear para valores maiores de amortecimento.

Figura 42 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_1 .

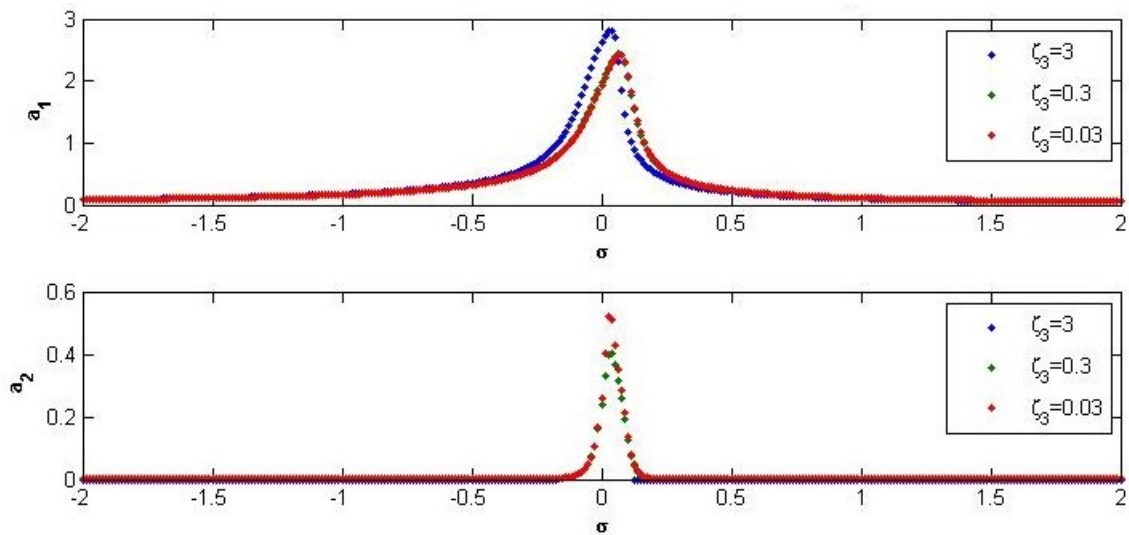


Fonte: o autor.

Figura 43 – Efeitos do coeficiente de amortecimento não linear ζ_2 .

Fonte: o autor.

Na Figura 44 estão representados os efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_3 , verificamos que a amplitude de estado estacionário permanece praticamente invariante com variação de valores do parâmetro de amortecimento do controle.

Figura 44 – Efeitos do coeficiente de amortecimento linear ζ_3 .

Fonte: o autor.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo é realizada a análise conclusiva dos resultados obtidos pela simulação do estudo de caso, verificando as condições de ressonância estabelecidas para análise. Apresentamos, ainda, a proposta para trabalhos futuros.

5.1 Conclusão

Este sistema exemplifica as vibrações que ocorrem em máquinas, sujeitas a forças de excitação externa e paramétricas. Para controlar a vibração do sistema não-linear foi utilizado um absorvedor.

Soluções no estado de equilíbrio e sua estabilidade são estudadas para valores de diferentes parâmetros selecionados. Foram analisados três casos possíveis de ressonância para o sistema com e sem absorvedor, com e sem atraso.

Observamos que quando o absorvedor está desativado, o comportamento do sistema em ressonância primária, Figura 21 e em ressonância paramétrica principal, Figura 22, apresentam as mesmas amplitudes tanto para os casos sem atraso, como para os que tem atraso.

Mas para o comportamento em ressonância simultânea, primária e paramétrica principal Figura 23, houve um aumento na amplitude máxima do sistema principal quando adicionamos o atraso.

Quando o absorvedor é ativado, houve uma redução na eficácia do absorvedor com atraso, figuras 30 e 32 em relação a eficácia do absorvedor sem atraso analisada nas figuras 24 e 26.

Mas, houve uma melhora na eficácia do absorvedor com atraso em relação a eficácia do absorvedor sem atraso no caso de ressonância simultânea, paramétrica principal e

interna, Figuras 31 e 25.

Os resultados das análises feitas estão representados nas tabelas 1 e 2, da seguinte maneira:

- Na primeira coluna: casos de ressonância : Ressonância.
- Na segunda coluna: amplitude de estado estacionário sem controle : a_1 sem controle.
- Na terceira coluna: amplitude de estado estacionário com controle : a_1 com controle.
- Na quarta coluna: relação de amplitude : $\frac{x_1}{F_1}$.

Na Tabela 3 são apresentados os valores dos casos de ressonância analisados e da eficácia do absorvedor E_a em relação à amplitude máxima do sistema principal quando o controle está desativado para os casos com e sem atraso.

Tabela 1 – Valores numéricos do sistema principal sem atraso

Ressonância	a_1 sem controle	a_1 com controle	x_1/F_1
$\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de ω_1	3	0.5	5
$\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e Ω_1 longe de ω_1	4	0.3	7
$\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de $2\omega_1$	3.5	0.4	5

Fonte: o autor.

Tabela 2 – Valores numéricos do sistema principal com atraso

Ressonância	a_1 sem controle	a_1 com controle	x_1/F_1
$\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de ω_1	3	1.5	5
$\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e Ω_1 longe de ω_1	4	0.2	7
$\Omega_1 \cong \omega_1$ e Ω_2 longe de $2\omega_1$	3.5	1.5	5

Fonte: o autor.

Tabela 3 – E_a : amplitude de estado estacionário do sistema sem controle/amplitude de estado estacionário do sistema com controle

Ressonância	E_a sem atraso	E_a com atraso
$\Omega_1 \cong \omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$	6 (à 17%)	3 (à 30%)
$\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$	13 (à 8%)	20 (à 5%)
$\Omega_1 \cong \omega_1$, $\Omega_2 \cong 2\omega_1$ e $\omega_2 \cong 3\omega_1$	9 (à 11%)	3 (à 30%)

Fonte: o autor.

Contudo, verificamos que quando adicionamos atraso nas viscosidades, também temos eficácia no controle de vibração do sistema. Podemos conjecturar que os sistemas com controle podem representar de maneira mais fiel, um sistema de controle real, isto é, esses resultados numéricos podem estar mais próximos de resultados obtidos experimentalmente.

5.2 Trabalhos Futuros

Nossa contribuição ao estudo do comportamento dinâmico do sistema representado pela Figura 20 se dará em duas partes. Na primeira, faremos uma linearização no sistema de equações obtidas pelo método de perturbação das múltiplas escalas, uma vez que o sistema apresenta vibrações não lineares. Nesta parte, é importante ressaltar que a análise diferencial usada, será em um espaço de dimensão infinita, também conhecidos como espaços de Banach; esta análise difere substancialmente daquela usada no caso ordinário. Em seguida será feita uma análise de estabilidade propriamente dita. Especificamente, usaremos um critério similar ao usado no caso ordinário, a saber, o critério de Routh-Hurwitz, que além de englobar o caso ordinário, introduz novos elementos para tratar dos tempos de atraso.

REFERÊNCIAS

- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. *Vibrações Mecânicas 2. ed.* São Paulo: Cengage Learning, 2011. 616 p. Citado 4 vezes nas páginas 25, 39, 40 e 57.
- BEER, F. P. *et al. Vector mechanics for engineers: statics and dynamics 9. ed.* New York: McGraw-Hill, 2010. 1326 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.
- BELLEN, A.; ZENNARO, M. *Numerical Methods for Delay Differential Equations.* New York: Oxford University Press, 2003. 395 p. Citado na página 81.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno 9.ed.* Rio de Janeiro: LTC Editora, 2010. 434 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis 9. ed.* Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011. 877 p. Citado na página 81.
- CHAPRA, S. C. *Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists 3. ed.* New York: McGraw-Hill, 2012. 653 p. Citado na página 81.
- CHAU, P. C. *Process Control: a First Course with MATLAB®.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. 314 p. Citado na página 81.
- C.HIBBELER, R. *Dinâmica: Mecânica para Engenharia 10. ed.* São Paulo: Prentice Hall, 2005. 572 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.
- FELÍCIO, L. C. *Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta 2. ed.* São Carlos: RiMa Editora, 2010. 551 p. Citado 3 vezes nas páginas 25, 57 e 81.
- FIGUEIREDO, J. C. de. *Equações diferenciais não lineares com três retardos: estudo detalhado das soluções.* 160 f. Tese (Doutorado em Física Nuclear) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000. Citado na página 57.
- GILAT, A. *MATLAB® com Aplicações em Engenharia 2. ed.* Porto Alegre: Bookman, 2006. 359 p. Citado na página 81.
- GRAY, G. L.; COSTANZO, F.; PLESHA, M. E. *Mecânica para Engenharia: Dinâmica.* [S.l.]: Bookman Editora, 2014. 772 p. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- HATCH, M. R. *Vibration Simulation Using MATLAB® and Ansys.* [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2001. 634 p. Citado na página 81.

HU, H. Y.; WANG, Z. H. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. New York: Springer, 2002. 294 p. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 54 e 81.

NAYFEH, A. H. *Introduction to Perturbation Techniques*. [S.l.]: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1993. 425 p. Citado 6 vezes nas páginas 25, 41, 44, 45, 57 e 62.

_____. *Perturbation Methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. 519 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 57.

NETO, C. M. *Proposta de construção de um amortecedor de vibração ajustável, tva, utilizando fluido Magnetoreológico*. 101 f. Monografia (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2008. Citado na página 57.

OLIVEIRA, D. de C. *Osciladores Acoplados: sistema com dois graus de liberdade*. 31 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Departamento de Física, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2008. Citado na página 57.

PALIS, J. Sistemas caóticos ou turbulentos: Atratores e bifurcações homoclínicas. *Matemática Universitária*, v. 10, n. 9, 1989. Citado na página 81.

POLO, J. C. F. 31 f. Monografia (Mestrado) — Validação de Um Algoritmo Não Linear para Simulações Numéricas no Domínio do Tempo de Movimentos de Corpos em Presença de Ondas, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 81.

RAO, S. S. *Mechanical Vibrations 2. ed.* [S.l.]: Addison Wesley Publishing Company, 2000. 516 p. Citado 5 vezes nas páginas 25, 32, 33, 34 e 35.

_____. *Vibrações Mecânicas 4. ed.* São Paulo: Person Prentice Hall, 2008. 424 p. Citado na página 25.

SAEED, N.; EL-GANINI, W.; EISSA, M. Nonlinear time delay saturation-based controller for suppression of nonlinear beam vibrations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 37, p. 8846–8864, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 40.

SAYED, M.; HAMED, Y. S.; AMER, Y. A. Vibration reduction and stability of non-linear system subjected to external and parametric excitation forces under a non-linear absorber. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, v. 6, n. 22, p. 1051–1070, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 57.

SHAMPINE, L. F.; THOMPSON, S. *Solving Delay Differential Equations with dde23*. 2015. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3899-tutorial-on-solving-ddes-with-dde23>>. Acesso em: 08/03/2015. Citado na página 81.

SOEIRO, N. S. *Curso de Fundamentos de Vibrações e Balanceamento de Rotores*. 2008. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAE7Q8AA/curso-fundamentos-vibracoes-balanceamento-rotores>>. Acesso em: 07/04/2014. Citado na página 25.

SOUZA, A. J. *Vibrações Mecânicas: textos de apoio*. 2014. Disponível em: <http://www.enautica.pt/publico/professores/vfranco/VIBRACOES_MECHANICAS_VF-2002-2010.pdf>. Acesso em: 07/04/2014. Citado na página 25.

TANG, K. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 2*. New York: Springer, 2007. 339 p. Citado 2 vezes nas páginas [25](#) e [57](#).