

Teoria de Conjuntos

Do vazio ao Axioma da Escolha

Tiago Macedo

I Workshop de Álgebra - UFG - CAC
http://ssa_mat.catalao.ufg.br



Teoria ingênua de conjuntos

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos.

Exemplos

$\{\text{maçã}, \emptyset, 17, \text{Lula}\}, \{\text{pessoas}\}, \dots$

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos.

Exemplos

$\{\text{maçã}, \emptyset, 17, \text{Lula}\}, \{\text{pessoas}\}, \dots$

Definição

Um objeto x de uma coleção C é chamado de elemento do conjunto, e denotado $x \in C$.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Um conjunto é uma coleção bem definida de objetos.

Exemplos

$\{\text{maçã}, \emptyset, 17, \text{Lula}\}, \{\text{pessoas}\}, \dots$

Definição

Um objeto x de uma coleção C é chamado de elemento do conjunto, e denotado $x \in C$.

Exemplo

O conjunto vazio $\emptyset$ não tem elementos.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dois conjuntos X , Y são iguais se eles têm os mesmos elementos, ou seja, $X = Y$ se:

- para todo $x \in X$, então $x \in Y$ e
- para todo $y \in Y$, então $y \in X$.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dois conjuntos X, Y são iguais se eles têm os mesmos elementos, ou seja, $X = Y$ se:

- para todo $x \in X$, então $x \in Y$ e
- para todo $y \in Y$, então $y \in X$.

Exemplos

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0, 1, 1, 2, 2, 2, \dots\}$.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dois conjuntos X , Y são iguais se eles têm os mesmos elementos, ou seja, $X = Y$ se:

- para todo $x \in X$, então $x \in Y$ e
- para todo $y \in Y$, então $y \in X$.

Exemplos

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0, 1, 1, 2, 2, 2, \dots\}$.
- Mas $\{\text{banana}, \text{maçã}\} \neq \{\bullet, \circ\}$.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dois conjuntos X , Y são iguais se eles têm os mesmos elementos, ou seja, $X = Y$ se:

- para todo $x \in X$, então $x \in Y$ e
- para todo $y \in Y$, então $y \in X$.

Exemplos

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0, 1, 1, 2, 2, 2, \dots\}$.
- Mas $\{\text{banana}, \text{maçã}\} \neq \{\bullet, \circ\}$.
- Em particular, $\emptyset$ é o único conjunto que não contém nenhum elemento.

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dados dois conjuntos A, B , dizemos que $A \subseteq B$ se todo elemento de A é um elemento de B .

Teoria ingênua de conjuntos

Definição

Dados dois conjuntos A, B , dizemos que $A \subseteq B$ se todo elemento de A é um elemento de B .

Exemplos

$$\emptyset \subseteq \{0\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Exemplos

- $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Exemplos

- $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
- $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$.

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Exemplos

- $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
- $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$. De fato $\emptyset \cup A = A$ para todo conjunto A .

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Exemplos

- $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
- $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$. De fato $\emptyset \cup A = A$ para todo conjunto A .
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Criando novos conjuntos: união

Definição

Dados dois conjuntos X , Y , a sua união $X \cup Y$ é definida como o conjunto formado pelos elementos z tais que $z \in X$ ou $z \in Y$.

Exemplos

- $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
- $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$. De fato $\emptyset \cup A = A$ para todo conjunto A .
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Observe que: $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$.

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Exemplos

- $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Exemplos

- $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.
- $\emptyset \cap \{1\} = \emptyset$.

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Exemplos

- $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.
- $\emptyset \cap \{1\} = \emptyset$. De fato $\emptyset \cap B = \emptyset$ para todo conjunto B .

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Exemplos

- $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.
- $\emptyset \cap \{1\} = \emptyset$. De fato $\emptyset \cap B = \emptyset$ para todo conjunto B .
- $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Criando novos conjuntos: intersecção

Definição

Dados dois conjuntos C, D , a sua intersecção $C \cap D$ é definida como o conjunto formado pelos elementos u tais que $u \in C$ e $u \in D$.

Exemplos

- $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$.
- $\emptyset \cap \{1\} = \emptyset$. De fato $\emptyset \cap B = \emptyset$ para todo conjunto B .
- $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Observe que: $C \cap D \subseteq C$, $C \cap D \subseteq D$ e $C \cap D \subseteq C \cup D$.

Criando novos conjuntos: potência

Definição

Dado um conjunto Z , a sua potência é o conjunto $\mathcal{P}(Z)$ formado por subconjuntos de Z .

Criando novos conjuntos: potência

Definição

Dado um conjunto Z , a sua potência é o conjunto $\mathcal{P}(Z)$ formado por subconjuntos de Z .

Exemplos

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Criando novos conjuntos: potência

Definição

Dado um conjunto Z , a sua potência é o conjunto $\mathcal{P}(Z)$ formado por subconjuntos de Z .

Exemplos

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\#\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}) = 2^n$.

Criando novos conjuntos: potência

Definição

Dado um conjunto Z , a sua potência é o conjunto $\mathcal{P}(Z)$ formado por subconjuntos de Z .

Exemplos

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\#\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}) = 2^n$. Em particular, $\mathcal{P}(\{\bullet\}) = \{\emptyset, \{\bullet\}\}$.

Criando novos conjuntos: potência

Definição

Dado um conjunto Z , a sua potência é o conjunto $\mathcal{P}(Z)$ formado por subconjuntos de Z .

Exemplos

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\#\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}) = 2^n$. Em particular, $\mathcal{P}(\{\bullet\}) = \{\emptyset, \{\bullet\}\}$.
- $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$.

Criando novos conjuntos: diferença

Definição

Dados dois conjuntos V , W , a diferença $V \setminus W$ é o subconjunto de V formado pelos elementos que não são elementos de W .

Criando novos conjuntos: diferença

Definição

Dados dois conjuntos V , W , a diferença $V \setminus W$ é o subconjunto de V formado pelos elementos que não são elementos de W .

Exemplo

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \ni 1/2, 7/5, \sqrt{2}, \pi, e.$

Criando novos conjuntos: diferença

Definição

Dados dois conjuntos V , W , a diferença $V \setminus W$ é o subconjunto de V formado pelos elementos que não são elementos de W .

Exemplo

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \ni 1/2, 7/5, \sqrt{2}, \pi, e.$

Mas $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \not\ni 0, 1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots$

Criando novos conjuntos: produto cartesiano

Definição

Dados dois conjuntos R, S , o produto cartesiano $R \times S$ é o conjunto formado pelos elementos da forma (r, s) com $r \in R$ e $s \in S$.

Criando novos conjuntos: produto cartesiano

Definição

Dados dois conjuntos R, S , o produto cartesiano $R \times S$ é o conjunto formado pelos elementos da forma (r, s) com $r \in R$ e $s \in S$.

Exemplos

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.
- Se $\beta \in B$ estiver associado a $\alpha \in A$ via f , denotamos $f(\alpha) = \beta$.

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.
- Se $\beta \in B$ estiver associado a $\alpha \in A$ via f , denotamos $f(\alpha) = \beta$.
- O conjunto A é chamado de domínio de f .

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.
- Se $\beta \in B$ estiver associado a $\alpha \in A$ via f , denotamos $f(\alpha) = \beta$.
- O conjunto A é chamado de domínio de f .
- O conjunto B é chamado de contra-domínio de f .

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.
- Se $\beta \in B$ estiver associado a $\alpha \in A$ via f , denotamos $f(\alpha) = \beta$.
- O conjunto A é chamado de domínio de f .
- O conjunto B é chamado de contra-domínio de f .
- O subconjunto de B formado pelos elementos da forma $f(z)$ com $z \in A$ é chamado de imagem de f .

Criando novos conjuntos: funções

Definições

- Dados dois conjuntos A, B , uma função $f : A \rightarrow B$ é uma associação de um único elemento $b \in B$ a cada elemento $a \in A$.
- Se $\beta \in B$ estiver associado a $\alpha \in A$ via f , denotamos $f(\alpha) = \beta$.
- O conjunto A é chamado de domínio de f .
- O conjunto B é chamado de contra-domínio de f .
- O subconjunto de B formado pelos elementos da forma $f(z)$ com $z \in A$ é chamado de imagem de f .

Exemplo

$\eta : \{\text{pessoas}\} \rightarrow \{\text{palavras}\}, \eta(p) = \text{nome de } p.$

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- {pessoas que estão nessa sala agora}.

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- {pessoas que estão nessa sala agora}.
- $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}$.

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- $\{\text{pessoas que estão nessa sala agora}\}.$
- $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}.$
- $\mathcal{P}(A) = \{B: \text{conjunto} \mid B \subseteq A\}.$

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- {pessoas que estão nessa sala agora}.
- $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}$.
- $\mathcal{P}(A) = \{B: \text{conjunto} \mid B \subseteq A\}$.
- {homens que não se barbeiam}.

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- {pessoas que estão nessa sala agora}.
- $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}$.
- $\mathcal{P}(A) = \{B: \text{conjunto} \mid B \subseteq A\}$.
- {homens que não se barbeiam}.
- $\{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

Criando novos conjuntos: especificações

Podemos formar conjuntos cujos elementos satisfazem certa propriedade.

Exemplos

- {pessoas que estão nessa sala agora}.
- $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = a^2\}$.
- $\mathcal{P}(A) = \{B: \text{conjunto} \mid B \subseteq A\}$.
- {homens que não se barbeiam}.
- $\{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

Pela definição de conjunto, poderíamos ter $D = \{D\}$.

Paradoxo de Russell

Considere o conjunto $B = \{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

Paradoxo de Russell

Considere o conjunto $B = \{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

$$B \in B?$$

Paradoxo de Russell

Considere o conjunto $B = \{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

$B \in B?$

- Se SIM, então B é um conjunto tal que $B \notin B$.

Paradoxo de Russell

Considere o conjunto $B = \{C: \text{conjunto} \mid C \notin C\}$.

$B \in B?$

- Se SIM, então B é um conjunto tal que $B \notin B$.
- Se NÃO, então B é um conjunto tal que $B \in B$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 01

Axioma do conjunto vazio

Existe um conjunto vazio, que não contém nenhum elemento.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 02

Axioma da extensão

Dois conjuntos que contém os mesmos elementos são iguais.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 03

Axioma do pareamento

Se A, B forem conjuntos, então $\{A, B\}$ é um conjunto.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 03

Axioma do pareamento

Se A, B forem conjuntos, então $\{A, B\}$ é um conjunto.

Exemplos

- $\emptyset$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 03

Axioma do pareamento

Se A, B forem conjuntos, então $\{A, B\}$ é um conjunto.

Exemplos

- $\emptyset$.
- $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 03

Axioma do pareamento

Se A, B forem conjuntos, então $\{A, B\}$ é um conjunto.

Exemplos

- $\emptyset$.
- $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 03

Axioma do pareamento

Se A, B forem conjuntos, então $\{A, B\}$ é um conjunto.

Exemplos

- $\emptyset$.
- $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 04

Axioma da união

Se C_i forem conjuntos, então $\cup_i C_i$ é um conjunto.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 05

Axioma da potência

Se V for um conjunto, então $\mathcal{P}(V)$ é um conjunto.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 06

Axioma da especificação

Se W for um conjunto e p for um predicado (uma certa “propriedade”), então $\{w \in W \mid p(w)\}$ é um subconjunto de W .

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 07

Axioma do infinito

Existe um conjunto ω cujos elementos são conjuntos de cada cardinalidade finita.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 07

Axioma do infinito

Exite um conjunto ω cujos elementos são conjuntos de cada cardinalidade finita.

Idea: $\omega = \mathbb{N}$.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 08

Axioma da regularidade

Não existem cadeias decrescentes infinitas $X \ni X_1 \ni X_2 \ni \dots$

Em particular, $Y = \{Y\}$ não é um conjunto, e o “conjunto de todos os conjuntos” não é um conjunto.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 09

Axioma da substituição

Dada uma função $f : U \rightarrow W$, a imagem de f é um conjunto.

Teoria de Zermelo-Fraenkel: axioma 10

Axioma da escolha

Se Z for um conjunto, cujos elementos (conjuntos) têm ao menos um elemento, então existe um conjunto formado por exatamente um elemento de cada elemento de Z .