Grupos com um número finito de centralizadores

Síntese...

- Grupo, subgrupo, subgrupo normal, centro, centralizador, classe lateral, grupo quociente, índice, Teorema de Lagrange, homomorfismo e isomorfismo.

GAP: Groups, Algorithms and Programming

GAP:

- O que é?
- sistema para programar e/ou computar com estruturas algébricas. Despertou interesse inicial de matemáticos pelo entendimento, planejamento e implementação de algoritmos da teoria dos grupos, de modo a proporcionar aos usuários/programadores total acesso aos algoritmos e estrutura de dados utilizados, permitindo assim um estudo crítico dos mesmos bem como eventuais modificações dos métodos existentes. Junta-se a esse plano a intenção de se fazer um sistema de fácil portabilidade e manutenção, tendo em vista os limitados recursos de um ambiente acadêmico.

GAP:

- O que é?
- sistema para programar e/ou computar com estruturas algébricas. Despertou interesse inicial de matemáticos pelo entendimento, planejamento e implementação de algoritmos da teoria dos grupos, de modo a proporcionar aos usuários/programadores total acesso aos algoritmos e estrutura de dados utilizados, permitindo assim um estudo crítico dos mesmos bem como eventuais modificações dos métodos existentes. Junta-se a esse plano a intenção de se fazer um sistema de fácil portabilidade e manutenção, tendo em vista os limitados recursos de um ambiente acadêmico.

GAP:

- O que é?
- sistema para programar e/ou computar com estruturas algébricas. Despertou interesse inicial de matemáticos pelo entendimento, planejamento e implementação de algoritmos da teoria dos grupos, de modo a proporcionar aos usuários/programadores total acesso aos algoritmos e estrutura de dados utilizados, permitindo assim um estudo crítico dos mesmos bem como eventuais modificações dos métodos existentes. Junta-se a esse plano a intenção de se fazer um sistema de fácil portabilidade e manutenção, tendo em vista os limitados recursos de um ambiente acadêmico.

GAP:

- O que é?
- sistema para programar e/ou computar com estruturas algébricas. Despertou interesse inicial de matemáticos pelo entendimento, planejamento e implementação de algoritmos da teoria dos grupos, de modo a proporcionar aos usuários/programadores total acesso aos algoritmos e estrutura de dados utilizados, permitindo assim um estudo crítico dos mesmos bem como eventuais modificações dos métodos existentes. Junta-se a esse plano a intenção de se fazer um sistema de fácil portabilidade e manutenção, tendo em vista os limitados recursos de um ambiente acadêmico.

GAP:

- O que é?
- sistema para programar e/ou computar com estruturas algébricas. Despertou interesse inicial de matemáticos pelo entendimento, planejamento e implementação de algoritmos da teoria dos grupos, de modo a proporcionar aos usuários/programadores total acesso aos algoritmos e estrutura de dados utilizados, permitindo assim um estudo crítico dos mesmos bem como eventuais modificações dos métodos existentes. Junta-se a esse plano a intenção de se fazer um sistema de fácil portabilidade e manutenção, tendo em vista os limitados recursos de um ambiente acadêmico.

O sistema consiste basicamente de 4 partes:

Primeira:

- um núcleo escrito em linguagem C;
- um interpretador para a linguagem GAP que pertence a família Pascal mas que além de permitir tipos adicionais para objetos de teoria dos grupos, não requer declaração de tipo (o GAP interpreta o objeto dentro de seu domínio);
- um conjunto de ferramentas para programação em ambiente interativo, para rodar programas escritos em GAP.

Primeira:

- um núcleo escrito em linguagem C;
- um interpretador para a linguagem GAP que pertence a família Pascal mas que além de permitir tipos adicionais para objetos de teoria dos grupos, não requer declaração de tipo (o GAP interpreta o objeto dentro de seu domínio);
- um conjunto de ferramentas para programação em ambiente interativo, para rodar programas escritos em GAP.

Primeira:

- um núcleo escrito em linguagem C;
- um interpretador para a linguagem GAP que pertence a família Pascal mas que além de permitir tipos adicionais para objetos de teoria dos grupos, não requer declaração de tipo (o GAP interpreta o objeto dentro de seu domínio);
- um conjunto de ferramentas para programação em ambiente interativo, para rodar programas escritos em GAP.

Segunda:

- uma biblioteca de funções em linguagem GAP;
- A estrutura dessa biblioteca permite ao usuário alterar os algoritmos implementados, ou mesmo adicionar outros, tanto para seu uso como em benefício do próprio GAP.

Segunda:

- uma biblioteca de funções em linguagem GAP;
- A estrutura dessa biblioteca permite ao usuário alterar os algoritmos implementados, ou mesmo adicionar outros, tanto para seu uso como em benefício do próprio GAP.

Terceira:

- uma biblioteca de dados sobre teoria dos grupos que já inclui por exemplo uma vasta lista de grupos.

Quarta:

- A documentação, em forma de arquivo, que serve tanto para on screen Help (ajuda na tela) como para a impressão do manual. O manual é extenso (impresso para a versão 3.4.4. tem cerca de 1500 páginas) e rico em detalhes: sugere-se as seguintes partes para um primeiro contato:

- o capítulo About GAP é uma verdadeira introdução ao sistema, que no princípio não pressupõe do usuário conhecimentos da teoria dos grupos nem tampouco habilidade no uso de um computador;
- O capítulo The Programming Language, que descreve o conjunto de ferramentas para se programar no GAP;
- O capítulo Environment (ambiente), que descreve o ambiente interativo do usuário com o sistema;
- O Index, que além de sua função óbvia, exibe a grafia das vários funções, permitindo assim uma busca mais eficiente da sintaxe com o uso do on screen Help.

- Onde baixar?
- Manual
- Index
- Listas
- Letras maiúsculas e minúsculas

- Onde baixar?
- Manual
- Index
- Listas
- Letras maiúsculas e minúsculas

- Onde baixar?
- Manual
- Index
- Listas
- Letras maiúsculas e minúsculas

- Onde baixar?
- Manual
- Index
- Listas
- Letras maiúsculas e minúsculas

- Onde baixar?
- Manual
- Index
- Listas
- Letras maiúsculas e minúsculas

- Listas (o que são no GAP, como criar, exemplos: Fatorial, Factors, Collected, Length, Elements, Position, Add, produto escalar, matriz etc)

- Funções (For, While, If.. then, Factors,): Exemplos.
- Grupos já implementados: Symmetric, DihedralGroup, CyclicGroup etc
- Propriedades de grupos: Size, Index, Elements, IsAbelian, IsFinite, IsCyclic, IsSimple, Subgroup, Center, Centralizer, DerivedSubgroup etc
- Homomorphism (IsomorphismFpGroups): Exemplo: NaturalHomomorphism, Image, Kernel
- Outras funções envolvendo grupos: AllSmallGroups

- Funções (For, While, If.. then, Factors,): Exemplos.
- Grupos já implementados: Symmetric, DihedralGroup, CyclicGroup etc
- Propriedades de grupos: Size, Index, Elements, IsAbelian, IsFinite, IsCyclic, IsSimple, Subgroup, Center, Centralizer, DerivedSubgroup etc
- Homomorphism (IsomorphismFpGroups): Exemplo: NaturalHomomorphism, Image, Kernel
- Outras funções envolvendo grupos: AllSmallGroups

- Funções (For, While, If.. then, Factors,): Exemplos.
- Grupos já implementados: Symmetric, DihedralGroup, CyclicGroup etc
- Propriedades de grupos: Size, Index, Elements, IsAbelian, IsFinite, IsCyclic, IsSimple, Subgroup, Center, Centralizer, DerivedSubgroup etc
- Homomorphism (IsomorphismFpGroups): Exemplo: NaturalHomomorphism, Image, Kernel
- Outras funções envolvendo grupos: AllSmallGroups

- Funções (For, While, If.. then, Factors,): Exemplos.
- Grupos já implementados: Symmetric, DihedralGroup, CyclicGroup etc
- Propriedades de grupos: Size, Index, Elements, IsAbelian, IsFinite, IsCyclic, IsSimple, Subgroup, Center, Centralizer, DerivedSubgroup etc
- Homomorphism (IsomorphismFpGroups): Exemplo: NaturalHomomorphism, Image, Kernel
- Outras funções envolvendo grupos: AllSmallGroups

- Funções (For, While, If.. then, Factors,): Exemplos.
- Grupos já implementados: Symmetric, DihedralGroup, CyclicGroup etc
- Propriedades de grupos: Size, Index, Elements, IsAbelian, IsFinite, IsCyclic, IsSimple, Subgroup, Center, Centralizer, DerivedSubgroup etc
- Homomorphism (IsomorphismFpGroups): Exemplo: NaturalHomomorphism, Image, Kernel
- Outras funções envolvendo grupos: AllSmallGroups

- Resultados existentes

1. Dado um grupo G, o que se pode dizer sobre $|Cent(G)|$?
2. Se é conhecido o valor de $|Cent(G)|$, o que se pode dizer a respeito do grupo G?

Denote por $\mathfrak{C}_n$ a classe de todos os grupos G com exatamente n centralizadores (de elementos), i.e., $n = |\{C_G(x) \mid x \in G\}|$.
Então G é dito um $\mathfrak{C}_n$-grupo se G pertence a classe $\mathfrak{C}_n$.
Denote por D_{2n} o grupo diedral com $2n$ elementos, cuja presentação é dada por $\langle a, b \mid a^n = 1 = b^2 \text{ e } a^b = a^{-1} \rangle$.
Naturalmente $\mathfrak{C}_1$-grupos são, exatamente, os grupos abelianos.
Para cada $n \geq 4$, tem-se que $\mathfrak{C}_n$ é não vazio.

Muitos autores tentaram classificar os $\mathfrak{C}_n$-grupos, para cada $n \in \mathbb{N}$:

- (Belcastro e Sherman) Não existe $\mathfrak{C}_n$-grupos, quando $n = 2$ e 3.

  G é um $\mathfrak{C}_4$-grupo se, e somente, se $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

  G é um $\mathfrak{C}_5$-grupo se, e somente, se $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ou S_3 (o grupo simétrico de ordem 6).

(Ashrafi) Se G é um $\mathfrak{C}_6$-grupo, então $G/Z(G) \cong D_8, A_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(Abdollahi, Amiri e Hassanabadi)

G é um $\mathfrak{C}_7$-grupo se, e somente, se $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, D_{10} ou $\langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1 \text{ e } x^y = x^3 \rangle$;

Se G é um $\mathfrak{C}_8$-grupo, então $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, A_4 (o grupo alternado de ordem 12) ou D_{12}.

(Chen e Qu) Se G é um $\mathfrak{C}_9$-grupo, então $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7, D_{14}, \langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1 \text{ e } a^b = a^2 \rangle$ ou $\langle a, b \mid a^7 = b^6 \text{ e } a^b = a^3 \rangle$.

Proposta para o GAP: Implementar como função a classificação já existente (e as que foram provadas) sobre grupos e centralizadores, por exemplo: Ao digitar no GAP

- C(4);

o GAP retornará

- $C_2 \times C_2$;

o que corresponderia a dizer que na classe dos C(4)-grupos o único quociente possível pelo centro é $C_2 \times C_2$.

- Conjecturas Bastos-Lima

Conjectura 1.

Seja G um $\mathfrak{C}_{11}$-grupo. Então $G/Z(G)$ é isomorfo a D_{18}, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, P, A_1, P_{36} ou P_{72}, onde

- I $P = \langle a, b, c \mid a^2, b^{-1} * a^{-1} * b * a * b^{-1}, c^{-1} * a^{-1} * c * a * c^{-1}, b^3, c^{-1} * b^{-1} * c * b, c^3 \rangle$;
- II $A_1 = \langle a, b, c \mid a^3, b^{-1} * a^{-1} * b * a * c^{-1}, c^{-1} * a^{-1} * c * a, b^3, c^{-1} * b^{-1} * c * b, c^3 \rangle$;
- III $P_{36} = \langle a, b, c, d \mid a^2 * b^{-1}, b^{-1} * a^{-1} * b * a, c^{-1} * a^{-1} * c * a * d^{-2}, d^{-1} * a^{-1} * d * a * d^{-1} * c^{-2}, b^2, c^{-1} * b^{-1} * c * b * c^{-1}, d^{-1} * b^{-1} * d * b * d^{-1}, c^3, d^{-1} * c^{-1} * d * c, d^3 \rangle$ *e*
- IV $P_{72} = \langle a, b, c, d, e \mid a^2 * b^{-1}, b^{-1} * a^{-1} * b * a, c^{-1} * a^{-1} * c * a, d^{-1} * a^{-1} * d * a * e^{-1} * d^{-2}, e^{-1} * a^{-1} * e * a * e^{-1} * d^{-1}, b^2 * c^{-1}, c^{-1} * b^{-1} * c * b, d^{-1} * b^{-1} * d * b * e^{-2}, e^{-1} * b^{-1} * e * b * e^{-1} * d^{-2}, c^2, d^{-1} * c^{-1} * d * c *$

Conjectura 2.

Seja G um $\mathfrak{C}_{13}$-grupo. Então $G/Z(G)$ é isomorfo a H, D_{22}, $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$, G_{55} ou G_{110}, onde

V $G_{55} = \langle a, b \mid a^5, b^{-1} * a^{-1} * b * a * b^{-3}, b^{11} \rangle$ *e*

VI $G_{110} = \langle a, b, c \mid a^2, b^{-1} * a^{-1} * b * a, c^{-1} * a^{-1} * c * a * c^{-9}, b^5, c^{-1} * b^{-1} * c * b * c^{-3}, c^{11} \rangle$.

Conjectura 3.

Seja G um $\mathfrak{C}_{10}$-grupo. Então $G/Z(G)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_{16}, Y, G_{16} ou G_{56}, onde

VII $Y = \langle a, b, c, d \mid a^2 * c^{-1}, b^{-1} * a^{-1} * b * a, c^{-1} * a^{-1} * c * a, d^{-1} * a^{-1} * d * a, b^2 * d^{-1}, c^-1 * b^{-1} * c * b, d^{-1} * b^{-1} * d * b, c^2, d^{-1} * c^{-1} * d * c, d^2 \rangle$;

VIII $G_{16} = \langle a, b, c, d \mid a^2, b^{-1} * a^{-1} * b * a * d^{-1}, c^{-1} * a^{-1} * c * a, d^{-1} * a^{-1} * d * a, b^2 * d^{-1}, c^{-1} * b^{-1} * c * b, d^{-1} * b^{-1} * d * b, c^2, d^{-1} * c^{-1} * d * c, d^2 \rangle$ *e*

IX $G_{56} = \langle a, b, c, d \mid a^7, b^{-1} * a^{-1} * b * a * c^{-1} * b^{-1}, c^{-1} * a^{-1} * c * a * d^{-1} * c^{-1}, d^{-1} * a^{-1} * d * a * b^{-1}, b^2, c^{-1} * b^{-1} * c * b, d^{-1} * b^{-1} * d * b, c^2, d^{-1} * c^{-1} * d * c, d^2 \rangle$.

Conjectura 4.

Seja G um $\mathfrak{C}_{12}$-grupo. Então $G/Z(G)$ é isomorfo a G_{16}, D_{20}, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou R, onde

- X $R = \langle a, b, c, d \mid a^2 * d^{-1}, b^{-1} * a^{-1} * b * a * c^{-1}, c^{-1} * a^{-1} * c * a, d^{-1} * a^{-1} * d * a, b^2, c^{-1} * b^{-1} * c * b, d^{-1} * b^{-1} * d * b, c^2, d^{-1} * c^{-1} * d * c, d^2 \rangle.$

Obrigado pela atenção!