

Cálculo da Raiz Quadrada sem o uso da Calculadora

Márcio Roberto Rocha Ribeiro

rocha.ufg@gmail.com

IMTec/Regional Catalão/Universidade Federal de Goiás

Aline Lourenço Costa¹

aline.l.costa@outlook.com

IMTec/Regional Catalão/Universidade Federal de Goiás

Resumo. A partir da definição de raiz quadrada ou raiz de ordem dois, e utilizando apenas resultados básicos, mostramos como construir um dos algoritmos mais utilizados no cálculo da raiz quadrada de um número real, trazendo assim uma justificativa matemática para a funcionalidade do algoritmo. Esta é uma construção que admite uma extensão natural ao cálculo das raízes de ordem três, quatro, etc.

Palavras-chave: Cálculo, Raiz, Algoritmo.

1 Introdução

A despeito da praticidade oferecida pelas calculadoras, não são poucos os interessados em descobrir quais os truques utilizados por ela, a calculadora, quando nos apresenta com os mágicos, rápidos e inquestionáveis resultados das operações de radiciação como a raiz quadrada, cúbica, etc.

Por parte dos estudantes e professores de matemática a curiosidade inicial está voltada para o cálculo das raízes, e é aí que entram em cena os algoritmos ou os métodos que propiciam estes cálculos. Algoritmos para o cálculo de raízes quadradas são bem difundidos e conhecidos, mas, ao que parece, o mesmo tratamento não se dá às justificativas matemáticas para estes mesmos algoritmos, o que além de aguçar a curiosidade de muitos, também trás, de certa forma, uma frustração pelo desconhecimento dos argumentos matemáticos que justifiquem a utilização dos algoritmos, os porquês que se ocultam além das cortinas dos passos de um algoritmo, os quais ambicionamos aqui desvelar.

A frequência com que reiteradamente somos abordados por estes alunos e professores com questionamentos a respeito do cálculo de raízes quadradas, cúbicas,

¹aluna do curso de Matemática - IMTec/RC/UFG, participante de projeto de pesquisa.

etc, foi o que nos motivou a tentar elaborar uma exposição simples sobre o assunto, e que pretende levar o leitor a entender não apenas a utilização de um algoritmo mas também a sua construção. Para não nos alongarmos demasiado, trataremos aqui o caso das raízes quadradas. Nossa exposição ambiciona ser suficientemente inspiradora e clara a ponto de incentivar e conduzir o leitor a construir algoritmos análogos para as raízes de ordem três, quatro, cinco, etc, que são uma extensão natural do algoritmo aqui apresentado.

2 Notação

Uma palavrinha sobre a notação que iremos adotar aqui. De maneira geral escreveremos um número inteiro não-negativo d na forma decimal da seguinte maneira

$$d = d_n \dots d_2 d_1 d_0$$

onde $n \geq 0$ é inteiro e cada d_i , $0 \leq i \leq n$ é um algarismo de d , portanto, um número inteiro não-negativo. Segue que

$$d = d_n \dots d_2 d_1 d_0 = d_n \cdot 10^n + \dots + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0.$$

A fim de evitar confusão no entendimento da notação, solicitamos ao leitor que atente ao seguinte: para denotarmos um número arbitrário com dois algarismos, escreveremos $d_1 d_0$, como vimos acima, enquanto que para denotarmos o produto destes mesmos algarismos, escreveremos $d_1 \cdot d_0$, com um ponto entre eles. O cuidado faz-se necessário porquanto, quase sempre, ocorre a desigualdade:

$$d_1 d_0 \neq d_1 \cdot d_0,$$

Por exemplo, tomando $d_0 = 3$ e $d_1 = 2$, o primeiro membro da desigualdade será o número 23 enquanto que o segundo membro será o produto $2 \cdot 3 = 6$, e, portanto, a desigualdade acima se dá, pois

$$23 \neq 2 \cdot 3.$$

Da mesma forma escreveremos $d_2 d_1 d_0$ para indicar um número inteiro com três algarismos, enquanto que escreveremos $d_2 \cdot d_1 \cdot d_0$ para indicar o produto destes algarismos e assim por diante. Também usaremos $\sqrt{d}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ para, respectivamente, denotarem raiz quadrada de um número d , conjunto dos números inteiros e conjunto dos números racionais.

3 Raiz quadrada

Extraír a raiz quadrada de um número d significa encontrar um número x cujo quadrado seja igual a d , isto é, tal que $x^2 = d$.

Observamos que para $0 \leq x \leq 100$ temos que $0 \leq x^2 \leq 10000$. Isto significa dizer que a raiz quadrada de um número d , $0 \leq d \leq 10000$ é um número x tal que $0 \leq x \leq 100$. Agora, para $0 \leq x \leq 1000$ temos que $0 \leq x^2 \leq 1000000$. Ou seja, a raiz quadrada de um número d , $0 \leq d \leq 1000000$ é um número x tal que $0 \leq x \leq 1000$. De modo geral, se $0 \leq x \leq 10^n$ temos que $0 \leq x^2 \leq 10^{2n}$, ou seja, a raiz quadrada de um número d , $0 \leq d \leq 10^{2n}$ é um número x tal que $0 \leq x \leq 10^n$.

Estamos fazendo estas observações para esclarecer que, no intuito de construir um algoritmo de forma didática, iremos calcular inicialmente a raiz quadrada de um número inteiro não-negativo d , dado arbitrariamente, mas que esteja entre 0 e 10000, isto é, $0 \leq d \leq 10^4$. Em seguida, veremos como estender os cálculos para $0 \leq d \leq 10^6$ e, finalmente, atacaremos o caso $0 \leq d \leq 10^{2n}$. Finalizaremos mostrando como este algoritmo pode ser utilizado para o cálculo de raízes quadradas de números racionais e irracionais.

3.1 Raiz quadrada de um número inteiro d , $0 \leq d \leq 10^4$.

É claro que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{10^4} = 100$, assim, estaremos interessados em calcular $\sqrt{d}$ para um inteiro d tal que $0 \leq d \leq 9999$. Nestas condições podemos escrever

$$d = d_3d_2d_1d_0,$$

onde d_i são os algarismos de d e o maior número inteiro não-negativo x tal que

$$d \geq x^2 \tag{1}$$

possui até duas casas decimais, e escreveremos $x = a_1a_0$. Estamos interessados em determinar os algarismos a_0 e a_1 de x . Para isto reescrevemos $x = a_1a_0 = a_1 \cdot 10 + a_0$. Segue da inequação (1) que

$$d_3d_2d_1d_0 \geq (a_1 \cdot 10 + a_0)^2,$$

desenvolvendo o segundo membro e reescrevendo o primeiro, obtemos:

$$d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(d_3 \cdot 10 + d_2) \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2.$$

Fazendo $d_3 \cdot 10 + d_2 = d_3d_2$ na inequação anterior, obtemos

$$d_3d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2. \tag{2}$$

Comparando os dois membros na desigualdade anterior, observamos, pelas potências de 10, que podemos escolher a_1 de tal forma que ele seja o maior inteiro não-negativo que satisfaz a desigualdade $d_3d_2 \geq a_1^2$, ou seja,

$$a_1 \leq \sqrt{d_3d_2}. \quad (3)$$

Escolhido o valor de a_1 , voltamos na inequação (2) e a reescrevemos como segue:

$$(d_3d_2 - a_1^2) \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2,$$

fazendo

$$d_3d_2 - a_1^2 = d'_2 \quad (4)$$

obtemos,

$$d'_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2$$

ou ainda,

$$d'_2d_1d_0 \geq (2 \cdot a_1 \cdot 10 + a_0)a_0. \quad (5)$$

Agora é só escolher a_0 como o maior inteiro, $0 \leq a_0 \leq 9$, de tal forma que ocorra (5). Após a escolha de a_0 , a diferença

$$R = d'_2d_1d_0 - (2 \cdot a_1 \cdot 10 + a_0)a_0 \quad (6)$$

será denominada resto da raiz quadrada de d . Se $R = 0$ então a_1a_0 será a raiz quadrada exata de d , caso ocorra $R > 0$, a_1a_0 será uma raiz aproximada de d , por números inteiros. Aproximação esta que se dá por falta.

Podemos resumir os passos anteriores em um algoritmo.

3.1.1 Algoritmo ($d \in \mathbf{Z}$, $0 \leq d \leq 10^4$)

Vamos resumir os passos principais dos cálculos da seção anterior em um algoritmo. Para tanto consideremos um inteiro d , tal que $0 \leq d \leq 10^4$. É claro que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{10^4} = 100$, assim, estaremos interessados em calcular $\sqrt{d}$ para um inteiro d tal que $0 \leq d \leq 9999$. Nestas condições podemos escrever

$$d = d_3d_2d_1d_0,$$

onde d_i são os algarismos de d .

- 1º passo: a inequação (3) nos mostra que devemos considerar o número formado pelos dois primeiros algarismos de d , isto é, d_3d_2 e encontrar o maior inteiro a_1 , $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$a_1 \leq \sqrt{d_3d_2}.$$

- 2º passo: a inequação (4) nos mostra que devemos calcular a diferença

$$d_3d_2 - a_1^2$$

cujo resultado é d'_2 .

- 3º passo: a inequação (5) nos mostra que devemos considerar o número $d'_2d_1d_0$, obtido pela união do número d'_2 com os dois últimos algarismos de d . Agora procuramos pelo maior inteiro a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaça

$$d'_2d_1d_0 \geq (2.a_1.10 + a_0)a_0.$$

- 4º passo: segue da equação (6) que se o resto R , isto é, a diferença

$$d'_2d_1d_0 - (2.a_1.10 + a_0)a_0$$

for zero, então a_1a_0 é a raiz quadrada exata de d . Caso contrário teremos uma raiz aproximada.

Exemplo 3.1.1 *Seja $d = 676$ e vamos seguir os passos do algoritmo. Neste caso $d_3 = 0$, $d_2 = 6$, $d_1 = 7$, $d_0 = 6$.*

- 1º passo: o número formado pelos dois primeiros algarismos de d é $d_3d_2 = 06 = 6$. O maior inteiro a_1 , $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$d_3d_2 \geq a_1^2 \Leftrightarrow 6 \geq a_1^2$$

é o número 2. Então $a_1 = 2$, o primeiro dígito da raiz procurada.

- 2º passo: temos que $d_3d_2 - a_1^2 = 6 - 4$ cujo resultado é $d'_2 = 2$.
- 3º passo: temos que $d'_2d_1d_0 = 276$. O maior inteiro a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaz

$$d'_2d_1d_0 \geq (2.a_1 \cdot 10 + a_0)a_0 \Leftrightarrow 276 \geq (2.2.10 + a_0)a_0$$

é $a_0 = 6$, pois $(40 + a_0).a_0 = 46.6 = 276$. Assim, determinamos o segundo dígito da raiz procurada.

- 4º passo: temos que o resto

$$R = d'_2d_1d_0 - (2.a_1 \cdot 10 + a_0)a_0$$

é zero, logo $a_1a_0 = 26$ é a raiz quadrada exata de $d = 676$.

Exemplo 3.1.2 Seja $d = 1681$ e vamos seguir os passos do algoritmo. Neste caso $d_3 = 1, d_2 = 6, d_1 = 8, d_0 = 1$.

- 1º passo: o número formado pelos dois primeiros algarismos de d é $d_3d_2 = 16$. O maior inteiro $a_1, 0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$a_1 \leq \sqrt{d_3d_2} \Leftrightarrow a_1 \leq \sqrt{16}$$

é o número 4. Então $a_1 = 4$ é o primeiro dígito da raiz procurada.

- 2º passo: temos que $d_3d_2 - a_1^2 = 16 - 16$ cujo resultado é $d'_2 = 0$.
- 3º passo: temos que $d'_2d_1d_0 = 081 = 81$. O maior inteiro $a_0, 0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaz

$$d'_2d_1d_0 \geq (2.a_1.10 + a_0)a_0 \Leftrightarrow 81 \geq (2.4.10 + a_0)a_0$$

é $a_0 = 1$, pois $(80 + a_0).a_0 = 81.1 = 81$. Assim, determinamos o segundo dígito a raiz.

- 4º passo: temos que o resto

$$R = d'_2d_1d_0 - (2.a_1.10 + a_0)a_0$$

é zero, logo $a_1a_0 = 41$ é a raiz quadrada exata de $d = 1681$.

Exemplo 3.1.3 Seja $d = 6562$ e vamos seguir os passos do algoritmo. Neste caso $d_3 = 6, d_2 = 5, d_1 = 6, d_0 = 2$.

- 1º passo: o número formado pelos dois primeiros algarismos de d é $d_3d_2 = 65$. O maior inteiro $a_1, 0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$a_1 \leq \sqrt{d_3d_2} \Leftrightarrow a_1 \leq \sqrt{65}$$

é o número 8. Então $a_1 = 8$ é o primeiro dígito da raiz procurada.

- 2º passo: temos que $d_3d_2 - a_1^2 = 65 - 64$ cujo resultado é $d'_2 = 1$.
- 3º passo: temos que $d'_2d_1d_0 = 162$. O maior inteiro $a_0, 0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaz

$$d'_2d_1d_0 \geq (2.a_1.10 + a_0)a_0 \Leftrightarrow 162 \geq (2.8.10 + a_0)a_0$$

é $a_0 = 1$, pois $(160 + a_0).a_0 = 161.1 = 161$. Assim, determinamos o segundo dígito da raiz procurada.

- 4º passo: temos que o resto

$$R = d'_2d_1d_0 - (2.a_1 \cdot 10 + a_0)a_0$$

é 1, logo $a_1a_0 = 81$ é uma raiz quadrada aproximada por falta de $d = 6562$.

3.2 Raiz quadrada de um número inteiro d , $0 \leq d \leq 10^6$.

É claro que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{10^6} = 1000$, assim, estaremos interessados em calcular $\sqrt{d}$ para um inteiro d tal que $0 \leq d \leq 999999$. Nestas condições podemos escrever

$$d = d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0,$$

onde d_i são os algarismos de d e o maior número inteiro não-negativo x tal que

$$d \geq x^2 \quad (7)$$

possui até três casas decimais, e escreveremos $x = a_2 a_1 a_0$. Estamos interessados em determinar os algarismos a_0 , a_1 e a_2 . Para isto reescrevemos $x = a_2 a_1 a_0 = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Segue da inequação (7) que

$$d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0 \geq (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)^2,$$

desenvolvendo o segundo membro e reescrevendo o primeiro obtemos:

$$\begin{aligned} & d_5 \cdot 10^5 + d_4 \cdot 10^4 + d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq a_2^2 \cdot 10^4 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 \\ & \quad \updownarrow \\ & (d_5 \cdot 10 + d_4) \cdot 10^4 + d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq a_2^2 \cdot 10^4 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 \end{aligned}$$

Fazendo $d_5 \cdot 10 + d_4 = d_5 d_4$ na inequação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} & d_5 d_4 \cdot 10^4 + d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq a_2^2 \cdot 10^4 + 2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Comparando os dois membros na desigualdade anterior, observamos, pelas potências de 10, que podemos escolher a_2 de tal forma que ele seja o maior inteiro não-negativo que satisfaz a desigualdade $d_5 d_4 \geq a_2^2$, ou seja,

$$a_2 \leq \sqrt{d_5 d_4} \quad (9)$$

Escolhido o valor de a_2 , voltamos na inequação (8) e a reescrevemos como segue:

$$\begin{aligned} & (d_5 d_4 - a_2^2) \cdot 10^4 + d_3 \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq 2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2 \end{aligned}$$

fazendo

$$d_5 d_4 - a_2^2 = d'_4 \quad (10)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} & (d'_4 \cdot 10 + d_3) \cdot 10^3 + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq 2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_1^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2 \end{aligned}$$

reescrevemos os dois membros

$$\begin{aligned} & (d'_4 d_3 \cdot 10 + d_2) \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq (2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10 + a_1^2) \cdot 10^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Comparando os dois membros da desigualdade anterior observando as potências de 10, notamos que o termo $2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2$ pode ser "regulado" pelo número a_0 que ainda não foi determinado, e por isso somos levados a escolher a_1 de forma que ele venha a ser o maior inteiro tal que $0 \leq a_1 \leq 9$ e $2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 10 + a_1^2 \leq d'_4 d_3 d_2$ ou seja

$$(2 \cdot a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot a_1 \leq d'_4 d_3 d_2. \quad (12)$$

Escolhido a_1 , passaremos agora à obtenção de a_0 . Para isto reescrevemos a inequação (11) como segue

$$[d'_4 d_3 d_2 - (2 \cdot a_2 \cdot 10 + a_1) a_1] \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \geq 2 \cdot a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2. \quad (13)$$

Fazendo

$$d'_4 d_3 d_2 - (2 \cdot a_2 \cdot 10 + a_1) a_1 = d'_2 \quad (14)$$

obtemos

$$(d'_2 \cdot 10 + d_1) \cdot 10 + d_0 \geq 2 \cdot a_0 \cdot (a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10 + a_0^2 = 2 \cdot a_0 \cdot a_2 a_1 \cdot 10 + a_0^2,$$

donde segue que

$$d'_2 d_1 d_0 \geq (2 \cdot \underline{a_2 a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0 \quad (15)$$

Agora é só escolher a_0 como o maior inteiro, $0 \leq a_0 \leq 9$, de tal forma que ocorra (15). Após a escolha de a_0 , a diferença

$$R = d'_2 d_1 d_0 - (2 \cdot \underline{a_2 a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0 \quad (16)$$

será denominada resto da raiz quadrada de d . Se $R = 0$ então $a_2 a_1 a_0$ será a raiz quadrada exata de d , caso ocorra $R > 0$, $a_2 a_1 a_0$ será uma raiz aproximada de d , por números inteiros, aproximação essa que se dá por falta.

Podemos resumir os passos anteriores em um algoritmo.

3.2.1 Algoritmo ($d \in \mathbb{Z}$, $0 \leq d \leq 10^6$)

Vamos resumir os passos principais dos cálculos da seção anterior em um algoritmo. Para tanto consideremos um inteiro d , tal que $0 \leq d \leq 10^6$. É claro que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{10^6} = 1000$, assim, estaremos interessados em calcular $\sqrt{d}$ para um inteiro d tal que $0 \leq d \leq 999999$. Nestas condições podemos escrever

$$d = d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0,$$

onde d_i são os algarismos de d .

- 1^o passo: as inequações (8) e (9) nos mostram que devemos considerar o número formado pelos dois primeiros algarismos de d , isto é, $d_5 d_4$ e encontrar o maior inteiro a_2 , $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que

$$a_2 \leq \sqrt{d_5 d_4}.$$

Determinamos assim o valor de a_2 .

- 2^o passo: a inequação (10) nos mostra que devemos calcular a diferença

$$d_5 d_4 - a_2^2,$$

cujo resultado será denotado por d'_4 .

- 3^o passo: a inequação (12) nos mostra que devemos considerar o número $d'_4 d_3 d_2$, obtido pela união do número d'_4 com os dois seguintes algarismos de d . Agora procuramos pelo maior inteiro a_1 , $0 \leq a_1 \leq 9$ que satisfaça

$$d'_4 d_3 d_2 \geq (2.a_2.10 + a_1)a_1.$$

Determinamos assim o valor de a_1 .

- 4^o passo: a inequação (14) nos mostra que devemos calcular a diferença

$$d'_4 d_3 d_2 - (2.a_2.10 + a_1)a_1,$$

cujo resultado será denotado por d'_2 .

- 5^o passo: a inequação (15) nos mostra que devemos considerar o número $d'_2 d_1 d_0$, obtido pela união do número d'_2 com os dois últimos algarismos de d . Agora procuramos pelo maior inteiro a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaça (15), isto é,

$$d'_2 d_1 d_0 \geq (2.a_2 a_1.10 + a_0)a_0.$$

Determinamos assim o valor de a_0 .

- 6º passo: segue da equação (16) que se o resto R , isto é, a diferença

$$d'_2 d_1 d_0 - (2 \cdot \underline{a_2 a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0$$

for zero, então $a_2 a_1 a_0$ é a raiz quadrada exata de d , caso contrário ele será uma raiz aproximada.

Exemplo 3.2.1 Seja $d = 455625$ então $d_5 = 4$, $d_4 = 5$, $d_3 = 5$, $d_2 = 6$, $d_1 = 2$, $d_0 = 5$

- 1º passo: o número formado pelos dois primeiros algarismos de d é $d_5 d_4 = 45$. O maior inteiro a_2 , $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que

$$a_2 \leq \sqrt{45}$$

é $a_2 = 6$, que é o primeiro dígito da raiz quadrada de 455625.

- 2º passo: a diferença

$$d_5 d_4 - a_2^2 = 45 - 36,$$

cujo resultado é $d'_4 = 9$.

- 3º passo: consideramos $d'_4 d_3 d_2 = 956$, obtido pela união do número d'_4 com os dois seguintes algarismos de d . Agora procuramos pelo maior inteiro a_1 , $0 \leq a_1 \leq 9$ que satisfaça

$$d'_4 d_3 d_2 \geq (2 \cdot a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot a_1 \Leftrightarrow 956 \geq (2 \cdot 6 \cdot 10 + a_1) \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = 7.$$

Portanto, $a_1 = 7$ é o segundo dígito da raiz quadrada de 455625.

- 4º passo: repetimos o segundo passo, calculando a diferença

$$d'_4 d_3 d_2 - (2 \cdot a_2 \cdot 10 + a_1) a_1 \Leftrightarrow 956 - 889$$

cujo resultado 67 será denotado por d'_2 .

- 5º passo: repetimos o terceiro passo, considerando o número $d'_2 d_1 d_0 = 6725$. Procuramos pelo maior inteiro a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$ que satisfaça

$$d'_2 d_1 d_0 \geq (2 \cdot a_2 a_1 \cdot 10 + a_0) a_0 \Leftrightarrow 6725 \geq (2 \cdot 67 \cdot 10 + a_0) a_0 \Rightarrow a_0 = 5$$

determinamos assim o último dígito da raiz quadrada de 455625.

- 6º passo: o resto R , isto é, a diferença

$$d'_2 d_1 d_0 - (2 \cdot \underline{a_2 a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0 \Leftrightarrow 6725 - 6725 = 0$$

assim, $a_2 a_1 a_0 = 675$ é a raiz quadrada exata de d .

As seções 3.1 e 3.3 nos fornecem uma boa ideia de como tratar o caso em que d é um número inteiro não-negativo dado arbitrariamente.

3.3 Raiz quadrada de um número inteiro d , $d \geq 0$.

Dado um inteiro não-negativo $d \geq 0$, existe um inteiro $m \geq 0$ tal que $0 \leq d \leq 10^{2m}$. Nestas condições vamos escolher m de modo que ele seja mínimo.

É claro que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{10^{2m}} = 10^m$, assim, podemos escrever

$$d = d_{2m-1}d_{2m-2} \cdots d_3d_2d_1d_0,$$

onde $0 \leq d_i \leq 9$ são os algarismos de d . Note que se d possui um número ímpar de algarismos, então $d_{2m-1} = 0$.

O maior número inteiro não-negativo x tal que

$$d \geq x^2 \tag{17}$$

pode possuir até m casas decimais, e escreveremos

$$x = a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1a_0$$

ou seja,

$$x = a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1a_0 = a_{m-1}.10^{m-1} + a_{m-2}.10^{m-2} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0.$$

Segue da inequação (17) que

$$d_{2m-1}d_{2m-2} \cdots d_1d_0 \geq (a_{m-1}.10^{m-1} + a_{m-2}.10^{m-2} + \cdots + a_1.10 + a_0)^2 \tag{18}$$

desenvolvendo o segundo membro da desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned} & (a_{m-1}.10^{m-1} + a_{m-2}.10^{m-2} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0)^2 \\ &= a_{m-1}^2.10^{2(m-1)} + a_{m-2}^2.10^{2(m-2)} + \cdots + a_2^2.10^4 + a_1^2.10^2 + a_0^2 + \\ &+ 2.(a_{m-1} \cdot a_{m-2}.10^{2m-3} + a_{m-1} \cdot a_{m-3}.10^{2m-4} + \cdots + a_{m-1} \cdot a_1.10^m + a_{m-1} \cdot a_0.10^{m-1}) + \\ &+ 2.(a_{m-2} \cdot a_{m-3}.10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-4}.10^{2m-6} + \cdots + a_{m-2} \cdot a_1.10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0.10^{m-2}) + \\ &+ 2.(a_{m-3} \cdot a_{m-4}.10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5}.10^{2m-8} + \cdots + a_{m-3} \cdot a_1.10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0.10^{m-3}) + \\ &+ \cdots + \\ &+ 2.(a_2 \cdot a_1.10^3 + a_2 \cdot a_0.10^2) + \\ &+ 2.(a_1 \cdot a_0.10) \end{aligned}$$

Podemos reescrever a desigualdade (18):

$$\begin{aligned}
& (d_{2m-1} \cdot 10 + d_{2m-2}) \cdot 10^{2m-2} + d_{2m-3} \cdot 10^{2m-3} + \dots + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\
& \geq a_{m-1}^2 \cdot 10^{2(m-1)} + a_{m-2}^2 \cdot 10^{2(m-2)} + \dots + a_2^2 \cdot 10^4 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_0^2 + \\
& + 2 \cdot (a_{m-1} \cdot a_{m-2} \cdot 10^{2m-3} + a_{m-1} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-4} + \dots + a_{m-1} \cdot a_1 \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot a_0 \cdot 10^{m-1}) + \\
& + 2 \cdot (a_{m-2} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-6} + \dots + a_{m-2} \cdot a_1 \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0 \cdot 10^{m-2}) + \\
& + 2 \cdot (a_{m-3} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-8} + \dots + a_{m-3} \cdot a_1 \cdot 10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0 \cdot 10^{m-3}) + \\
& + \dots + \\
& + 2 \cdot (a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2) + \\
& + 2 \cdot (a_1 \cdot a_0 \cdot 10)
\end{aligned} \tag{19}$$

Comparando os dois membros na desigualdade anterior, observamos, pelas potências de 10, que podemos escolher a_{m-1} de tal forma que ele seja o maior inteiro não-negativo que satisfaça a desigualdade $d_{2m-1}d_{2m-2} \geq a_{m-1}^2$, ou seja,

$$a_{m-1} \leq \sqrt{d_{2m-1}d_{2m-2}} \tag{20}$$

Escolhido o valor de a_{m-1} , efetuamos a subtração

$$d_{2m-1}d_{2m-2} - a_{m-1}^2 \tag{21}$$

cujo resultado será denotado por d'_{2m-2} . Agora, escrevemos (19) como segue:

$$\begin{aligned}
& d'_{2m-2} \cdot 10^{2m-2} + d_{2m-3} \cdot 10^{2m-3} + d_{2m-4} \cdot 10^{2m-4} + \dots + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\
& \geq a_{m-2}^2 \cdot 10^{2(m-2)} + a_{m-3}^2 \cdot 10^{2(m-3)} + \dots + a_2^2 \cdot 10^4 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_0^2 + \\
& + 2 \cdot (a_{m-1} \cdot a_{m-2} \cdot 10^{2m-3} + a_{m-1} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-4} + \dots + a_{m-1} \cdot a_1 \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot a_0 \cdot 10^{m-1}) + \\
& + 2 \cdot (a_{m-2} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-6} + \dots + a_{m-2} \cdot a_1 \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0 \cdot 10^{m-2}) + \\
& + 2 \cdot (a_{m-3} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-8} + \dots + a_{m-3} \cdot a_1 \cdot 10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0 \cdot 10^{m-3}) + \\
& + \dots + \\
& + 2 \cdot (a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2) + \\
& + 2 \cdot (a_1 \cdot a_0 \cdot 10)
\end{aligned} \tag{22}$$

Como queremos determinar a_{m-2} e conhecemos o valor de a_{m-1} , vamos considerar no segundo membro da desigualdade anterior a soma

$$a_{m-2}^2 \cdot 10^{2(m-2)} + 2 \cdot a_{m-1} \cdot a_{m-2} \cdot 10^{2m-3}$$

que reescrevemos como

$$(2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2}.10^{2(m-2)}$$

e (22) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} & \underline{d'_{2m-2}d_{2m-3}d_{2m-4}.10^{2m-4} + d_{2m-5}.10^{2m-5} + \dots + d_2.10^2 + d_1.10 + d_0} \\ & \geq \underline{(2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2}.10^{2(m-2)}} + a_{m-3}^2.10^{2(m-3)} + \dots + a_2^2.10^4 + a_1^2.10^2 + a_0^2 + \\ & + 2.(a_{m-1} \cdot a_{m-3}.10^{2m-4} + a_{m-1} \cdot a_{m-4}.10^{2m-5} + \dots + a_{m-1} \cdot a_1.10^m + a_{m-1} \cdot a_0.10^{m-1}) + \\ & + 2.(a_{m-2} \cdot a_{m-3}.10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-4}.10^{2m-6} + \dots + a_{m-2} \cdot a_1.10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0.10^{m-2}) + \\ & + 2.(a_{m-3} \cdot a_{m-4}.10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5}.10^{2m-8} + \dots + a_{m-3} \cdot a_1.10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0.10^{m-3}) + \\ & + \dots + \\ & + 2.(a_2 \cdot a_1.10^3 + a_2 \cdot a_0.10^2) + \\ & + 2.(a_1 \cdot a_0.10) \end{aligned} \tag{23}$$

Comparando os dois membros da desigualdade anterior observando as potências de 10, somos levados a escolher a_{m-2} de forma que ele venha a ser o maior inteiro tal que $0 \leq a_{m-2} \leq 9$ e

$$(2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2} \leq d'_{2m-2}d_{2m-3}d_{2m-4}$$

assim, finalizamos a escolha de a_{m-2} e passamos à obtenção de a_{m-3} . Para isto subtraímos $(2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2}.10^{2(m-2)}$ em ambos os membros de (23) e escrevendo

$$d'_{2m-2}d_{2m-3}d_{2m-4} - (2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2} = d'_{2m-4} \tag{24}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & d'_{2m-4}.10^{2m-4} + d_{2m-5}.10^{2m-5} + d_{2m-6}.10^{2m-6} + \dots + d_2.10^2 + d_1.10 + d_0 \\ & \geq a_{m-3}^2.10^{2(m-3)} + a_{m-4}^2.10^{2(m-4)} + \dots + a_2^2.10^4 + a_1^2.10^2 + a_0^2 + \\ & + 2.(a_{m-1} \cdot a_{m-3}.10^{2m-4} + a_{m-1} \cdot a_{m-4}.10^{2m-5} + \dots + a_{m-1} \cdot a_1.10^m + a_{m-1} \cdot a_0.10^{m-1}) + \\ & + 2.(a_{m-2} \cdot a_{m-3}.10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-4}.10^{2m-6} + \dots + a_{m-2} \cdot a_1.10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0.10^{m-2}) + \\ & + 2.(a_{m-3} \cdot a_{m-4}.10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5}.10^{2m-8} + \dots + a_{m-3} \cdot a_1.10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0.10^{m-3}) + \\ & + \dots + \\ & + 2.(a_2 \cdot a_1.10^3 + a_2 \cdot a_0.10^2) + \\ & + 2.(a_1 \cdot a_0.10) \end{aligned} \tag{25}$$

No segundo membro de (25), observamos que as parcelas $a_{m-3}^2 \cdot 10^{2(m-3)}$, $2 \cdot a_{m-1} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-4}$ e $2 \cdot a_{m-2} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-5}$ são as únicas que envolvem simultaneamente o número a_{m-3} a ser determinado e os números já determinados a_{m-1} e a_{m-2} . as outras parcelas que envolvem a_{m-3} , também envolvem termos ainda desconhecidos, como por exemplo $2 \cdot a_{m-3} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-7}$ que envolve o ainda não calculado número a_{m-4} .

Note ainda que

$$\begin{aligned} & a_{m-3}^2 \cdot 10^{2(m-3)} + 2 \cdot a_{m-1} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-4} + 2 \cdot a_{m-2} \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-5} \\ &= (2 \cdot a_{m-1} a_{m-2} \cdot 10 + a_{m-3}) \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-6} \end{aligned}$$

e substituindo esta última igualdade em (25), obtemos:

$$\begin{aligned} & d'_{2m-4} d_{2m-5} d_{2m-6} \cdot 10^{2m-6} + d_{2m-7} \cdot 10^{2m-7} + \dots + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0 \\ & \geq (2 \cdot a_{m-1} a_{m-2} \cdot 10 + a_{m-3}) \cdot a_{m-3} \cdot 10^{2m-6} + a_{m-4}^2 \cdot 10^{2(m-4)} + \dots + a_2^2 \cdot 10^4 + a_1^2 \cdot 10^2 + a_0^2 + \\ & + 2 \cdot (a_{m-1} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-4} + a_{m-1} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-5} + \dots + a_{m-1} \cdot a_1 \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot a_0 \cdot 10^{m-1}) + \\ & + 2 \cdot (a_{m-2} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-5} + a_{m-2} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-6} + \dots + a_{m-2} \cdot a_1 \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot a_0 \cdot 10^{m-2}) + \\ & + 2 \cdot (a_{m-3} \cdot a_{m-4} \cdot 10^{2m-7} + a_{m-3} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-8} + \dots + a_{m-3} \cdot a_1 \cdot 10^{m-2} + a_{m-3} \cdot a_0 \cdot 10^{m-3}) + \\ & + 2 \cdot (a_{m-4} \cdot a_{m-5} \cdot 10^{2m-9} + a_{m-4} \cdot a_{m-6} \cdot 10^{2m-10} + \dots + a_{m-4} \cdot a_1 \cdot 10^{m-3} + a_{m-4} \cdot a_0 \cdot 10^{m-4}) + \\ & + \dots + \\ & + 2 \cdot (a_2 \cdot a_1 \cdot 10^3 + a_2 \cdot a_0 \cdot 10^2) + \\ & + 2 \cdot (a_1 \cdot a_0 \cdot 10) \end{aligned} \tag{26}$$

Note que esta inequação é análoga à inequação (23) e, portanto, para determinarmos a_{m-3} , procederemos de maneira análoga ao que fizemos para determinarmos a_{m-2} .

Comparando os dois membros da desigualdade anterior observando as potências de 10, somos levados a escolher a_{m-3} de forma que

$$(2 \cdot a_{m-1} a_{m-2} \cdot 10 + a_{m-3}) \cdot a_{m-3} \leq d'_{2m-4} d_{2m-5} d_{2m-6}$$

Podemos determinar a_{m-4} repetindo o mesmo procedimento que fizemos para determinar a_{m-3} . Seguindo este processo de maneira indutiva, o último termo a ser obtido é a_0 , quando então todos os termos anteriores a ele já terão sido calculados, e a equação a que chegaremos é

$$d'_2 d_1 d_0 \geq a_0^2 + 2 \cdot a_{m-1} \cdot a_0 \cdot 10^{m-1} + 2 \cdot a_{m-2} \cdot a_0 \cdot 10^{m-2} + \dots + 2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot 10 \tag{27}$$

que é equivalente a

$$d'_2 d_1 d_0 \geq (2 \cdot \underline{a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} \cdots a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0 \quad (28)$$

Então é só escolher a_0 de modo que ocorra (28). Após a escolha de a_0 , a diferença

$$R = d'_2 d_1 d_0 - (2 \cdot \underline{a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} \cdots a_1} \cdot 10 + a_0) \cdot a_0$$

será denominada **resto** da raiz quadrada de d . Se $R = 0$, então $a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} \cdots a_1 a_0$ é a raiz quadrada exata de d , caso $R > 0$, $a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} \cdots a_1 a_0$ será uma aproximação inteira e por falta da raiz quadrada de d .

3.3.1 Algoritmo ($d \in \mathbf{Z}$, $d \geq 0$)

Vamos resumir os passos principais dos cálculos da seção anterior em um algoritmo. Para tanto, seja d um inteiro não-negativo. Então existe o menor inteiro $m \geq 0$ tal que $0 \leq d \leq 10^{2m}$ e escrevemos

$$d = d_{2m-1} d_{2m-2} \cdots d_3 d_2 d_1 d_0,$$

$d_i \in \mathbf{Z}$, $0 \leq d_i \leq 9$. Note que escrevemos d com um número par de algarismos, assim, quando d possuir um número ímpar de algarismos teremos $d_{2m-1} = 0$.

- 1º passo: consideramos o número $d_{2m-1} d_{2m-2}$ formado pelos dois primeiro algarismos de d , caso d possua um número par de algarismos, senão $d_{2m-1} = 0$ e o número considerado será d_{2m-2} . Em seguida determinamos o inteiro a_{m-1} tal que

$$a_{m-1} \leq \sqrt{d_{2m-1} d_{2m-2}}$$

a_{m-1} será o primeiro dígito de $\sqrt{d}$.

- 2º passo: calculamos a diferença

$$d_{2m-1} d_{2m-2} - a_{m-1}^2,$$

cujo resultado será denotado por d'_{2m-2} .

- 3º passo: consideramos o número $d'_{2m-2} d_{2m-3} d_{2m-4}$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_{m-2} , $0 \leq a_{m-2} \leq 9$, tal que ocorra

$$(2 \cdot \underline{a_{m-1}} \cdot 10 + a_{m-2}) \cdot a_{m-2} \leq d'_{2m-2} d_{2m-3} d_{2m-4}$$

determinando assim o valor de a_{m-2} , segundo dígito da raiz procurada.

- 4º passo: calculamos a diferença

$$d'_{2m-2}d_{2m-3}d_{2m-4} - (2.a_{m-1}.10 + a_{m-2}).a_{m-2}$$

cujo resultado será denotado por d'_{2m-4} .

- 5º passo: devemos seguir procedimento análogo ao que foi realizado no 3º passo, considerando $d'_{2m-4}d_{2m-5}d_{2m-6}$ e em seguida procuramos por a_{m-3} , $0 \leq a_{m-3} \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_{m-1}a_{m-2}}.10 + a_{m-3}).a_{m-3} \leq d'_{2m-4}d_{2m-5}d_{2m-6}$$

determinando assim a_{m-3} , terceiro dígito da raiz procurada.

- 6º passo: devemos seguir procedimento análogo ao que foi realizado no 4º passo, calculando a diferença

$$d'_{2m-4}d_{2m-5}d_{2m-6} - (2.\underline{a_{m-1}a_{m-2}}.10 + a_{m-3}).a_{m-3}$$

cujo resultado será denotado por d'_{2m-6} .

- 7º passo: seguimos repetindo procedimentos análogos aos realizados nos terceiro e quarto passos. Quando alcançarmos o número $d'_2d_1d_0$ repetiremos o terceiro passo pela última vez, isto é, procuramos por a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1}.10 + a_0).a_0 \leq d'_2d_1d_0$$

determinando assim a_0 , último dígito da raiz procurada.

- Último passo: calculamos o resto

$$R = d'_2d_1d_0 - (2.\underline{a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1}.10 + a_0).a_0$$

e, se $R = 0$, $a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1a_0$ será a raiz quadrada exata de d , se $R > 0$ temos que $a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_2a_1a_0$ será uma raiz aproximada de d . Vale ressaltar que esta aproximação será por falta e por um número íteiro.

Exemplo 3.3.1 Como exemplo de aplicação do algoritmo vamos calcular a raiz quadrada do número $d = 4411545735424$. O menor inteiro $m \geq 0$ tal que $0 \leq d \leq 10^{2m}$ é $m = 7$. Escrevemos $d = d_{13}d_{12}d_{11} \cdots d_4d_3d_2d_1d_0$, isto é $d_{13} = 0$, $d_{12} = 4$, $d_{11} = 4$, $d_{10} = 1$, $d_9 = 1$, $d_8 = 5$, $d_7 = 4$, $d_6 = 5$, $d_5 = 7$, $d_4 = 3$, $d_3 = 5$, $d_2 = 4$, $d_1 = 2$, $d_0 = 4$. Note que $d_{13} = 0$ pois d possui um número ímpar de algarismos.

- 1^o passo: consideramos o número $d_{13}d_{12} = 04 = 4$. Em seguida determinamos o inteiro a_6 tal que

$$a_6 \leq \sqrt{d_{13}d_{12}} \Leftrightarrow a_6 \leq \sqrt{4},$$

logo, $a_6 = 2$ será o primeiro dígito de $\sqrt{d}$.

- 2^o passo: calculamos a diferença

$$d_{13}d_{12} - a_{m-1}^2 \Leftrightarrow 4 - 4$$

cujo resultado é $d'_{12} = 0$.

- 3^o passo: consideramos o número $d'_{12}d_{11}d_{10} = 041 = 41$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_5 , $0 \leq a_5 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6}.10 + a_5).a_5 \leq d'_{12}d_{11}d_{10} \Leftrightarrow (2.\underline{2}.10 + a_5).a_5 \leq 41$$

segue que $a_5 = 1$, o segundo dígito da raiz procurada.

- 4^o passo: calculamos a diferença

$$d'_{12}d_{11}d_{10} - ((2.\underline{a_6}.10 + a_5).a_5) \Leftrightarrow 41 - 41$$

cujo resultado é $d'_{10} = 0$.

- 5^o passo: devemos seguir procedimento análogo ao que foi realizado no 3^o passo, considerando $d'_{10}d_9d_8 = 015 = 15$ e em seguida procuramos por a_4 , $0 \leq a_4 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6a_5}.10 + a_4).a_4 \leq d'_{10}d_9d_8 \Leftrightarrow (2.\underline{21}.10 + a_4).a_4 \leq 15$$

determinando assim $a_4 = 0$, terceiro dígito da raiz procurada.

- 6^o passo: devemos seguir procedimento análogo ao que foi realizado no 4^o passo, calculando a diferença

$$d'_{10}d_9d_8 - (2.\underline{21}.10 + a_4).a_4 \Leftrightarrow 15 - 0$$

cujo resultado é $d'_8 = 15$.

Proseguimos repetindo procedimentos análogos aos realizados nos terceiro e quarto passos.

- 7^o passo: consideramos o número $d'_8 d_7 d_6 = 1545$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_3 , $0 \leq a_3 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6 a_5 a_4}.10 + a_3).a_3 \leq d'_8 d_7 d_6 \Leftrightarrow (2.\underline{210}.10 + a_3).a_3 \leq 1545$$

segue que $a_3 = 0$, o quarto dígito da raiz procurada.

- 8^o passo: calculamos a diferença

$$d'_8 d_7 d_6 - ((2.\underline{a_6 a_5 a_4}.10 + a_3).a_3 \Leftrightarrow 1545 - 0$$

cujo resultado é $d'_6 = 1545$.

- 9^o passo: consideramos o número $d'_6 d_5 d_4 = 154573$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_2 , $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3}.10 + a_2).a_2 \leq d'_6 d_5 d_4 \Leftrightarrow (2.\underline{2100}.10 + a_2).a_2 \leq 154573$$

segue que $a_2 = 3$, o quarto dígito da raiz procurada.

- 10^o passo: calculamos a diferença

$$d'_6 d_5 d_4 - (2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3}.10 + a_2).a_2 \Leftrightarrow 154573 - 126009$$

cujo resultado é $d'_4 = 28564$.

- 11^o passo: consideramos o número $d'_4 d_3 d_2 = 2856454$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_1 , $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2}.10 + a_1).a_1 \leq d'_4 d_3 d_2 \Leftrightarrow (2.\underline{21003}.10 + a_1).a_1 \leq 2520396$$

segue que $a_1 = 6$, o quinto dígito da raiz procurada.

- 12^o passo: calculamos a diferença

$$d'_4 d_3 d_2 - (2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2}.10 + a_1).a_1 \Leftrightarrow 2856454 - 2520396$$

cujo resultado é $d'_2 = 336058$.

- 13^o passo: consideramos o número $d'_2 d_1 d_0 = 33605824$. Em seguida procuramos pelo maior inteiro a_0 , $0 \leq a_0 \leq 9$, tal que ocorra

$$(2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}.10 + a_0).a_0 \leq d'_2 d_1 d_0 \Leftrightarrow (2.\underline{210036}.10 + a_0).a_0 \leq 33605824$$

segue que $a_0 = 8$, o sexto e último dígito da raiz procurada.

- Último passo: calculamos o resto

$$R = d'_2 d_1 d_0 - (2.\underline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}.10 + a_0).a_0 \Leftrightarrow R = 33605824 - 33605824 = 0$$

e, portanto, temos

$$\sqrt{4411545735424} = 2100368$$

3.4 Raiz quadrada de um número racional d

Agora trataremos a situação onde tomaremos d como um número racional que não seja inteiro. Neste caso, a definição de número racional nos garante que podemos escrever $d = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Assim,

$$\sqrt{d} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b} \quad (29)$$

e o cálculo de $\sqrt{d}$ se transfere para o cálculo de $\sqrt{a \cdot b}$, onde $a \cdot b$ é um número inteiro.

Exemplo 3.4.1 Consideremos o número racional $d = 1,44$ que obviamente não é inteiro. Podemos escrever $1,44 = \frac{144}{10^2}$ e utilizar (29) para obter

$$\sqrt{1,44} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10^2}} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Exemplo 3.4.2 Consideremos o número racional $d = 0,0676$. Podemos escrever $0,0676 = \frac{676}{10^4}$ e utilizar (29) para obter

$$\sqrt{0,0676} = \frac{\sqrt{676}}{\sqrt{10^4}}$$

e, pelo visto no exemplo 3.1.1, $\sqrt{676} = 26$, logo

$$\sqrt{0,0676} = \frac{26}{10^2} = 0,26$$

Exemplo 3.4.3 Consideremos o número racional $d = 65,62$. Podemos escrever $65,62 = \frac{6562}{10^2}$ e utilizar (29) para obter

$$\sqrt{65,62} = \frac{\sqrt{6562}}{\sqrt{10^2}}$$

e, pelo visto no exemplo 3.1.3, $\sqrt{6562} \cong 81$, logo

$$\sqrt{65,62} = \frac{81}{10} = 8,1$$

Note que $8,1$ é apenas um valor aproximado para $\sqrt{65,62}$. Na próxima seção veremos como melhorar esta aproximação.

3.5 Melhorando as aproximações para $\sqrt{d}$

Sabemos que para $d \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{d}$ não é necessariamente um número inteiro, podendo ser inclusive um número irracional, e neste caso sua representação decimal será infinita e não periódica. Utilizando as ideias da seção anterior juntamente com o algoritmo da seção 3.3.1, podemos obter uma aproximação para $\sqrt{d}$, e esta aproximação pode conter tantas casas decimais quanto se deseje. Exemplifiquemos isto.

Exemplo 3.5.1 Sabemos que $\sqrt{3}$ é um número irracional, no entanto, podemos utilizar o algoritmo dado para calcularmos valores aproximados da seguinte forma:

- a aproximação inteira de $\sqrt{3}$ é 1;
- escrevendo $3 = \frac{300}{100}$ então

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{300}}{10} \cong \frac{17}{10} = 1,7$$

que é uma aproximação com uma casa decimal;

- se desejarmos uma aproximação com duas casas decimais, deveremos escrever $3 = \frac{3 \cdot 10^4}{10^4}$ e utilizarmos o algoritmo para obter,

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 10^4}}{10^2} \cong \frac{173}{10^2} \cong 1,73$$

- assim, se desejarmos uma aproximação com n casas decimais, deveremos escrever $3 = \frac{3 \cdot 10^{2n}}{10^{2n}}$ e utilizarmos o algoritmo para calcular $\sqrt{3 \cdot 10^{2n}}$. Depois é só dividir o resultado encontrado por 10^n .

Exemplo 3.5.2 No exemplo 3.4.3, vimos que $\sqrt{65,62} = 8,1$, podemos melhorar esta aproximação escrevendo $65,62 = \frac{65,62 \cdot 10^8}{10^8}$ e, portanto, $\sqrt{65,62} = \frac{\sqrt{65,62 \cdot 10^8}}{10^4}$. Utilizando o algoritmo obtemos $\sqrt{65,62 \cdot 10^8} \cong 81006$. Segue que

$$\sqrt{65,62} \cong \frac{81006}{10^4} = 8,1006$$

Assim, se $d \in \mathbf{Q}$, $d \geq 0$, escrevemos $d = \frac{a}{b}$ e de (29) temos $\sqrt{d} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$. Para obtermos uma melhor aproximação para $\sqrt{d}$, escrevemos

$$\sqrt{d} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b} \cdot \frac{\sqrt{10^{2n}}}{\sqrt{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{a \cdot b \cdot 10^{2n}}}{b \cdot 10^n}$$

e o numerador da última igualdade pode ser calculado utilizando o algoritmo.

3.6 Raiz quadrada de um número irracional d , $d > 0$

Vamos pensar inicialmente no número irracional $d = \pi$ para fixarmos as ideias. Note que os números

$$d_0 = 3; \quad d_1 = 3, 1; \quad d_2 = 3, 14; \quad d_3 = 3, 141; \quad d_4 = 3, 1415; \quad \dots$$

são aproximações do número π por números racionais, onde d_i é a aproximação de π com i casas decimais exatas. Então, é de se esperar que os números

$$b_0 = \sqrt{3}; \quad b_1 = \sqrt{3, 1}; \quad b_2 = \sqrt{3, 14}; \quad b_3 = \sqrt{3, 141}; \quad b_4 = \sqrt{3, 1415}; \quad \dots$$

sejam aproximações de $\sqrt{\pi}$. Da seção anterior temos

$$\begin{aligned} b_0 &= \sqrt{3} \cong 1; \\ b_1 &= \sqrt{3, 1} \cong 1, 7; \\ b_2 &= \sqrt{3, 14} \cong 1, 77; \\ b_3 &= \sqrt{3, 141} \cong 1, 772 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nesta construção não há nada de especial com o número π , isto é, se o trocarmos por um número irracional d , também poderemos escrever suas aproximações por números racionais

$$d_0; \quad d_1; \quad d_2; \quad d_3; \quad d_4; \quad \dots$$

de forma que cada d_i seja a aproximação de d com i casas decimais exatas. Então, calculando

$$b_0 = \sqrt{d_0}; \quad b_1 = \sqrt{d_1}; \quad b_2 = \sqrt{d_2}; \quad b_3 = \sqrt{d_3}; \quad b_4 = \sqrt{d_4}; \quad \dots$$

temos aproximações de $\sqrt{d}$. A aproximação será tanto melhor quanto maior for o índice i .

4 Conclusões

Concluimos assim a exposição das ideias sobre o cálculo da raiz quadrada de um número real não-negativo. Exortamos e encorajamos o leitor interessado a seguir os passos aqui descritos para avançar no sentido de descrever ideias análogas para o cálculo de raízes cúbicas e, de um modo geral, das raízes n -ésimas de um número real, que são uma decorrência imediata das que aqui foram mencionadas.

Referências

- [1] Ivan Níven. *Números: racionais e irracionais*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- [2] Elon Lages Lima. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.